

J. BATTEK i J. PERKAL (Wrocław)

BONITACJA I WYSMUKŁOŚĆ DRZEWOSTANÓW

Przez *drzewostan* będziemy w niniejszej pracy rozumieli zbiór drzew lasu o jednakowym wieku (o dokładności tej cechy patrz ustęp 1) i składzie gatunkowym (w naszym przypadku rozważać będziemy drzewostany sosnowe). Na drzewach rosnących dokonywa się zasadniczo dwóch pomiarów dendrometrycznych: pomiaru pierśnicy i wysokości. *Pierśnica* jest to średnica pnia drzewnego na wysokości piersi mierzącego (stąd nazwa), a dokładniej: na 1,30 m od ziemi. Pierśnicę mierzy się suwmiarą (klupą) w jednym kierunku (np. południowo-północnym) lub w dwóch prostopadłych kierunkach (południowo-północnym i wschodnio-zachodnim); w ostatnim przypadku za pierśnicę uważa się średnią arytmetyczną tych dwóch pomiarów. Pomiar pierśnicy drzew jest łatwy. Wysokość drzewa mierzy się od ziemi do najwyższej gałązki. Pomiar jest dość trudny i wymaga przyrządów optycznych. Aby wysokość zmierzyć dokładnie, należy drzewo ścinać. Objętość drzewa leśnicy nazywają *miąższością*, łączną miąższość wszystkich drzew drzewostanu — *miąższością drzewostanu*, a stosunek miąższości drzewostanu do jego pola (w hektarach) nazywają *zasobnością drzewostanu*. Zasobność drzewostanu zależy od wieku i od zespołu ekologicznych cech siedliska, jak jakość gleby, warunki klimatyczne, poszycie, mikroflora itp. Ten zespół cech ekologicznych leśnicy nazywają *bonitacją*. Trudno, a może wręcz niemożliwe jest ująć liczbowo tak określoną bonitację. Dlatego w praktyce przypisuje się bonitację nie siedlisku, lecz drzewostanowi, na podstawie jego wieku i wysokości. Służą do tego specjalne tablice (zasobności) ułożone w ten sposób, żeby drzewostanom równowiekowym o coraz większej zasobności przypisywać coraz lepsze bonitacje. Na ogół w praktyce używa się od 5 do 7 różnych bonitacji od najlepszej (I lub Ia) do najgorszej (V lub Va).

Niektórzy autorzy proponują określać bonitację nie na podstawie wysokości, lecz na podstawie pierśnicy i wieku lub nawet na podstawie obu tych cech (pierśnicy i wysokości) i wieku. Niektórzy autorzy proponują traktować bonitację jako cechę ciągłą mogącą przyjmować wartości rzeczywiste ze skończonego przedziału (np. od 0 do 1). Niektórzy wreszcie

proponują używać za miernik bonitacji nie zasobność drzewostanu, gdyż ta zależy od wielkości drzew i od ilości tych drzew na 1 ha, lecz średnią miąższość drzewa w drzewostanie.

Rozwój drzewostanu można określić za pomocą średniej pierśnicy i średniej wysokości jako funkcji wieku drzewostanu. Obie te wielkości wzrastają, pozostając w pewnej zależności. Zależność tę opisują wspomniane wyżej tablice zasobności, które pozwalają też określić bonitację drzewostanu i ocenić, czy i o ile drzewostan odbiega od normalnego, tj. opisanego w tablicach (dla danego wieku i określonej bonitacji).

W pracy [4] podaliśmy inny opis zależności między pierśnicą a wysokością (funkcjami wieku). Rugując wiek znaleźliśmy zależność między średnią pierśnicą a średnią wysokością. Wykres tej zależności na płaszczyźnie o osiach x — pierśnica i y — wysokość nazwaliśmy *linią rozwoju*, gdyż wzdłuż tej linii z wiekiem przesuwa się punkt indywidualny średniego drzewostanu, tj. punkt o współrzędnych równych średniej pierśnicy i średniej wysokości wszystkich drzewostanów Polski w danym wieku. Dowolny drzewostan ma na tej płaszczyźnie punkt indywidualny, którego położenie względem linii rozwoju pozwala wnosić o rozwoju tego drzewostanu. Dla liczbowej charakterystyki rozwoju posłużyliśmy się osiami korelacji pierśnicy i wysokości drzewostanów jednowiekowych. Jedną z tych osi nazwaliśmy konwencjonalnie osią *bonitacji*, a drugą (prostopadłą) osią *wysmukłości*.

W niniejszej pracy rozwinie my tę ideę, ulepszymy metodę, wyniki oprzemy na bogatszym materiale i wykażemy, że proponowana przez nas bonitacja jest silniej skorelowana ze średnią miąższością drzewa drzewostanu oraz z zasobnością drzewostanu, niż bonitacja określona za pomocą tablic zasobności.

