ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
V (1960)

CZEN PIN i DZAN DZO-I (Wrocław)

O DZIELENIU LICZBY OBSERWACJI PRZY METODZIE MIGAWKOWEJ

1. W produkcji przemysłowej wykorzystanie czasu przez robotników gra poważną rolę. Na cały czas roboczy składają się: czas pracy i czas przerw. Stosunek czasu pracy do całkowitego czasu roboczego oznaczamy przez p i nazywamy *wykorzystaniem czasu* przez robotników.

Aby uprościć objaśnienia, będziemy uważali wszystkich robotników za jednego robotnika i będziemy mówili o wykorzystaniu czasu przez robotnika. Konkretnie możemy to tak zrobić: Mamy np. 10 robotników, każdy z nich pracuje 8 godzin; wówczas będziemy to tak traktowali, jak gdyby 1 robotnik pracował 80 godzin.

Mamy kilka metod, żeby odpowiedzieć na pytanie, jakie jest wykorzystanie czasu przez robotnika.

Pierwsza metoda jest taka, że obserwujemy robotnika przez cały jego czas roboczy i zapisujemy, ile jest w tym czasu pracy. Podzieliwszy czas pracy przez całkowity czas roboczy otrzymamy wykorzystanie czasu przez robotnika. Metoda ta jest dokładna, ale w praktyce trudno ją stosować, bo koszt ciągłej obserwacji jest bardzo duży.

Drugą metodą jest *metoda migawkowa*. Metoda migawkowa polega na tym, że zamiast ciągłego badania, stosowanego w pierwszej metodzie, obserwujemy robotnika tylko w pewnych chwilach, np. obserwujemy go losowo n razy i na podstawie wyników tych n obserwacji estymujemy prawdziwe wykorzystanie przez niego czasu roboczego.

Metoda migawkowa dawno już została opracowana przez L. H. C. Tippetta [2]. W Polsce zastosowali ją H. Białek i S. Baumann [1]. Estymują oni wykorzystanie czasu przez robotnika p za pomocą wzoru H. Rubina

$$\overline{p} = \frac{m+\frac{1}{2}\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}},$$

gdzie n jest ilością wszystkich obserwacji, m jest ilością obserwacji pozytywnych. Estymator ten jest najlepszy z punktu widzenia teorii gier [3].

Stratę S spowodowaną błędem estymacji $\overline{p}$ obliczamy ze wzoru $S = (\overline{p}-p)^2 c$, gdzie c jest stałą, a p jest prawdziwym wykorzystaniem czasu przez robotnika. Oczekiwana strata wynikająca ze stosowania wzoru Rubina jako estymatora jest

$$E(S) = \frac{c}{4(\sqrt{n}+1)^2};$$

wzór ten pozwala obliczyć liczbę potrzebnych obserwacji, gdy dana jest dopuszczalna strata $E(S)$.

Profesor H. Steinhaus postawił zagadnienie następujące. Cały czas roboczy fabryki dzieli się na trzy zmiany. W każdej zmianie pracuje różna liczba robotników. Wartość więc produkcji każdej z tych trzech zmian jest inna. Mamy obserwować n razy robotników w tych wszystkich trzech zmianach, aby zbadać wykorzystanie czasu przez robotnika (tutaj, jak poprzednio, uważamy wszystkich robotników pracujących w jednej zmianie za jednego robotnika). Jak należy rozdzielić tych n obserwacji pomiędzy trzy zmiany, żeby strata była minimalna?

Przyjmujemy, że ogólna strata równa się sumie strat tych trzech zmian. Oznaczmy wykorzystanie czasu przez robotnika w i-tej zmianie $(i = 1, 2, 3)$ przez p_i. W i-tej zmianie będzie n_i $(\sum_{i=1}^{3} n_i = n)$ obserwacji, a p_i estymujemy wielkościami

$$\overline{p}_i = \frac{m_i + \frac{1}{2}\sqrt{n_i}}{n_i + \sqrt{n_i}} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Stratę w i-tej zmianie spowodowaną błędem estymacji obliczamy jako

$$(\overline{p}_i - p_i)^2 c_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Oczekiwana ogólna strata jest zatem (por. [3])

$$g(n_1, n_2, n_3) = \sum_{i=1}^{3} \frac{c_i}{4(\sqrt{n_i}+1)^2},$$

gdzie $n_1 + n_2 + n_3 = n$.

Zagadnienie sprowadza się do znalezienia takich n_1, n_2, n_3, żeby było $n_1 + n_2 + n_3 = n$ i żeby $g(n_1, n_2, n_3)$ osiągało minimum.

2. Rozpatrujemy ogólny przypadek, mianowicie gdy cały czas roboczy fabryki podzieli się na k zmian. Mamy przeprowadzić n obserwacji dla wszystkich tych k zmian, aby zbadać wykorzystanie czasu przez robotnika w każdej zmianie. Strata w i-tej zmianie spowodowana błędem estymacji $\bar{p}_i$ jest

$$c_i(\bar{p}_i - p_i)^2,$$

gdzie

$$\bar{p}_i = \frac{m_i + \frac{1}{2}\sqrt{n_i}}{n_i + \sqrt{n_i}}, \quad \sum_{i=1}^{k} n_i = n \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Zupełnie tak samo jak w poprzednim paragrafie zagadnienie prowadzi do znalezienia takiego układu liczb całkowitych $n_1, n_2 \ldots, n_k$, spełniającego warunek $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, żeby strata ogólna

$$g(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{(\sqrt{n_i}+1)^2} \tag{1}$$

osiągała minimum. Obliczamy to w sposób następujący.

