ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
XV, 1 (1976)

М. РИДЭЛЬ (Лейпциг)

УСЛОВИЯ СТАЦИОНАРНОСТИ В ОДНОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

1. Введение. Эта работа основывается на работе [1]. Рассматриваем одноканальную систему массового обслуживания, в которой вызовы поступают поодиночно и обслуживаются в порядке их поступления. Обозначим моменты поступления k-ого вызова в систему через t_k $(k = 1, 2, \ldots)$, а время его обслуживания через S_k. Введем функцию $K(t)$, называемую *загрузкой системы*, которая является суммой всех времен обслуживания вызовов, поступлющих в систему на интервале $[0, t)$ (см. [1], стр. 2-3). Таким образом

$$K(t) = \sum_{k=1}^{n} S_k + K(0), \quad \text{если } t_n \leqslant t < t_{n+1}.$$

Характеристикой системы является так называемое *виртуальное время ожидания* $W(t)$: оно определяется как время, необходимое для освобождения системы от вызовов пришедших до момента времени t. Конечно, надо положить $W(0) = K(0)$.

В. Бенеш получил следующий результат о распределении виртуального времени ожидания:

Теорема 1.1. *Распределение* $W(t)$ *удовлетворяет уравнению*

$$P\big(W(t) \leqslant w\big) = P\big(K(t) \leqslant w+t\big) - \frac{\partial}{\partial w}\int_0^t R(t, u, w) P\big(W(u) = 0\big) du \quad \text{при } w > 0$$

и уравнению

$$M\max\big(0, t+w-K(t)\big) = \int_0^{t+w} R(t, u, w) P\big(W(u) = 0\big) du \quad \text{при } -t \leqslant w \leqslant 0, \tag{1}$$

где

$$R(t, u, w) = P\big(K(t) - K(u) \leqslant w+t-u \mid W(u) = 0\big). \tag{2}$$

Примем следующие предположения, которые будут использованы во всей работе, кроме теоремы 5.1 и следствия 5.1 (см. [1], стр. 49):

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{MK(t)}{t} < \infty,$$

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\big(K(t)-K(0) \leqslant w\big) = 0 \quad \text{для всех } w$$

уравнение

$$\tau - s = a(s) \tag{3}$$

при $\tau > 0$ имеет положительное решение, где $a(s)$ является абсциссой сходимости

$$\int_0^\infty \exp[-\tau t] M \exp\big[-s[K(t)-K(0)]\big]\, dt$$

и (2) зависит не только от $t-u$, а также от w, а именно $R(t, u, w) = R(t-u, w)$.

Надо заметить, что условие (3) выполняется, если (см. [1], стр. 55)

$$\underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\mathrm{P}\big(K(t) = 0\big)}{t} > -\infty.$$

Обозначим через $s(\tau)$ наименьшее положительное решение уравнения (3). Интенсивность системы массового обслуживания ϱ определяется как предел:

$$\varrho = \lim_{s\to 0}\left(-\frac{a(s)}{s}\right).$$

Определение величины ϱ справедливо, так как этот предел существует. Кроме того нам понадобятся свойства функций $a(s)$ и $s(\tau)$.

Лемма 1.1. *Функция $a(s)$ при $s > 0$ непрерывна, убывающая и выпуклая. Функция $s(\tau)$ при $\tau > 0$ непрерывна и неубывающая.*

Доказательство см. [1], стр. 53-55.

2. Преобразование Лапласа для вероятности $\mathrm{P}\big(W(t) = 0\big)$ и распределение первого периода занятости. Рассмотрим предположение, что

(4) $K(t)-K(0)$ и $W(0)$ независимы при $t > 0$.

Теорема 2.1. *Если* (4) *выполняется, то*

$$\int_0^\infty e^{-\tau t} \mathrm{P}\big(W(t) = 0\big) dt = \frac{Me^{-s(\tau)W(0)}}{s(\tau)} \quad \textit{при } \tau > 0.$$

В. Бенеш доказал эту теорему без предположения (4), а при предположении, что $W(0) = 0$ (см. [1], стр. 58, теоремы 4.4). Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.3 в [1], стр. 57-58.