Ciekawe jest, że leśnicy rozważając dwie skorelowane cechy drzewostanów: pierśnicę i wysokość (przy ustalonym wieku), starali się za ich pomocą określić inne dwie cechy: bonitację i wysmukłość (smukłość, zagęszczenie, zwartość, pełność, normalność itp., zależne często również od arealu), niezależne jedna od drugiej. Charakterystyka drzewostanu za pomocą takich niezależnych cech jest w pewnym sensie precyzyjniejsza. Można przypuszczać, że to są pierwotne cechy drzewostanów tworzące się niezależnie. Niedostatecznemu stanowi wiedzy można przypisać, że nie umiemy ich mierzyć bezpośrednio, lecz tylko za pośrednictwem ich efektów, jak np. pierśnicę czy wysokość. Te intuicje skłoniły nas do zbadania spośród wszystkich liniowych kombinacji pierśnicy i wysokości tej jedynej pary określonej osiami korelacji, gdyż one właśnie tworzą parę cech niezależnych (jeśli taka para istnieje), a co najmniej nieskorelowanych.

1. Do badań naszych potrzebne są oprócz pierśnicy i wysokości dane dotyczące wieku drzewostanu. Na ogół wiek drzewostanu przyjmuje się za stałą jednakową dla wszystkich drzew drzewostanu. Wyznacza się ją albo z zapisów o roku zasadzenia drzewostanu, albo ze średniej liczby słojów rocznych policzonych na kilku pniach. Okazuje się jednak, że ta liczba słojów nie jest stałą w jednym drzewostanie, lecz zmienną losową. Tablica 1 przedstawia szereg rozdzielnicy tej zmiennej losowej w doświadczalnym drzewostanie sosnowym w Rogowie (woj. łódzkie). Średni wiek oszacowany z ilości słojów wynosi 80,0 lat, a średnie kwadratowe odchylenie poszczególnych drzew od tej średniej wynosi 4,69 lat. Najmłodsze drzewo tego drzewostanu miało 64 lata, a najstarsze 105 lat (drzewostan liczył 533 drzewa). Wynika stąd, że rok jest zbyt małą jednostką do wyznaczania empirycznego wieku (ilości słojów) drzewostanu. Daleko realniejsze jest zaliczanie drzewostanów do dziesięcioletnich klas wiekowych.

TABLICA 1

Szereg rozdzielnicy liczby słojów 533 drzew
drzewostanu rogowskiego

| Liczba słojów | Liczba drzew | Liczba słojów | Liczba drzew | Liczba słojów | Liczba drzew |
|---------------|--------------|---------------|--------------|---------------|--------------|
| 64 | 1 | 79 | 64 | 90 | 8 |
| 69 | 1 | 80 | 79 | 91 | 3 |
| 70 | 2 | 81 | 60 | 92 | 2 |
| 71 | 2 | 82 | 48 | 93 | 2 |
| 72 | 3 | 83 | 17 | 94 | 2 |
| 73 | 6 | 84 | 8 | 95 | 3 |
| 74 | 9 | 85 | 4 | 96 | 3 |
| 75 | 25 | 86 | 8 | 97 | 1 |
| 76 | 37 | 87 | 7 | 98 | 3 |
| 77 | 55 | 88 | 5 | 102 | 1 |
| 78 | 60 | 89 | 3 | 105 | 1 |

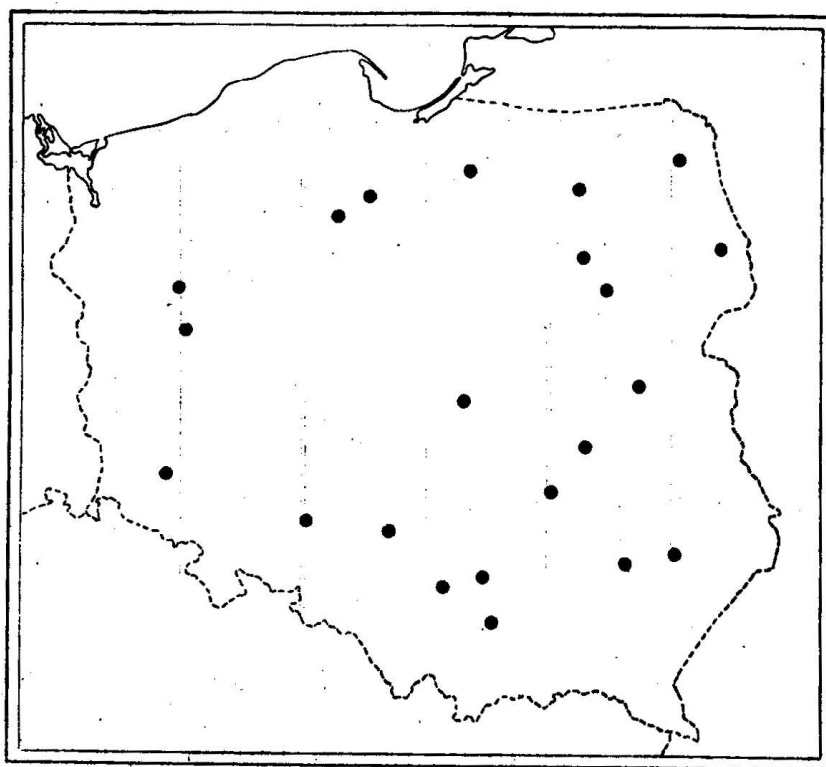
Materiałem wyjściowym, na którym oparliśmy nasze obliczenia, były dane dotyczące 149⁽¹⁾ drzewostanów sosnowych z 22 nadleśnictw rozrzuconych po całej Polsce (patrz rys. 1). Tablica 2 pokazuje rozkład tych drzewostanów według wieku i bonitacji szacowanej przez leśników. Dane te, podobnie jak dane dotyczące drzewostanu rogowskiego, udostępnił nam łaskawie Instytut Badawczy Leśnictwa w Warszawie, za co składamy niniejszym wyrazy wdzięczności.