Uważamy $n_1, \ldots, n_{k-1}$ za zmienne ciągłe i oznaczamy je przez $x_1, \ldots, x_{k-1}$. Mamy

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{k-1} \frac{c_i}{(\sqrt{x_i}+1)^2} + \frac{c_k}{4\left(\sqrt{n - \sum_{i=1}^{k-1} x_i} + 1\right)^2}. \tag{2}$$

Różniczkując $f(x_1, \ldots, x_{k-1})$ względem x_i $(i = 1, \ldots, k-1)$ i przyrównując pochodne cząstkowe do zera otrzymujemy układ równań

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{4}\left[\frac{-c_i}{\sqrt{x_i}(\sqrt{x_i}+1)^3} + \frac{c_k}{\sqrt{n - \sum_{j=1}^{k-1} x_j}\left(\sqrt{n - \sum_{j=1}^{k-1} x_j} + 1\right)^3}\right] = 0 \tag{3}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k-1).$$

Po uproszczeniu mamy

$$\left(\frac{c_k}{c_i}\right)^{1/3} (x_i^{2/3} + x_i^{1/6}) - \left(n - \sum_{j=1}^{k-1} x_j\right)^{2/3} - \left(n - \sum_{j=1}^{k-1} x_j\right)^{1/6} = 0 \tag{4}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k-1).$$

Dokładne rozwiązanie tego układu równań jest bardzo trudne i poprzestaniemy na przybliżeniu. Jak później pokażemy, uzyskane przybliżenie jest wystarczająco dokładne dla praktyki.

Niech rozwiązaniami układu (4) będą

$$x_i^0 = b_i n + y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k-1), \tag{5}$$

gdzie

$$b_i = \sqrt{c_i}\Big/\sum_{j=1}^{k}\sqrt{c_j} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Uwaga. Postać wzoru (5) tłumaczy się tym, że $x_i^0 = b_i n$ jest dokładnym rozwiązaniem z lekka uproszczonego zagadnienia, w którym po prawej stronie (1) pomijamy jedynki w mianownikach.

Nie tracąc ogólności możemy przyjąć $c_1 \geqslant c_2 \geqslant \ldots \geqslant c_k$, czyli $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_k$. Podstawiając x_i^0, b_i do (4) i rozwijając w szereg lewe strony równań (4) otrzymujemy (przy założeniu $\left|\sum_{j=1}^{k-1} y_j/nb_k\right| < 1$, $|y_i/nb_i| < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$):

$$(6)\quad \left(\frac{b_k}{b_i}\right)^{2/3}[(b_i n+y_i)^{2/3}+(b_i n+y_i)^{1/6}]-\Big(b_k n-\sum_{j=1}^{k-1} y_j\Big)^{2/3}-\Big(b_k n-\sum_{j=1}^{k-1} y_j\Big)^{1/6} =$$

$$= \left(\frac{b_k}{b_i}\right)^{2/3}\left[(b_i n)^{2/3}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\frac{2}{3}}{\nu}\left(\frac{y_i}{b_i n}\right)^{\nu}+(b_i n)^{1/6}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{6}}{\nu}\left(\frac{y_i}{b_i n}\right)^{\nu}\right]-$$

$$-(b_k n)^{2/3}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\frac{2}{3}}{\nu}\left(\frac{\sum_{j=1}^{k-1} y_j}{b_k n}\right)^{\nu}(-1)^{\nu}-(b_k n)^{1/6}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{6}}{\nu}\left(\frac{\sum_{j=1}^{k-1} y_j}{b_k n}\right)^{\nu}(-1)^{\nu} =$$

$$= (b_k n)^{1/6}\left[\left(\frac{b_k}{b_i}\right)^{1/2}-1\right]+\tfrac{2}{3}b_k^{2/3}n^{-1/3}(b_i^{-1}+b_k^{-1})y_i+\tfrac{2}{3}b_k^{-1/3}n^{-1/3}\sum_{j\neq i,k} y_j+R_i = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k-1),$$

gdzie

$$R_i = (b_k n)^{2/3}\left[\sum_{\nu=2}^{\infty}\binom{\frac{2}{3}}{\nu}\left\{\left(\frac{y_i}{b_i n}\right)^{\nu}-\left(-\frac{\sum_{j=1}^{k-1} y_j}{b_k n}\right)^{\nu}\right\}\right]+$$

$$+\left(\frac{b_k}{b_i}\right)^{2/3}(b_i n)^{1/6}\sum_{\nu=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{6}}{\nu}\left(\frac{y_i}{b_i n}\right)^{\nu}-(b_k n)^{1/6}\sum_{\nu=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{6}}{\nu}\left(-\frac{\sum_{j=1}^{k-1} y_j}{b_k n}\right)^{\nu}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k-1).$$

Pomijając R_i w (6) otrzymujemy układ równań

$$(b_k n)^{1/6}\left[\left(\frac{b_k}{b_i}\right)^{1/2}-1\right]+\tfrac{2}{3}b_k^{2/3}n^{-1/3}(b_i^{-1}+b_k^{-1})y_i+\tfrac{2}{3}b_k^{-1/3}n^{-1/3}\sum_{j\neq i,k} y_j = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k-1),$$

czyli

$$
(7)\quad
\begin{array}{l}
\left(1+\dfrac{b_k}{b_1}\right)y_1 + y_2 + \ldots + y_{k-1} = \tfrac{3}{2}(b_k n)^{1/2}\left[1-\left(\dfrac{b_k}{b_1}\right)^{1/2}\right],\\
y_1 + \left(1+\dfrac{b_k}{b_2}\right)y_2 + \ldots + y_{k-1} = \tfrac{3}{2}(b_k n)^{1/2}\left[1-\left(\dfrac{b_k}{b_2}\right)^{1/2}\right],\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_1 + y_2 + \ldots + \left(1+\dfrac{b_k}{b_{k-1}}\right)y_{k-1} = \tfrac{3}{2}(b_k n)^{1/2}\left[1-\left(\dfrac{b_k}{b_{k-1}}\right)^{1/2}\right].
\end{array}
$$

Rozwiązaniem układu (7) jest

$$
(8)\quad \bar{y}_i = \tfrac{3}{2}(b_k n)^{1/2}\sum_{j=1}^{k-1}\left[1-\left(\frac{b_k}{b_j}\right)^{1/2}\right]|A_{ji}|/|A| \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1),
$$

gdzie

$$
A = \begin{bmatrix}
1+\dfrac{b_k}{b_1} & 1 & \ldots & 1\\
1 & 1+\dfrac{b_k}{b_2} & \ldots & 1\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
1 & 1 & \ldots & 1+\dfrac{b_k}{b_{k-1}}
\end{bmatrix} = (a_{ij});
$$

$|A_{ij}|$ oznacza dopełnienie algebraiczne elementu a_{ij} w wyznaczniku $|A|$.