Пусть Z первый период занятости. Рассмотрим теперь предположение использовано Бенешем (см. [1], стр. 81). Система массового обслуживания исполняет слабое условие Маркова

$$(5)\quad \begin{aligned} &M\big(\exp\big[-s[K(t)-t]\big] \mid Z = u\big) = \\ &\quad = M\big(\exp\big[-s[K(t)-K(u)-(t-u)]\big] \mid W(u) = 0\big), \qquad \operatorname{Re} s > 0\,. \end{aligned}$$

Получаем следующий результат о распределении первого периода занятости:

Теорема 2.2. *При выполнении условий* (4) *и* (5) *получаем* $Me^{-\tau Z} = Ee^{-s(\tau)W(0)}$.

Доказательство сразу следует из теоремы 2.1 и из теоремы 6.1 в [1], стр. 82.

3. Существование стационарного распределения виртуального времени ожидания. Мы исследуем существование стационарного распределения $F(x)$ виртуального времени ожидания, которое имеет следующее свойство:

$$\mathrm{P}\big(W(t) \leqslant x\big) = \mathrm{P}\big(W(0) \leqslant x\big) = F(x)\,.$$

Теорема 3.1. *Пусть условие* (4) *выполнено. Для того, чтобы существовало стационарное распределение виртуального времени ожидания необходимо и достаточно, чтобы было* $\varrho < 1$ *и загрузка* $K(t)$ *являлась процессом с независимыми и стационарными приращениями. В этом случае получаем*

$$\varrho = \lim_{t\to\infty} \frac{MK(t)}{t}\,.$$

Доказательство. Предположим сначала, что существует стационарное распределение. Тогда в силу теоремы 2.1 находим

$$(6)\qquad Me^{-s(\tau)W(0)} = \frac{s(\tau)}{\tau}\mathrm{P}\big(W(0) = 0\big)\,.$$

Правая часть равенства (6) положительна, откуда получаем $\mathrm{P}\big(W(0) = 0\big) > 0$. Если бы было $\varrho \geqslant 1$, мы бы получили противоречие при переходе к пределу при $\tau \to 0$. Таким образом следует $\varrho < 1$. Используя теорему 1.1 получим

$$(7)\quad \begin{aligned} &\int_0^\infty \exp[-\tau t]\exp[-sW(t)]\,dt = \\ &\quad = \int_0^\infty \exp[-(\tau - s)t]M\exp\big[-s[K(t)-K(0)]\big]\,dt \times \\ &\qquad \times\Big(M\exp[-sW(0)] - s\int_0^\infty \exp[-\tau t]\mathrm{P}\big(W(t) = 0\big)\,dt\Big)\,. \end{aligned}$$

Уравнение (7) в силу существования стационарного распределения упрощается и получает вид

$$\int_0^\infty \exp[-\tau t] M \exp\big[-s[K(t)-K(0)]\big]\,dt = \frac{1}{\tau - s - a(s)}.$$

И так мы получаем равенство

$$M\exp\big[-s[K(t)-K(0)]\big] = \exp[ta(s)].$$

Отсюда следует, что загрузка $K(t)$ является процессом с независимыми и стационарными приращениями.

Оказывается, что стационарное распределение является и граничным распределением.

Теорема 3.2. *Пусть выполняется условие* (4). *Если существует стационарное распределение виртуального времени ожидания, то существует и граничное распределение и оба распределения равны.*

Доказательство. Из теоремы 11 в [2], стр. 42, следует, что

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\big(W(t) = 0\big)$$

существует. Отсюда и из теоремы 5.10 в [1], стр. 74, следует утверждение.

4. Предельное поведение вероятности $\mathrm{P}\big(W(t) = 0\big)$. В этом разделе будем рассматривать существование предела в смысле $(C, 1)$.

Теорема 4.1. *Если выполняется* (4), *то существует*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{P}\big(W(u) = 0\big)\,du = \max(0, 1-\varrho).$$

В. Бенеш доказал эту теорему без (4), но в предположении, что $W(0) = 0$. Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.8 в [1], стр. 61.

Теорема 4.2. *Если*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M\max\big(0, t-K(t)\big)}{t} = A, \qquad \lim_{t\to\infty} R(t, 0) = R > 0,$$

то

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{P}\big(W(u) = 0\big)\,du = \frac{A}{R}.$$

Доказательство. Обозначим вероятность $\mathrm{P}\big(W(t) = 0\big)$ через $m(t)$ и $M\max\big(0, t-K(t)\big)$ через $F(t)$. Для заданного $\varepsilon > R > 0$ мы можем выбрать t_0 так, чтобы

$$(8) \qquad |R - R(t, 0)| < \varepsilon \quad \text{при } t > t_0.$$

В силу теоремы 1.1 из уравнения (1) при $w = 0$ получаем

$$F(t) = \int_0^t m(u)R(t-u, 0)\,du. \tag{9}$$

Из (8) и (9) сразу следует

$$(R-\varepsilon)\frac{1}{t}\int_0^{t-t_0} m(u)R(t-u, 0)\,du \leqslant \frac{F(t)}{t} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{t_0}{t} + (R+\varepsilon)\frac{1}{t}\int_0^t m(u)R(t-u, 0)\,du.$$

После перехода к верхнему и нижнему пределам при $t\to\infty$ получаем утверждение.