(¹) Z rachunków wyłączyliśmy jeden drzewostan (Taburz 100c) z powodu zbyt dużego wieku (160 lat); drzewostan ten został wykorzystany jedynie przy wyznaczaniu linii średniego rozwoju drzewostanów.

TABLICA 2

Rozkład 149 drzewostanów według wieku i bonitacji szacowanej przez leśników

| Klasa wieku Bonitacja | | | | | | | | Razem |
|--------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-----------|-------|
| | 41-50 | 51-60 | 61-70 | 71-80 | 81-90 | 91-100 | ponad 100 | |
| Ia | 2 | 1 | — | — | — | — | 1 | 4 |
| I | 4 | 7 | 6 | 3 | 3 | 1 | 1 | 25 |
| II | 9 | 10 | 11 | 7 | 7 | 3 | 5 | 52 |
| II/III | 2 | 1 | 1 | 1 | 3 | — | 1 | 9 |
| III | 5 | 7 | 10 | 4 | 6 | 5 | 5 | 42 |
| III/IV | 1 | — | — | — | — | 1 | — | 2 |
| IV | — | 4 | 2 | 3 | 3 | 1 | — | 13 |
| V | — | — | — | 1 | 1 | — | — | 2 |
| Razem | 23 | 30 | 30 | 19 | 23 | 11 | 13 | 149 |



ZM-204

Rys. 1

Wiek drzewostanu wyznaczono na podstawie liczby słoików około 10 drzew. Notowano pierśnice i wysokości kilkudziesięciu drzew w każdym drzewostanie; łącznie w 148 drzewostanach zanotowano pierśnice i wysokości 8651 drzew. Te liczby posłużyły do naszych obliczeń. Prócz tego

potowano różne inne dane, jak np. kilka tysięcy pierśnic (bez wysokości) w każdym drzewostanie; tych danych nie wykorzystaliśmy. Tablica 3 przedstawia wykorzystane przez nas dane dotyczące jednego drzewostanu. Pełny materiał zawiera 149 takich tablic.

TABLICA 3

Pierśnice, wysokości i wiek drzew z próbki w nadleśnictwie Niepołomice, drzewostan 215 d, sosna, bonitacja I

| Wiek | Pierś- nica | Wyso- kość | Pierś- nica | Wyso- kość | Pierś- nica | Wyso- kość | Pierś- nica | Wyso- kość | Pierś- nica | Wyso- kość |
|------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|
| 82 | 45,2 | 26,0 | 23 | 21,5 | 29 | 22,5 | 33 | 23,5 | 39 | 26,0 |
| 82 | 37,7 | 25,6 | 23 | 22,0 | 29 | 24,0 | 33 | 25,0 | 41 | 23,5 |
| 79 | 34,5 | 24,8 | 23 | 22,5 | 29 | 24,0 | 33 | 27,5 | 41 | 24,5 |
| 73 | 32,5 | 21,4 | 25 | 20,5 | 29 | 25,02 | 35 | 25,5 | 41 | 25,5 |
| 77 | 31,5 | 26,2 | 25 | 21,5 | 29 | 27,0 | 35 | 25,5 | 41 | 25,5 |
| 77 | 30,0 | 24,1 | 25 | 22,0 | 31 | 22,0 | 35 | 26,0 | 41 | 26,5 |
| 74 | 29,2 | 24,5 | 25 | 22,5 | 31 | 22,5 | 37 | 23,5 | 45 | 26,0 |
| 77 | 28,0 | 26,0 | 25 | 22,5 | 31 | 22,5 | 37 | 24,0 | 53 | 28,0 |
| 76 | 25,4 | 24,0 | 25 | 23,5 | 31 | 22,5 | 39 | 22,5 | | |
| | 21 | 19,5 | 25 | 26,0 | 33 | 22,0 | 39 | 24,0 | | |
| | 21 | 20,5 | 27 | 22,0 | 33 | 22,5 | 39 | 24,5 | | |
| | 21 | 22,0 | 27 | 23,5 | 33 | 23,0 | 39 | 25,5 | | |

2. Należy przypuszczać, że drzewostan tworzy populację ekologiczną, tj. populację pierśnic (wysokości) o innej strukturze, a dokładniej o innej średniej, wariancji i dalszych parametrach, niżby to wynikało z hipotezy statystycznej, traktującej drzewostan jako próbkę losową drzew danej odmiany i danego wieku z populacji ogólnopolskiej. Przypuszczenie to jest uzasadnione tym, że średnia pierśnica (wysokość) drzewostanu zależy w dużej mierze od warunków ekologicznych siedliska. Poszczególne drzewa jednego drzewostanu powinny różnić się między sobą o wiele mniej niż średnie drzewa różnych drzewostanów. Aby sprawdzić to podejście, dokonaliśmy analizy wariancji pierśnic (wysokości) poszczególnych drzew.