Niech

$$
B = \begin{bmatrix}
\dfrac{b_1(1-b_1)}{b_k} & -\dfrac{b_1 b_2}{b_k} & \ldots & -\dfrac{b_1 b_{k-1}}{b_k}\\
-\dfrac{b_2 b_1}{b_k} & \dfrac{b_2(1-b_2)}{b_k} & \ldots & -\dfrac{b_2 b_{k-1}}{b_k}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
-\dfrac{b_{k-1} b_1}{b_k} & -\dfrac{b_{k-1} b_2}{b_k} & \ldots & \dfrac{b_{k-1}(1-b_{k-1})}{b_k}
\end{bmatrix}.
$$

Napiszmy

$$
AB = C = (c_{ij});
$$

jest widoczne, że

$$c_{ij} = -\sum_{\substack{\nu\neq i,j\\ \nu=1}}^{k-1} \frac{b_\nu b_j}{b_k} - \left(1+\frac{b_k}{b_i}\right)\frac{b_i b_j}{b_k} + \frac{b_j(1-b_j)}{b_k} =$$

$$= -\frac{(1-b_k-b_i-b_j)b_j}{b_k} - \frac{(b_i+b_k)b_j}{b_k} + \frac{b_j(1-b_j)}{b_k} = 0,$$

gdy $i\neq j$, $i,j = 1,2,\ldots,k-1$; mamy także

$$c_{ii} = -\sum_{\substack{\nu\neq i\\ \nu=1}}^{k-1} \frac{b_\nu b_i}{b_k} + \left(1+\frac{b_k}{b_i}\right)\frac{b_i(1-b_i)}{b_k} =$$

$$= \frac{(b_i+b_k)\,(1-b_i)}{b_k} - \frac{(1-b_i-b_k)b_i}{b_k} = 1 \quad (i = 1,2,\ldots,k-1),$$

a więc

$$AB = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \ldots & 1\end{bmatrix},$$

czyli

$$B = A^{-1} = \left(\frac{|A_{ji}|}{|A|}\right).$$

Stąd otrzymamy

$$\text{(9)}\qquad \begin{aligned} \frac{|A_{ji}|}{|A|} &= -\frac{b_i b_j}{b_k}, \quad (i\neq j, i,j = 1,2,\ldots,k-1),\\ \frac{|A_{ii}|}{|A|} &= \frac{b_i(1-b_i)}{b_k} \quad (i = 1,2,\ldots,k-1). \end{aligned}$$

Z (8) i (9) otrzymujemy zatem

$$\text{(10)}\qquad \bar{y}_i = \tfrac{3}{2}(b_k n)^{1/2}\left\{\left[1-\left(\frac{b_k}{b_i}\right)^{1/2}\right]\frac{b_i(1-b_i)}{b_k} - \sum_{\substack{j\neq i\\ j=1}}^{k-1}\left[1-\left(\frac{b_k}{b_j}\right)^{1/2}\right]\frac{b_i b_j}{b_k}\right\} =$$

$$= \tfrac{3}{2}(b_k n)^{1/2}\left\{\sum_{\substack{j\neq i\\ j=1}}^{k} b_k^{-1/2} b_j^{1/2} b_i - b_k^{-1/2} b_i^{1/2}(1-b_i)\right\} =$$

$$= \tfrac{3}{2} n^{1/2}\left(b_i\sum_{j=1}^{k} b_j^{1/2} - b_i^{1/2}\right) = a_i n^{1/2} \qquad (i = 1,2,\ldots,k-1),$$

gdzie

$$a_i = \tfrac{3}{2}\Big(b_i \sum_{j=1}^{k} b_j^{1/2} - b_i^{1/2}\Big) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1). \tag{11}$$

Tak otrzymujemy rozwiązanie przybliżone układu (6).

Rozwiązaniem zagadnienia postawionego na początku niniejszego paragrafu jest zatem

$$\begin{aligned} \bar{n}_i &= [b_i n + a_i n^{1/2}] \\ \bar{n}_k &= n - \sum_{i=1}^{k-1} \bar{n}_i \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1), \tag{12}$$

przy

$$\left|\frac{a_i\sqrt{n}}{b_i n}\right| < 1, \quad \left|\frac{\sum_{i=1}^{k-1} a_i}{b_i\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{a_k}{b_i\sqrt{n}}\right| < 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, k-1),$$

gdzie $[l]$ oznacza część całkowitą liczby l, liczby a_i należy wyrazić przez b_i według (11), a liczby b_i znowu przez c_i według (5).

3. W niniejszym paragrafie zajmiemy się błędami wzoru (12). Zrobimy to tylko dla przypadków $k = 2$ i $k = 3$, gdyż oszacowanie dla $k \geqslant 4$ jest bardzo trudne.

Wzór (6) w przypadku $k = 2$ ma postać

$$(b_2 n)^{1/6}\left[\left(\frac{b_2}{b_1}\right)^{1/2} - 1\right] + \tfrac{2}{3} b_2^{2/3} n^{-1/3}(b_1^{-1} + b_2^{-1})y + R(y) = 0, \tag{13}$$

gdzie

$$\begin{aligned} R(y) &= (b_2 n)^{2/3} \sum_{\nu=2}^{\infty} \binom{\frac{2}{3}}{\nu} \{b_1^{-\nu} - (-b_2)^{-\nu}\} \left(\frac{y}{n}\right)^{\nu} + \\ &\quad + n^{1/6} \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{6}}{\nu} \left\{\left(\frac{b_2}{b_1}\right)^{2/3} b_1^{1/6} b_1^{-\nu} - (b_2)^{1/6}(-b_2)^{-\nu}\right\} \left(\frac{y}{n}\right)^{\nu} = \\ &= (b_2 n)^{2/3} \sum_{\nu=2}^{\infty} \left|\binom{\frac{2}{3}}{\nu}\right| \{b_2^{-\nu} - (-b_1)^{-\nu}\} \left(\frac{y}{n}\right)^{\nu} + \\ &\quad + b_2^{2/3} n^{1/6} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\binom{\frac{1}{6}}{\nu}\right| \{b_2^{-\nu-1/2} - b_1^{-\nu-1/2}(-1)^{\nu}\} \left(\frac{y}{n}\right)^{\nu}, \end{aligned} \tag{14}$$

gdy $|y/nb_2| < 1$.