Теорема 4.2 более общая чем теорема 5.2 в [1], стр. 67.

5. Суммарные времена простоев до момента t. Рассмотрим суммарные времена простоев в интервале $[0, t)$, который обозначим через $T(t)$, т.е.

$$T(t) = \int_0^t \mathrm{I}\big(W(u) = 0\big)\,du, \qquad \textit{где } \mathrm{I}\big(A(\omega)\big) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in A, \\ 0, & \text{если } \omega \notin A. \end{cases}$$

Траектории процесса $T(t)$ неубывающие и непрерывные. Имеем $0 \leqslant T(t) \leqslant t$.

Теорема 5.1. *Преобразование Лапласа распределения $T(t)$ удовлетворяет уравнению*

$$Me^{-sT(t)} = 1 - s\int_0^t \mathrm{P}\big(W(u) = 0\big)\,du + \ldots + \tag{10}$$

$$+(-1)^n s^n \int\limits_{0<u_1<\ldots<u_n<t} \mathrm{P}\big(W(u_1) = 0, \ldots, W(u_n) = 0\big)\,du_1 \ldots du_n + \ldots$$

Доказательство. Для заданного t процесс $T(t)$ является ограниченной случайной величиной. Таким образом распределение $T(t)$ определено своими моментами. Имеем

$$T^n(t) = \int\limits_{[0,t]^n} \mathrm{I}\big(W(u_1) = 0, W(u_2) = 0, \ldots, W(u_n) = 0\big)\,du_1 du_2 \ldots du_n,$$

итак

$$MT^n(t) =$$

$$= n! \int\limits_{0<u_1<\ldots<u_n<t} \mathrm{P}\big(W(u_1) = 0, W(u_2) = 0, \ldots, W(u_n) = 0\big)\,du_1 du_2 \ldots du_n,$$

откуда следует утверждение (10).

Обозначим через E_0 состояние системы массового обслуживания, когда обслуживающее устройство не работает по причине отсутствия вызовов. E_0 состовляет однородное состояние Маркова, т.е.

$$(11) \quad \mathrm{P}\big(W(u_n)=0 \mid W(u_{n-1})=0,\ldots,W(u_1)=0\big)=$$
$$\mathrm{P}\big(W(u_n)=0 \mid W(u_{n-1})=0\big)=\mathrm{P}\big(W(u_n-u_{n-1})=0 \mid W(0)=0\big),$$
$$0<u_1<u_2<\ldots<u_n.$$

Теорема 5.2. *При выполнении условия* (11) *имеем следующее уравнение*:

$$(12) \quad \int_0^\infty e^{-\tau t} M e^{-sT(t)}\,dt=\frac{1}{\tau}\left(1-\frac{s\int_0^\infty e^{-\tau t}\mathrm{P}\big(W(t)=0\big)dt}{1+s\int_0^\infty e^{-\tau t}\mathrm{P}\big(W(t)=0 \mid W(0)=0\big)dt}\right).$$

Доказательство. В силу (1.1) и теоремы 5.1 получаем

$$(13) \quad Me^{-sT(t)}=1-s\int_0^t \mathrm{P}\big(W(u)=0\big)du+\ldots+$$
$$+(-1)^n s^n\int_0^t P_{n-1}(u)*\mathrm{P}\big(W(u)=0\big)du+\ldots,$$

где $P(t)=\mathrm{P}\big(W(t)=0 \mid W(0)=0\big)$, и $P_n(t)$ является n-сверткой,

$$P_n(t)=\int_0^t P_{n-1}(t-u)P(u)\,du,\ n=2,3,\ldots,\qquad P_1(t)=P(t).$$

Для заданного $s>0$ мы можем выбрать τ так, что $s\Pi(\tau)<1$ при $\tau>\tau_0$, где $\Pi(\tau)$ преобразование Лапласа $P(t)$, т.е.