Tablica 4 zawiera numery drzewostanów, ich bonitacje i wiek, liczbę pomierzonych drzew, średnią pierśnicę i wysokość oraz objętość (mąższność) średniego drzewa drzewostanu. Objętości te odczytaliśmy z tablic Tjurina [6] objętości pni sosnowych w korze dla średniej liczby kształtu. Tablica jest uporządkowana w dziesięcioletnie klasy wiekowe. Przez d_{ijk} oznaczamy pierśnicę k -tego drzewa próbki z j -tego drzewostanu i -tej klasy wiekowej. Indeks i zmienia się od 1 do 7 (mamy bowiem 7 klas wiekowych), j zmienia się od 1 do r_i , gdzie r_i jest ilością drzewostanów

w i -tej klasie wiekowej, k zmienia się od 1 do n_{ij} , gdzie n_{ij} jest ilością pomierzonych drzew w j -tym drzewostanie i -tej klasy wiekowej. Oczywiście

$$\sum_{i=1}^7 r_i = 148, \quad \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^{r_i} n_{ij} = 8651.$$

Przez d_{ij} oznaczamy średnią arytmetyczną pierśnicę w j -tym drzewostanie i -tej klasy wiekowej. W dendrometrii używa się zwykle nie średnich arytmetycznych, lecz średnich kwadratowych pierśnic, tj. średnich obliczonych ze wzoru

TABLICA 4

Dane wyjściowe o 148 próbkach

Klasa wieku: 41-50 lat

| Lp | Nr próbki | Bonitacja leśnicza | Wiek (w latach) | Liczba pomierzonych drzew (w szt.) | Średnia pierśnica d_{ij} (w cm) | Wariancja pierśnic (w cm ²) | Średnia wysokość h_{ij} (w m) | Objętość średniego drzewa (w dm ³) |
|----|-----------|--------------------|-----------------|------------------------------------|-----------------------------------|---|---------------------------------|--|
| 1 | 4 | I | 44 | 59 | 20,56 | 55,29 | 17,98 | 272 |
| 2 | 5 | II | 49 | 50 | 19,46 | 51,75 | 16,33 | 224 |
| 3 | 10 | II | 46 | 45 | 20,60 | 27,07 | 15,74 | 236 |
| 4 | 11 | III | 45 | 45 | 16,88 | 17,24 | 13,63 | 162 |
| 5 | 12 | III | 45 | 25 | 16,45 | 21,02 | 12,89 | 137 |
| 6 | 13 | II | 47 | 44 | 19,77 | 23,02 | 14,57 | 236 |
| 7 | 16 | I | 48 | 50 | 23,42 | 37,48 | 20,53 | 438 |
| 8 | 17 | II | 43 | 73 | 16,76 | 28,88 | 15,32 | 152 |
| 9 | 18 | II/III | 48 | 61 | 16,63 | 27,75 | 15,11 | 152 |
| 10 | 19 | III/IV | 44 | 61 | 15,27 | 25,77 | 13,04 | 137 |
| 11 | 26 | I | 47 | 47 | 24,98 | 37,85 | 20,36 | 422 |
| 12 | 36 | II | 50 | 54 | 24,35 | 65,50 | 18,73 | 407 |
| 13 | 37 | Ia | 46 | 47 | 22,49 | 40,07 | 18,98 | 344 |
| 14 | 38 | I | 45 | 45 | 22,47 | 49,63 | 18,91 | 344 |
| 15 | 40 | III | 50 | 68 | 16,71 | 39,38 | 13,46 | 137 |
| 16 | 45 | II | 49 | 44 | 20,55 | 38,24 | 16,45 | 248 |
| 17 | 46 | II | 48 | 49 | 19,12 | 31,50 | 18,48 | 272 |
| 18 | 47 | II | 49 | 61 | 21,74 | 53,08 | 18,70 | 344 |
| 19 | 48 | III | 48 | 39 | 15,88 | 18,55 | 15,31 | 152 |
| 20 | 49 | Ia | 42 | 44 | 17,65 | 23,29 | 17,12 | 210 |
| 21 | 51 | II | 45 | 47 | 15,26 | 15,78 | 15,24 | 152 |
| 22 | 92 | II/III | 46 | 54 | 17,53 | 24,24 | 17,42 | 210 |
| 23 | 136 | III | 50 | 48 | 18,02 | 21,59 | 14,68 | 190 |

$$d_{1..} = 19,21, \quad h_{1..} = 16,49$$

$$\bar{d}_{ij}^2 = \sqrt{\frac{1}{n_{ij}} \sum_{k=1}^{n_{ij}} d_{ijk}^2}$$

Robi się tak po to, żeby można było łatwo obliczyć łączne lub średnie pole przekroju pni drzewostanu na wysokości piersnicy. Już jednak

TABLICA 4 (cd.)