Łatwo zauważyć, że dla $y \geqslant 0$ $R(y)$ jest nieujemną funkcją niemalejącą. Stąd wynika $R(a\sqrt{n}) > 0$ (gdy $\frac{a\sqrt{n}}{nb_2} < 1$), gdzie $a = \frac{3}{2}(b_1 b_2^{1/2} - b_2 b_1^{1/2}) > 0$ przy $b_1 > b_2$. Rozpatrujemy teraz następujące równanie:

$$(b_2 n)^{1/6}\left[\left(\frac{b_2}{b_1}\right)^{1/2} - 1\right] + \frac{2}{3} b_2^{2/3} n^{-1/3}(b_1^{-1} + b_2^{-1})y + R(a\sqrt{n}) = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania jest

$$y_1' = \frac{3}{2}(b_1 b_2^{1/2} - b_1^{1/2} b_2) n^{1/2} - \frac{3}{2} b_1 b_2^{1/3} n^{1/3} R(a\sqrt{n}) =$$
$$= a\sqrt{n} - \frac{3}{2} b_1 b_2^{1/3} n^{1/3} R(a\sqrt{n}) < a\sqrt{n};$$

podstawiając y_1' do (13) otrzymujemy

$$-R(a\sqrt{n}) + R(y_1') \leqslant 0.$$

Stąd wynika, że prawdziwe rozwiązanie (13) znajduje się w przedziale $(y_1', a\sqrt{n})$ i że $a\sqrt{n} - y_1' = \frac{3}{2} b_1 b_2^{1/3} n^{1/3} R(a\sqrt{n})$. Żeby pokazać, jaki jest błąd wzoru (10) w przypadku $k = 2$, wystarczy zatem oszacować różnicę $a\sqrt{n} - y_1'$. Przy założeniu $\left|\frac{a\sqrt{n}}{b_2 n}\right| < 1$ mamy

$$R(a\sqrt{n}) \leqslant (b_2 n)^{2/3}\left(\frac{a\sqrt{n}}{b_2 n}\right)^2 \sum_{\nu=2}^{\infty} \left|\binom{\frac{2}{3}}{\nu}\right| \left|\left(\frac{a\sqrt{n}}{b_2 n}\right)^{\nu-2}\right| - (b_2 n)^{2/3}\left[\frac{1}{9}\left(\frac{a}{b_1\sqrt{n}}\right)^2 -\right.$$
$$\left. - \frac{4}{81}\left(\frac{a}{b_1\sqrt{n}}\right)^3\right] + b_2^{1/6} n^{1/6} \frac{a}{b_2\sqrt{n}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\binom{\frac{1}{6}}{\nu}\right| \left|\left(\frac{a\sqrt{n}}{b_2 n}\right)^{\nu-1}\right| +$$
$$+ \frac{1}{6}\left(\frac{b_2}{b_1}\right)^{2/3} (b_1 n)^{1/6} \frac{a}{b_1\sqrt{n}} \leqslant$$
$$\leqslant b_2^{-4/3} a^2 n^{-1/3}\left[\frac{10}{9} - \left(1 - \frac{a}{b_2 n}\right)^{2/3} - \frac{50}{81}\frac{a}{b_2\sqrt{n}} - \frac{5}{63}\left(\frac{a}{b_2\sqrt{n}}\right)^2\right] -$$
$$- \frac{5}{81}(b_2 n)^{2/3}\left(\frac{a}{b_1\sqrt{n}}\right)^2 +$$
$$+ b_2^{-5/6} a n^{-1/3}\left[\frac{7}{6} - \left(1 - \frac{a}{b_2\sqrt{n}}\right)^{1/6} - \frac{7}{72}\frac{a}{b_2\sqrt{n}} - \frac{1}{72}\left(\frac{a}{b_2\sqrt{n}}\right)^2\right] +$$

$$+\tfrac{1}{6}b_1^{-3/2}b_2^{2/3}an^{-1/3}\leqslant$$

$$\leqslant b_2^{-4/3}a^2n^{-1/3}\left[\tfrac{10}{9}-\tfrac{50}{81}-\tfrac{5}{63}\right]-\tfrac{5}{81}b_1^{-2}b_2^{2/3}a^2n^{-1/3}+$$

$$+b_2^{-5/6}an^{-1/3}\left[\tfrac{7}{6}-\tfrac{7}{72}-\tfrac{1}{72}\right]+\tfrac{1}{6}b_1^{-3/2}b_2^{2/3}an^{-1/3}\leqslant$$

$$\leqslant\tfrac{4}{9}b_2^{-4/3}a^2n^{-1/3}-\tfrac{5}{81}b_1^{-2}b_2^{2/3}n^{-1/3}+\tfrac{19}{18}b_2^{-5/6}an^{-1/3}+$$

$$+\tfrac{1}{6}b_2^{2/3}b_1^{-3/2}an^{-1/3}=$$

$$=b_1^{-1/3}n^{-1/3}[b_1(b_1^{1/2}-b_2^{1/2})^2-\tfrac{5}{36}b_1^{-1}b_2^2(b_1^{1/2}-b_2^{1/2})^2+$$

$$+\tfrac{19}{12}b_1^{1/2}(b_1^{1/2}-b_2^{1/2})+\tfrac{1}{4}b_2^{3/2}b_1^{-1}(b_1^{1/2}-b_2^{1/2})].$$