$$\Pi(\tau)=\int_0^\infty e^{-\tau t}P(t)\,dt.$$

Пусть $\Pi_1(\tau)$ является преобразованием Лапласа или

$$\Pi_1(\tau)=\int_0^\infty e^{-\tau t}P\big(W(t)=0\big)dt.$$

Отсюда ряд

$$1-s\Pi_1(\tau)+s^2\Pi_1(\tau)\Pi(\tau)+\ldots+(-1)^n s^n\Pi_1(\tau)\Pi^{n-1}(\tau)+\ldots$$

сходится абсолютно, поэтому возможна замена порядка интегрирования и суммирования, что дает в силу (13) утверждение для $\tau>\tau_0$. Преобразование Лапласа левой части уравнения (12) имеет абсциссу сходимости $\leqslant 0$ и в области существования является аналитическим. Правая часть есть аналитической функцией в области $\operatorname{Re}\tau>0$. Итак в совместной части имеет место равенство.

Следствие 5.1. *Если* $W(0)=0$ *и выполняется условие* (11), *то*

$$\int_0^\infty e^{-\tau t} M e^{-sT(t)} dt = \frac{1}{\tau} \frac{1}{1+s\int_0^\infty e^{-\tau t} \mathrm{P}(W(t)=0)dt}.$$

Следствие 5.2. *При выполнении* (4) *и* (11), *а также* $W(0)=0$, *имеем*

$$\mathrm{P}(T(t)\geqslant x) = \mathrm{P}(Z<t \mid W(0)=x),$$

где Z *первый период занятости.*

Замечание. Этот известный результат справедливый тоже без предположений (4) и (11).

Доказательство. Имеет место

$$\int_0^\infty e^{-\tau t} M e^{-sT(t)} dt = \int_0^\infty e^{-sx} d_x \Big(\int_0^\infty e^{-\tau t} \mathrm{P}(T(t)<x) dt\Big).$$

Из следствия 5.1 и теоремы 2.1 получаем

$$\int_0^\infty e^{-\tau t} \mathrm{P}(T(t)<x)\, dt = \frac{1-e^{-s(\tau)x}}{\tau}.$$

В силу теоремы 2.2 следует утверждение.

Цитированная литература

[1] V. E. Beneš, *General stochastic processes in the theory of queues*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1963.

[2] А. А. Боровков, *Вероятностные процессы в теории массового обслуживания*, Москва 1972.

SEKTION MATHEMATIK
UNIVERSITÄT LEIPZIG
DDR-70 LEIPZIG

Поступило в редакцию 30. 5. 1974

M. RIEDEL (Leipzig)

WARUNKI STACJONARNOŚCI JEDNOKANAŁOWEGO SYSTEMU OBSŁUGI MASOWEJ

STRESZCZENIE

Praca niniejsza opiera się na pracy [1]. Rozpatruje się w niej jednokanałowy system obsługi masowej, w którym zgłoszenia następują pojedynczo i są obsługiwane

w kolejności zgłoszeń. System jest określony przez obciążenie $K(t)$, będące sumą wszystkich czasów obsługi zgłoszeń do systemu w przedziale $[0, t)$. Interesującą charakterystyką systemu jest tzw. wirtualny czas oczekiwania $W(t)$.

Otrzymano pewne wyniki, gdy spełnione są różne warunki stacjonarności. W rozdz. 2 podane jest przekształcenie Laplace'a dla prawdopodobieństwa $\mathrm{P}(W(t) = 0)$ oraz rozkład pierwszego odcinka zajętości systemu. W rozdz. 3 przedstawiono główny rezultat pracy: Na to, aby istniał stacjonarny rozkład wirtualnego czasu oczekiwania, potrzeba i wystarcza, żeby zachodziła nierówność $\varrho < 1$ oraz żeby obciążenie systemu było procesem o niezależnych i stacjonarnych przyrostach. Jeśli istnieje rozkład stacjonarny, to istnieje także rozkład graniczny i oba te rozkłady są identyczne. W rozdz. 4 rozpatrzone jest graniczne zachowanie się prawdopodobieństwa $\mathrm{P}(W(t) = 0)$. W rozdz. 5 badany jest sumaryczny czas postojów do momentu t, oznaczony przez $T(t)$. Zbadany jest także związek między rozkładem $T(t)$ i rozkładem pierwszego odcinka zajętości systemu.