Klasa wieku: 51-60 lat

| Lp | Nr próbki | Bonitacja leśnicza | Wiek (w latach) | Liczba pomierzonych drzew (w szt.) | Średnia piersnica d_{2f} (w cm) | Wariancja piersnicy (w cm ²) | Średnia wysokość h_{2f} (w m) | Objętość średniego drzewa (w dm ³) |
|----|-----------|--------------------|-----------------|------------------------------------|-----------------------------------|--|---------------------------------|--|
| 1 | 1 | II | 58 | 46 | 21,63 | 49,76 | 16,23 | 302 |
| 2 | 2 | II | 60 | 49 | 19,27 | 40,45 | 17,27 | 235 |
| 3 | 3 | III | 59 | 71 | 18,57 | 51,73 | 14,20 | 202 |
| 4 | 6 | II | 60 | 71 | 22,45 | 40,67 | 18,87 | 344 |
| 5 | 7 | II | 58 | 72 | 21,25 | 38,55 | 17,82 | 331 |
| 6 | 8 | II | 56 | 77 | 20,05 | 39,43 | 18,34 | 272 |
| 7 | 9 | II/III | 56 | 54 | 20,28 | 45,13 | 16,51 | 260 |
| 8 | 14 | I | 60 | 58 | 25,07 | 35,56 | 22,14 | 453 |
| 9 | 15 | I | 55 | 53 | 25,45 | 37,59 | 20,10 | 422 |
| 10 | 20 | IV | 51 | 63 | 17,15 | 37,33 | 11,30 | 151 |
| 11 | 23 | I | 56 | 51 | 20,62 | 26,54 | 19,08 | 282 |
| 12 | 24 | I | 54 | 58 | 25,43 | 33,38 | 20,65 | 438 |
| 13 | 25 | Ia | 60 | 53 | 29,16 | 43,96 | 23,84 | 664 |
| 14 | 27 | I | 52 | 61 | 24,64 | 44,38 | 20,17 | 422 |
| 15 | 28 | II | 60 | 59 | 20,53 | 32,66 | 17,59 | 272 |
| 16 | 29 | I | 54 | 71 | 21,87 | 52,34 | 19,39 | 344 |
| 17 | 30 | II | 59 | 59 | 21,88 | 41,31 | 19,80 | 358 |
| 18 | 31 | II | 52 | 69 | 19,16 | 51,13 | 18,01 | 272 |
| 19 | 32 | IV | 55 | 51 | 19,93 | 47,19 | 12,45 | 202 |
| 20 | 33 | III | 58 | 60 | 23,82 | 88,18 | 14,35 | 323 |
| 21 | 34 | II | 51 | 46 | 20,54 | 48,65 | 16,32 | 248 |
| 22 | 35 | I | 57 | 51 | 28,57 | 59,51 | 20,99 | 602 |
| 23 | 39 | III | 57 | 55 | 19,04 | 35,64 | 13,85 | 225 |
| 24 | 41 | III | 55 | 75 | 19,45 | 33,29 | 17,76 | 272 |
| 25 | 42 | III | 56 | 64 | 25,07 | 48,44 | 15,95 | 424 |
| 26 | 43 | III | 54 | 54 | 16,63 | 29,39 | 12,88 | 137 |
| 27 | 44 | II | 59 | 44 | 24,85 | 64,77 | 20,38 | 422 |
| 28 | 50 | IV | 52 | 84 | 14,82 | 29,88 | 11,40 | 90 |
| 29 | 52 | III | 53 | 90 | 15,82 | 20,43 | 13,61 | 144 |
| 30 | 149 | IV | 55 | 62 | 14,48 | 23,66 | 11,57 | 96 |

$$d_{2..} = 20,96, \quad h_{2..} = 16,93$$

K. Suchecki zauważył ([5], str. 38), że średni kwadrat pierśnicy jest równy sumie kwadratu średniej arytmetycznej pierśnicy i wariancji

$$\bar{d}_{ij}^2 = d_{ij}^2 + \sigma_{ij}^2,$$

gdzie σ_{ij}^2 jest wariancją pierśnic w j -tym drzewostanie i -tej klasy wiekowej:

$$\sigma_{ij}^2 = \frac{1}{n_{ij}} \sum_{k=1}^{n_{ij}} (d_{ijk} - d_{ij})^2.$$

Wynika to wprost z równości $\sigma_x^2 = x^2 - (\bar{x})^2$.

TABLICA 4 (cd.)