Mamy więc

$$a\sqrt{n}-y_1'=\tfrac{3}{2}n^{1/3}b_2^{1/3}b_1R(a\sqrt{n})\leqslant$$

$$\leqslant\tfrac{3}{2}b_1(b_1^{1/2}-b_2^{1/2})^2-\tfrac{5}{24}b_2^2(b_1^{1/2}-b_2^{1/2})^2+\tfrac{19}{8}b_1^{3/2}(b_1^{1/2}-b_2^{1/2})+$$

$$+\tfrac{3}{8}b_2^{3/2}(b_1^{1/2}-b_2^{1/2})\leqslant$$

$$\leqslant(b_1^{1/2}-b_2^{1/2})\left[\tfrac{3}{2}b_1+\tfrac{19}{8}b_1\right]+\tfrac{3}{8}(b_1^{1/2}-b_2^{1/2})b_2^{3/2}\leqslant$$

$$\leqslant(b_1^{1/2}-b_2^{1/2})\left(\tfrac{31}{8}b_1+\tfrac{3}{8}b_2^{3/2}\right)\leqslant 4$$

(bo $b_2<\frac{1}{2}$).

Wynik ten pokazuje, że bez względu na n i c_1, c_2 błąd wzoru (12), w przypadku $k=2$, nie przekracza 4. Gdy n jest dość duże, co w praktyce często się zdarza, błąd wzoru (12) można zaniedbać.

Rozpatrzmy teraz przypadek $k=3$. Trudno byłoby w tym przypadku zbadać dokładność rozwiązania (12) tak jak w przypadku $k=2$. Ale możemy dowieść, że gdy n jest dostatecznie duże, to rozwiązanie równań (6) znajduje się w pewnych obszarach. W ten sposób oszacujemy błąd rozwiązania (12) dla dostatecznie dużych n.

Gdy $b_1=b_2=b_3=\frac{1}{3}$, to dokładne rozwiązanie jest $n_1=n_2=n_3=\frac{1}{3}n$. Zakładamy więc $b_1\neq\frac{1}{3}$.

Dla $k=3$ mamy rozwiązać układ równań

$$\left(\frac{b_3}{b_i}\right)^{2/3}[(b_in+y_i)^{2/3}+(b_in+y_i)^{1/6}]-(b_3n-y_1-y_2)^{2/3}-$$

$$-(b_3n-y_1-y_2)^{1/6}=0\qquad(i=1,2),$$

czyli układ

$$(15)\quad \begin{aligned} F_{1n}(x,y) &= \left(\frac{b_3}{b_1}\right)^{2/3}[(b_1n+x)^{2/3}+(b_1n+x)^{1/6}]-(b_3n-x-y)^{2/3}-\\ &\qquad -(b_3n-x-y)^{1/6}=0,\\ F_{2n}(x,y) &= \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^{2/3}[(b_1n+x)^{2/3}+(b_1n+x)^{1/6}]-\\ &\qquad -(b_2n+y)^{2/3}-(b_2n+y)^{1/6}=0. \end{aligned}$$

Załóżmy, że

$$\left|\frac{x}{b_1n}\right|<1,\quad \left|\frac{y}{b_2n}\right|<1,\quad \left|\frac{x+y}{b_3n}\right|<1.$$

Rozwijając $F_{1n}(x,y)$, $F_{2n}(x,y)$ w szereg otrzymujemy

$$F_{1n}(x,y) = (nb_3)^{1/6}\left[\left(\frac{b_3}{b_1}\right)^{1/2}-1\right]+\tfrac{2}{3}n^{-1/3}b_3^{2/3}[(b_1^{-1}+b_3^{-1})x+b_3^{-1}y]+ +R_{1n}(x,y),$$

$$F_{2n}(x,y) = (nb_2)^{1/6}\left[\left(\frac{b_2}{b_1}\right)^{1/2}-1\right]+\tfrac{2}{3}n^{-1/3}b_2^{2/3}(b_1^{-1}x-b_2^{-1}y)+R_{2n}(x,y),$$

gdzie

$$R_{1n}(x,y) = (b_3n)^{2/3}\sum_{\nu=2}^{\infty}\binom{\frac{2}{3}}{\nu}\left[\left(\frac{x}{b_1n}\right)^{\nu}-\left(\frac{-x-y}{b_3n}\right)^{\nu}\right]+ +b_3^{2/3}n^{1/6}\sum_{\nu=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{6}}{\nu}\left[\left(\frac{x}{b_1n}\right)^{\nu}b_1^{-1/2}-\left(\frac{-x-y}{b_3n}\right)^{\nu}b_3^{-1/2}\right],$$

$$R_{2n}(x,y) = (b_2n)^{2/3}\sum_{\nu=2}^{\infty}\binom{\frac{2}{3}}{\nu}\left[\left(\frac{x}{b_1n}\right)^{\nu}-\left(\frac{y}{b_2n}\right)^{\nu}\right]+ +b_2^{2/3}n^{1/6}\sum_{\nu=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{6}}{\nu}\left[\left(\frac{x}{b_1n}\right)^{\nu}b_1^{-1/2}-\left(\frac{y}{b_2n}\right)^{\nu}b_2^{-1/2}\right].$$

Podstawiając do wzoru (15) $a_1\sqrt{n}$, $a_2\sqrt{n}$, gdzie $a_i=\frac{3}{2}\left(b_i\sum_{j=1}^{3}b_j^{1/2}-b_i^{1/2}\right)$, $i=1,2,3$, zamiast x, y otrzymujemy

$$(16)\quad \begin{aligned} F_{1n}(a_1n^{1/2},a_2n^{1/2}) &= R_{1n}(a_1n^{1/2},a_2n^{1/2}) = \beta_1n^{-1/3}+O(n^{-5/6}),\\ F_{2n}(a_1n^{1/2},a_2n^{1/2}) &= R_{2n}(a_1n^{1/2},a_2n^{1/2}) = \beta_2n^{-1/3}+O(n^{-5/6}), \end{aligned}$$

gdzie

$$\beta_1 = \tfrac{1}{2}b_3^{2/3}(b_3^{-1}-b_1^{-1}) - \tfrac{3}{4}b_3^{2/3}\sum_{j=1}^{3} b_j^{1/2}(b_3^{-1/2}-b_1^{-1/2}),$$

$$\beta_2 = \tfrac{1}{2}b_2^{2/3}(b_2^{-1}-b_1^{-1}) - \tfrac{3}{4}b_2^{2/3}\sum_{j=1}^{3} b_j^{1/2}(b_2^{-1/2}-b_1^{-1/2}).$$