Klasa wieku: 61-70 lat

| Lp | Nr próbki | Bonitacja leśnicza | Wiek (w latach) | Liczba pomierzonych drzew (w szt.) | Średnia pierśnica d_{3f} (w cm) | Wariancja pierśnic (w cm ²) | Średnia wysokość h_{3f} (w m) | Objętość średniego drzewa (w dm ³) |
|----|-----------|--------------------|-----------------|------------------------------------|-----------------------------------|---|---------------------------------|--|
| 1 | 21 | III | 61 | 70 | 22,15 | 39,64 | 15,48 | 287 |
| 2 | 22 | IV | 62 | 54 | 19,60 | 40,22 | 14,48 | 225 |
| 3 | 53 | III | 62 | 63 | 17,94 | 45,96 | 16,73 | 210 |
| 4 | 54 | III | 67 | 56 | 19,74 | 51,47 | 16,63 | 260 |
| 5 | 55 | III | 68 | 60 | 22,42 | 49,93 | 18,39 | 331 |
| 6 | 56 | II | 69 | 64 | 19,92 | 41,45 | 18,19 | 272 |
| 7 | 57 | II | 64 | 67 | 22,91 | 46,02 | 21,05 | 372 |
| 8 | 58 | III | 66 | 80 | 20,03 | 26,54 | 16,35 | 248 |
| 9 | 60 | II/III | 70 | 59 | 23,97 | 58,06 | 18,80 | 407 |
| 10 | 62 | II | 66 | 50 | 20,86 | 33,36 | 18,18 | 272 |
| 11 | 63 | II | 68 | 55 | 26,27 | 40,04 | 21,58 | 538 |
| 12 | 64 | I | 62 | 66 | 26,39 | 32,77 | 21,36 | 520 |
| 13 | 65 | II | 70 | 52 | 26,74 | 40,18 | 19,54 | 501 |
| 14 | 66 | I | 63 | 67 | 24,01 | 46,75 | 21,10 | 438 |
| 15 | 70 | II | 69 | 60 | 25,95 | 44,07 | 19,23 | 482 |
| 16 | 78 | II | 61 | 64 | 26,78 | 76,14 | 20,96 | 520 |
| 17 | 79 | II | 63 | 55 | 23,49 | 58,29 | 19,52 | 422 |
| 18 | 80 | I | 64 | 59 | 28,89 | 59,79 | 21,34 | 602 |
| 19 | 82 | IV | 70 | 70 | 19,79 | 29,73 | 13,28 | 214 |
| 20 | 84 | III | 70 | 60 | 19,08 | 27,25 | 14,45 | 225 |
| 21 | 87 | II | 65 | 65 | 25,49 | 53,58 | 21,91 | 538 |
| 22 | 90 | II | 63 | 46 | 21,10 | 38,98 | 17,48 | 317 |
| 23 | 91 | II | 70 | 53 | 23,97 | 50,79 | 22,90 | 470 |
| 24 | 93 | I | 68 | 63 | 26,81 | 46,53 | 21,93 | 538 |
| 25 | 95 | III | 64 | 56 | 23,40 | 55,65 | 17,37 | 374 |
| 26 | 96 | III | 65 | 62 | 20,54 | 52,81 | 17,30 | 260 |
| 27 | 97 | I | 66 | 65 | 25,98 | 53,08 | 21,82 | 538 |
| 28 | 98 | III | 69 | 54 | 23,72 | 41,36 | 18,36 | 391 |
| 29 | 100 | I | 68 | 59 | 27,20 | 50,87 | 21,79 | 624 |
| 30 | 122 | III | 69 | 65 | 24,82 | 55,97 | 18,53 | 407 |

$$d_{3..} = 23,31, \quad h_{3..} = 18,84$$

TABLICA 4 (od.)

Klasa wieku: 71-80 lat

| Lp | Nr próbki | Bonitacja leśnicza | Wiek (w latach) | Liczba pomierzonych drzew (w szt.) | Średnia pierśnica d_{4j} (w cm) | Wariancja pierśnic (w cm ²) | Średnia wysokość h_{4j} (w m) | Objętość średniego drzewa (w dm ³) |
|----|-----------|--------------------|-----------------|------------------------------------|-----------------------------------|---|---------------------------------|--|
| 1 | 59 | II/III | 78 | 65 | 23,41 | 49,61 | 20,37 | 422 |
| 2 | 61 | II | 80 | 72 | 27,46 | 59,57 | 21,77 | 624 |
| 3 | 67 | I | 71 | 77 | 29,07 | 62,40 | 21,69 | 722 |
| 4 | 68 | II | 71 | 51 | 26,64 | 35,37 | 20,08 | 501 |
| 5 | 69 | I | 77 | 56 | 32,13 | 47,44 | 23,87 | 869 |
| 6 | 72 | IV | 79 | 47 | 25,68 | 66,77 | 15,20 | 404 |
| 7 | 73 | III | 72 | 49 | 24,52 | 56,46 | 16,67 | 374 |
| 8 | 74 | V | 75 | 64 | 26,30 | 107,42 | 12,58 | 366 |
| 9 | 75 | II | 77 | 45 | 30,37 | 40,66 | 23,69 | 776 |
| 10 | 76 | I | 75 | 51 | 31,12 | 71,54 | 25,37 | 893 |
| 11 | 77 | III | 74 | 45 | 28,30 | 59,28 | 18,61 | 558 |
| 12 | 81 | II | 79 | 61 | 27,56 | 42,79 | 23,11 | 644 |
| 13 | 83 | III | 71 | 71 | 20,95 | 35,98 | 15,63 | 248 |
| 14 | 85 | IV | 80 | 65 | 20,76 | 40,80 | 14,73 | 236 |
| 15 | 86 | II | 72 | 57 | 26,18 | 60,67 | 19,38 | 482 |
| 16 | 88 | II | 76 | 82 | 26,23 | 54,71 | 21,49 | 520 |
| 17 | 89 | III | 76 | 46 | 21,96 | 42,63 | 16,89 | 317 |
| 18 | 94 | II | 72 | 64 | 24,63 | 75,89 | 20,62 | 438 |
| 19 | 99 | IV | 72 | 84 | 19,15 | 31,47 | 13,94 | 225 |

$$d_{4..} = 25,67, \quad h_{4..} = 19,16$$

Klasa wieku: 81-90 lat

| Lp | Nr próbki | Bonitacja leśnicza | Wiek (w latach) | Liczba pomierzonych drzew (w szt.) | Średnia pierśnica d_{5j} (w cm) | Wariancja pierśnic (w cm ²) | Średnia wysokość h_{5j} (w m) | Objętość średniego drzewa (w dm ³) |
|----|-----------|--------------------|-----------------|------------------------------------|-----------------------------------|---|---------------------------------|--|
| 1 | 71 | II/III | 81 | 58 | 23,67 | 44,63 | 20,20 | 422 |
| 2 | 105 | II | 88 | 69 | 28,32 | 58,23 | 23,85 | 664 |
| 3 | 106 | III | 87 | 55 | 22,48 | 38,78 | 15,32 | 287 |
| 4 | 107 | IV | 86 | 73 | 21,16 | 41,06 | 14,84 | 287 |
| 5 | 108 | II/III | 85 | 67 | 28,04 | 42,84 | 22,26 | 624 |
| 6 | 109 | II/III | 82 | 71 | 25,87 | 44,41 | 21,70 | 538 |
| 7 | 110 | III | 83 | 79 | 24,76 | 84,19 | 18,60 | 407 |
| 8 | 112 | I | 88 | 57 | 33,97 | 59,25 | 26,36 | 1037 |
| 9 | 114 | IV | 90 | 50 | 21,07 | 33,78 | 15,25 | 287 |
| 10 | 119 | I | 89 | 61 | 33,54 | 62,04 | 23,75 | 979 |
| 11 | 123 | III | 84 | 51 | 25,24 | 72,02 | 16,93 | 444 |
| 12 | 124 | V | 83 | 48 | 22,50 | 68,51 | 11,08 | 233 |
| 13 | 126 | I | 89 | 45 | 36,77 | 83,48 | 26,05 | 1157 |
| 14 | 127 | II | 88 | 54 | 26,27 | 67,30 | 20,43 | 501 |
| 15 | 131 | II | 84 | 53 | 31,20 | 49,04 | 21,69 | 821 |
| 16 | 132 | III | 89 | 52 | 25,38 | 49,78 | 16,89 | 444 |
| 17 | 134 | II | 90 | 42 | 27,05 | 38,67 | 20,32 | 580 |
| 18 | 137 | III | 84 | 54 | 29,28 | 104,75 | 20,17 | 674 |
| 19 | 141 | II | 87 | 53 | 32,46 | 68,54 | 26,38 | 917 |
| 20 | 145 | II | 86 | 57 | 29,21 | 69,73 | 22,19 | 722 |
| 21 | 146 | IV | 83 | 70 | 21,98 | 31,84 | 16,62 | 317 |
| 22 | 147 | II | 85 | 58 | 22,53 | 34,27 | 19,78 | 358 |
| 23 | 148 | III | 87 | 58 | 24,97 | 49,42 | 20,02 | 422 |

$$d_{5..} = 26,685, \quad h_{5..} = 20,03$$

TABLICA 4 (cd.)