Jest

$$R_{1n}(a_1n^{1/2}+d_1,\ a_2n^{1/2}+d_2) = \beta_1 n^{-1/3}+O(n^{-5/6}),$$

$$R_{2n}(a_1n^{1/2}+d_1,\ a_2n^{1/2}+d_2) = \beta_2 n^{-1/3}+O(n^{-5/6})$$

dla stałych d_1, d_2 (niezależnych od n). Aby w (16) znikał składnik $n^{-1/3}$, wystarczy zatem wziąć przybliżone rozwiązanie

$$x' = a_1\sqrt{n}+d_1, \qquad y' = a_2\sqrt{n}+d_2$$

tak, żeby było

$$\tfrac{2}{3}b_3^{2/3}[(b_1^{-1}+b_3^{-1})d_1+b_3^{-1}d_2] = -\beta_1,$$

$$\tfrac{2}{3}b_2^{2/3}(b_1^{-1}d_1-b_2^{-1}d_2) = -\beta_2,$$

czyli

$$d_i = -\tfrac{3}{4}(3b_i-1)-\tfrac{9}{8}\sum_{j=1}^{3} b_j^{1/2}\Big(b_i\sum_{j=1}^{3} b_j^{1/2}-b_i^{1/2}\Big) \qquad (i=1,2).$$

Mamy więc inne rozwiązanie przybliżone. Będzie

$$F_{1n}(a_1n^{1/2}+d_1,\ a_2n^{1/2}+d_2) = O(n^{-5/6}),$$

$$F_{2n}(a_1n^{1/2}+d_1,\ a_2n^{1/2}+d_2) = O(n^{-5/6}).$$

Ocenimy teraz rozwiązania (12), gdy $k=3$. Najpierw udowodnimy

LEMAT. *Niech $G_1(x,y)$ będzie funkcją rosnącą zmiennych x i y, a $G_2(x,y)$ dla ustalonego y funkcją rosnącą x i dla ustalonego x funkcją malejącą y.*

Jeżeli $G_1(x_0,y_0)=0$, $G_2(x_0,y_0)=0$ i istnieją $(x_1,\bar{y}_1)$, $(x_2,\bar{y}_2)$, $(\bar{x}_1,y_1)$, $(\bar{x}_2,y_2)$ takie, że

$$\begin{aligned} &G_1(x_1,\bar{y}_1)\geqslant 0, && G_2(x_1,\bar{y}_1)\geqslant 0,\\ &G_1(x_2,\bar{y}_2)\leqslant 0, && G_2(x_2,\bar{y}_2)\leqslant 0,\\ &G_1(\bar{x}_1,y_1)\geqslant 0, && G_2(\bar{x}_1,y_1)\leqslant 0,\\ &G_1(\bar{x}_2,y_2)\leqslant 0, && G_2(\bar{x}_2,y_2)\geqslant 0, \end{aligned}$$

to

$$x_2\leqslant x_0\leqslant x_1, \qquad y_2\leqslant y_0\leqslant y_1.$$

Dowód. Jeżeli $x_0 > x_1$, to z założenia łatwo wynika, że $G_1(x_0, \bar{y}_1) > 0$, $G_2(x_0, \bar{y}_1) > 0$, a więc zachodzą następujące nierówności: $\bar{y}_1 < y_0 < \bar{y}_1$. To jest sprzeczne. A zatem $x_0 \leqslant x_1$. Zupełnie w ten sam sposób możemy dowieść, że

$$x_2 \leqslant x_0, \quad y_2 \leqslant y_0 \quad \text{i} \quad y_0 \leqslant y_1,$$

czyli

$$x_2 \leqslant x_0 \leqslant x_1, \quad y_2 \leqslant y_0 \leqslant y_1,$$

czego należało dowieść.

$$\begin{aligned} F_{1n}(a_1 n^{1/2}, a_2 n^{1/2} + d_2) &= (\beta_1 + \tfrac{2}{3} b_3^{-1/3} d_2) n^{-1/3} + O(n^{-5/6}) = \\ &= -\tfrac{2}{3} b_3^{2/3} (b_1^{-1} + b_3^{-1}) d_1 n^{-1/3} + O(n^{-5/6}), \\ F_{2n}(a_1 n^{1/2}, a_2 n^{1/2} + d_2) &= (\beta_2 - \tfrac{2}{3} b_2^{-1/3} d_2) n^{-1/3} + O(n^{-5/6}) = \\ &= -\tfrac{2}{3} b_2^{2/3} b_1^{-1} d_1 n^{-1/3} + O(n^{-5/6}), \end{aligned}$$

$$F_{1n}(a_1 n^{1/2} + d_1 - b_3, a_2 n^{1/2} + d_2) = -\tfrac{2}{3} b_3^{2/3} \left(1 + \frac{b_3}{b_1}\right) n^{-1/3} + O(n^{-5/6})$$

$$F_{2n}(a_1 n^{1/2} + d_1 - b_3, a_2 n^{1/2} + d_2) = -\tfrac{2}{3} b_2^{2/3} b_3 b_1^{-1} n^{-1/3} + O(n^{-5/6}).$$

Jeżeli $d_2 \neq 0$, to

$$\begin{aligned} F_{1n}(a_1 n^{1/2} + d_1, a_2 n^{1/2}) &= [\beta_1 + \tfrac{2}{3} b_3^{2/3} (b_1^{-1} + b_3^{-1}) d_1] n^{-1/3} + O(n^{-5/6}) = \\ &= -\tfrac{2}{3} b_3^{-1/3} d_2 n^{-1/3} + O(n^{-5/6}), \\ F_{2n}(a_1 n^{1/2} + d_1, a_2 n^{1/2}) &= (\beta_2 + \tfrac{2}{3} b_2^{2/3} b_1^{-1} d_1) n^{-1/3} + O(n^{-5/6}) = \\ &= \tfrac{2}{3} b_2^{-1/3} d_2 n^{-1/3} + O(n^{-5/6}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{1n}(a_1 n^{1/2} + d_1, a_2 n^{1/2} + d_2 + \varepsilon b_3) &= \tfrac{2}{3} \varepsilon b_3^{2/3} n^{-1/3} + O(n^{-5/6}), \\ F_{2n}(a_1 n^{1/2} + d_1, a_2 n^{1/2} + d_2 + \varepsilon b_3) &= -\tfrac{2}{3} \varepsilon b_2^{-1/3} b_3 n^{-1/3} + O(n^{-5/6}), \end{aligned}$$

gdzie

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad d_2 > 0, \\ -1 & \text{dla} \quad d_2 < 0. \end{cases}$$

Dla $d_2 = 0$ jest

$$\begin{aligned} F_{1n}(a_1 n^{1/2} + d_1, a_2 n^{1/2} + b_3) &= \tfrac{2}{3} b_3^{2/3} n^{-1/3} + O(n^{-5/6}), \\ F_{2n}(a_1 n^{1/2} + d_1, a_2 n^{1/2} + b_3) &= -\tfrac{2}{3} b_2^{-1/3} b_3 n^{-1/3} + O(n^{-5/6}), \\ F_{1n}(a_1 n^{1/2} + d_1, a_2 n^{1/2} - b_3) &= -\tfrac{2}{3} b_3^{2/3} n^{-1/3} + O(n^{-5/6}), \\ F_{2n}(a_1 n^{1/2} + d_1, a_2 n^{1/2} - b_3) &= \tfrac{2}{3} b_2^{-1/3} b_3 n^{-1/3} + O(n^{-5/6}). \end{aligned}$$

Ponieważ

$$a_1 = \tfrac{3}{2}\Big(b_1 \sum_{j=1}^{3} b_j^{1/2} - b_1^{1/2}\Big) = \tfrac{3}{2} \sum_{j=1}^{3} b_1^{1/2} b_j^{1/2} (b_1^{1/2} - b_j^{1/2}) > 0,$$

$$d_1 = -\tfrac{3}{4}(3b_1 - 1) - \tfrac{9}{8} \sum_{j=1}^{3} b_j^{1/2} a_1 < 0,$$

więc gdy n jest dosyć duże, to $F_{1n}(x, y)$, $F_{2n}(x, y)$ spełniają warunki lematu, jak łatwo zobaczyć. Z lematu wiemy, że dokładne rozwiązanie (x_0, y_0) równań (15), gdy n jest dosyć duże, znajduje się w obszarze

$$\{(x, y):\ a_1 n^{1/2} + d_1 - b_3 \leqslant x \leqslant a_1 n^{1/2},\ a_2 n^{1/2} + d_2 - b_3 \leqslant y \leqslant a_2 n^{1/2}\},$$

$$\text{gdy } d_2 < 0,$$

$$\{(x, y):\ a_1 n^{1/2} + d_1 - b_3 \leqslant x \leqslant a_1 n^{1/2},\ a_2 n^{1/2} \leqslant y \leqslant a_2 n^{1/2} + d_2 + b_3\},$$

$$\text{gdy } d_2 > 0,$$

$$\{(x, y):\ a_1 n^{1/2} + d_1 - b_3 \leqslant x \leqslant a_1 n^{1/2},\ a_2 n^{1/2} - b_3 \leqslant y \leqslant a_2 n^{1/2} + b_3\},$$

$$\text{gdy } d_2 = 0.$$

Wobec tego, gdy n jest dosyć duże, błąd rozwiązania (12) dla $\overline{n}_1$ nie przekracza 3, bo

$$-d_1 + b_3 = \tfrac{3}{4}(3b_1 - 1) + \tfrac{9}{8} \sum_{j=1}^{3} b_j^{1/2} \Big(b_1 \sum_{j=1}^{3} b_j^{1/2} - b_1^{1/2}\Big) + b_3 \leqslant$$

$$\leqslant \tfrac{3}{4}(3b_1 - 1) \tfrac{9}{8} \sqrt{3}\,(\sqrt{3} - 1) b_1 + b_3 < 3;$$

dla $\overline{n}_2$, gdy $d_2 \neq 0$, nie przekracza 3, bo

$$1 + |d_2 + \varepsilon b_3| = 1 + \Big|\tfrac{3}{4}(3b_2 - 1) + \tfrac{9}{8} \sum_{j=1}^{3} b_j^{1/2} \Big(b_2 \sum_{j=1}^{3} b_j^{1/2} - b_2^{1/2}\Big) + \varepsilon b_3\Big| \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \tfrac{3}{4} + \tfrac{9}{8} < 3 \quad (\text{bo } b_2 \leqslant \tfrac{1}{2}),$$

gdy $d_2 = 0$ nie przekracza $1 + 2b_3 \leqslant 1{,}7$.

Dla ilustracji proponowanej metody przybliżonego wyznaczania liczb $n_1, n_2, \ldots, n_k$ rozpatrzymy przykład $k = 3$, $n = 100$, $c_1 = 0{,}5$, $c_2 = 0{,}3$, $c_3 = 0{,}2$. Mamy więc znaleźć podział stu obserwacji na trzy zmiany, gdy strata spowodowana niedokładnością estymacji $\overline{p}_i$ wyzyskania czasu p_i na i-tej zmianie $(i = 1, 2, 3)$ jest proporcjonalna do $c_i(\overline{p}_i - p_i)^2$.

W tym celu znajdujemy najpierw z wzoru (5) wielkości

$$b_1 = \frac{\sqrt{0,5}}{\sqrt{0,5}+\sqrt{0,3}+\sqrt{0,2}} = 0,4155, \quad b_2 = \frac{\sqrt{0,3}}{\sqrt{0,5}+\sqrt{0,3}+\sqrt{0,2}} = 0,3218,$$

$$b_3 = \frac{\sqrt{0,1}}{\sqrt{0,5}+\sqrt{0,3}+\sqrt{0,2}} = 0,2627.$$

Następnie z wzoru (11) obliczamy

$$a_1 = \tfrac{3}{2}[0,4155(0,4155^{1/2}+0,3218^{1/2}+0,2627^{1/2})-0,4155^{1/2}] = 0,1077,$$

$$a_2 = -0,0186, \quad a_3 = -0,0891$$

i z wzoru (12) otrzymujemy $\bar{n}_1 = 52$, $\bar{n}_2 = 30$, $\bar{n}_3 = 18$.

Aby przekonać się o dokładności proponowanej metody przybliżonej, obliczyliśmy jeszcze kilka przykładów, w których liczby $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3$ można było porównać z dokładnymi rozwiązaniami n_1, n_2, n_3. Aby uzyskać takie przykłady, rozpoczynaliśmy rachunek od dogodnie obranych liczb n_1, n_2, n_3 (np. $n_1 = 16$, $n_2 = 9$, $n_3 = 1$). Następnie rozwiązując układ równań (4) obliczyliśmy stałe c_1, c_2, c_3 (z dokładnością do stałego współczynnika), a z nich liczby b_1, b_2, b_3. Dalej postępując jak w powyższym przykładzie, obliczaliśmy przybliżone ilości obserwacji $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3$. Wyniki sześciu takich porównań, przedstawione w poniższej tablicy, wykazują dużą zgodność liczb $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3$ z dokładnymi n_1, n_2, n_3.

n = ogólna ilość obserwacji	b_i			$\bar{n}_i$ = ilość obserwacji dla i-tej zmiany obliczona z wzoru (14)			n_i = dokładna ilość obserwacji dla i-tej zmiany		
	b_1	b_2	b_3	$\bar{n}_1$	$\bar{n}_2$	$\bar{n}_3$	n_1	n_2	n_3
26	0,573	0,355	0,072	16	9	1	16	9	1
51	0,493	0,493	0,014	25	25	1	25	25	1
105	0,9187	0,0585	0,0228	101	3	1	100	4	1
677	0,3766	0,3324	0,2910	256	224	197	256	225	196
1010	0,7108	0,2588	0,0304	729	255	26	729	256	25
10000	0,82878	0,12496	0,04625	8334	1224	442	8334	1225	441

Prace cytowane

[1] H. Białek i S. Baumann, *Normowanie pracy metodą obserwacji migawkowych*, Studia i Materiały 105 (1957).

[2] L. H. C. Tippett, *Statistical Methods in Textile Research Uses of the Binomial and Poisson Distributions, A Snap-Reading Method of Making Time studies of Machines and operatives in Factory Surveys*, Shirley Institute Memoirs 13 (1934), str. 35-93.

[3] H. Steinhaus, *The Problem of Estimation*, Annals of Math. Statistics 28 (3) (1957).

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
I UNIWERSYTET WROCŁAWSKI

Praca wpłynęła 5. 6. 1959

ЧЕНЬ-ПИНЬ и ДЗАН ДЗО-И (Вроцлав)

О РАЗДЕЛЕНИИ КОЛИЧЕСТВА НАБЛЮДЕНИЙ ПРИ ПРИМЕНЕНИИ МГНОВЕННОГО МЕТОДА

РЕЗЮМЕ

Мгновенный метод служит оценке времени, используемого на работу по формуле Рубина

$$\bar{p} = \frac{m+\frac{1}{2}\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}},$$

где n — число наблюдений, m — число тех наблюдений, в которых рабочий трудился. Математическое ожидание квадрата ошибки при пользовании этим методом равняется

$$E(\bar{p}-p)^2 = \frac{1}{4(1+\sqrt{n})^2}.$$

Пусть теперь завод работает в k смен при разном числе рабочих в каждой из них. Применяя мгновенный метод, делаем n_i наблюдений в i-ой смене. Предполагается, что общая потеря, вызванная ошибками оценки неизвестных параметров p_i выражается суммой квадратов отклонений $\bar{p}_i-p_i$, умноженных на известные коэффициенты c_i. Таким образом ожиданная потеря $E(S)$ вычисляется по формуле

$$E(S) = \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{4(1-\sqrt{n_i})^2}.$$

Авторы рассматривают задачу оптимального разделения общего количества наблюдений n по сменам ($n = n_1+n_2+\ldots+n_k$), при которых ожиданная потеря $E(S)$ достигает своего минимума.

Авторы нашли формулу, (12), которая дает приближенное решение поставленной задачи. Ошибка этого приближения оценена в работе для $k = 2, 3$. Примеры вычислений и сравнения приближенных результатов с точными указаны в таблице, приведенной в конце работы.

CZEN PIN and DZAN DZO-I (Wrocław)

ON THE DIVISION OF THE NUMBER OF OBSERVATIONS BY USING THE RATIO-DELAY METHOD

SUMMARY

The Ratio-Delay method estimates the working time of workers with the aid of Rubin's formula

$$\bar{p} = \frac{m+\frac{1}{2}\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}},$$

where n is the number of observations, m is the number of positive observations. The expected value of the square error of this estimation is

$$E(\bar{p}-p)^2 = \frac{1}{4(1+\sqrt{n})^2}.$$

Let us assume now that the factory works in k shifts and there are different numbers of workers in each shift. Using the Ratio-Delay method we make n_i observations during the i-th shift. We suppose that the total loss caused by the random errors of the estimations of unknown parameters p_i is equal to the sum of the squares of differences $\bar{p}_i - p_i$ with the given coefficients c_i. The expected loss $E(S)$ is then

$$E(S) = \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{4(1-\sqrt{n_i})^2}.$$

The authors discuss the problem of optimal division of the total number of observations n into k shifts ($n = n_1+n_2+\ldots+n_k$) in order to minimize the expected loss $E(S)$. The formula (12) gives the approximation of the solution of this problem. The error of this approximation is estimated for $k = 2, 3$. Some examples are calculated and compared with the exact solutions.