Klasa wieku: 91-100 lat

| Lp | Nr próbki | Bonitacja leśnicza | Wiek (w latach) | Liczba pomierzonych drzew (w szt.) | Średnia pierśnica $d_{6f.}$ (w cm) | Wariancja pierśnic (w cm ²) | Średnia wysokość $h_{6f.}$ (w m) | Objętość średniego drzewa (w dm ³) |
|----|-----------|--------------------|-----------------|------------------------------------|------------------------------------|---|----------------------------------|--|
| 1 | 111 | III/IV | 97 | 77 | 25,94 | 55,90 | 18,17 | 463 |
| 2 | 113 | III | 97 | 52 | 22,81 | 39,54 | 18,59 | 344 |
| 3 | 115 | III | 97 | 50 | 28,89 | 46,80 | 20,29 | 580 |
| 4 | 116 | II | 93 | 70 | 27,33 | 67,91 | 23,37 | 644 |
| 5 | 120 | II | 97 | 62 | 29,26 | 25,74 | 21,98 | 728 |
| 6 | 121 | I | 94 | 95 | 31,87 | 53,16 | 26,41 | 917 |
| 7 | 125 | II | 98 | 57 | 33,91 | 91,85 | 24,08 | 979 |
| 8 | 128 | III | 95 | 10 | 23,30 | 27,27 | 17,79 | 391 |
| 9 | 129 | III | 92 | 62 | 25,53 | 38,62 | 17,77 | 463 |
| 10 | 130 | IV | 92 | 52 | 27,38 | 49,96 | 15,27 | 470 |
| 11 | 140 | III | 94 | 38 | 26,29 | 37,34 | 19,40 | 482 |

$$d_{s..} = 28,09, \quad h_{s..} = 20,91$$

Klasa wieku: od 101 lat

| Lp | Nr próbki | Bonitacja leśnicza | Wiek (w latach) | Liczba pomierzonych drzew (w szt.) | Średnia pierśnica $d_{7f.}$ (w cm) | Wariancja pierśnic (w cm ²) | Średnia wysokość $h_{7f.}$ (w m) | Objętość średniego drzewa (w dm ³) |
|----|-----------|--------------------|-----------------|------------------------------------|------------------------------------|---|----------------------------------|--|
| 1 | 101 | III | 126 | 59 | 29,46 | 58,56 | 22,79 | 744 |
| 2 | 102 | III | 103 | 58 | 32,57 | 110,88 | 22,19 | 821 |
| 3 | 103 | II | 112 | 64 | 34,26 | 151,97 | 24,72 | 1005 |
| 4 | 104 | II | 104 | 53 | 31,77 | 136,88 | 21,34 | 795 |
| 5 | 117 | III | 109 | 55 | 28,57 | 59,94 | 20,66 | 602 |
| 6 | 118 | II | 111 | 98 | 32,33 | 81,36 | 23,46 | 845 |
| 7 | 133 | II | 122 | 91 | 31,54 | 200,74 | 21,83 | 821 |
| 8 | 135 | III | 106 | 36 | 34,28 | 68,16 | 20,34 | 870 |
| 9 | 138 | I | 106 | 53 | 41,00 | 99,79 | 27,75 | 1510 |
| 10 | 139 | II | 107 | 41 | 35,48 | 34,72 | 25,38 | 1117 |
| 11 | 142 | III | 103 | 62 | 25,87 | 83,06 | 20,96 | 520 |
| 12 | 143 | II/III | 102 | 59 | 34,89 | 91,47 | 23,07 | 955 |

$$d_{7..} = 32,42, \quad h_{7..} = 22,87$$

$$d_{...} = 24,21, \quad h_{...} = 18,85$$

Zauważmy dalej, że obliczanie średniej kwadratowej pierśnicy nie na wiele się przyda, jeśli zechcemy obliczać łączną lub średnią miąższość

pni drzewostanu. Dendrometrzy używają w tym celu tzw. *średniej liczby kształtu drzewostanu* F , tj. takiej liczby, której iloczyn przez łączne pole przekroju pni na wysokości pierśnicy i przez średnią wysokość drzewostanu jest równy łącznej miąższości pni. W ten sposób trudności statystyczne związane z obliczeniem średniego iloczynu pól przekrojów przez wysokości i indywidualne liczby kształtu poszczególnych pni ukrywa się w owej średniej liczbie kształtu. Tak określona liczba kształtu zależy, jak się okazuje, nie tylko od kształtu drzew (tj. od kształtu tworzącej pnia), ale również na przykład od korelacji między pierśnicami, wysokościami i liczbami kształtu. Wyznaczenie wartości średniej liczby kształtu dla drzewostanu bez uprzedniego wyznaczenia łącznej miąższości drzewostanu jest bardzo trudne i możliwe tylko w przybliżeniu.

Można w tym zadaniu oddzielić trudności statystyczne od trudności dendrometrycznych w następujący sposób: Oznaczmy przez h'_{ijk} tzw. *zredukowaną wysokość* pnia o numerze ijk , tj. jego wysokość pomnożoną przez indywidualną liczbę kształtu tego pnia $h'_{ijk} = h_{ijk}f_{ijk}$, lub innymi słowy: iloraz miąższości tego pnia przez jego pole przekroju na wysokości pierśnicy. Wówczas otrzymamy miąższość $V_{ijk} = \frac{1}{4}\pi d_{ijk}^2 h'_{ijk}$, a średnia miąższość w j -tym drzewostanie i -tej klasy wiekowej wyniesie

$$V_{ij.} = \frac{1}{4}n_{ij}\pi(h'_{ij.}d_{ij.}^2 + h'_{ij.}\sigma_{ij}^2 + 2d_{ij.}C_{ij} + D_{ij}),$$

gdzie

$$C_{ij} = \frac{1}{n_{ij}} \sum_{k=1}^{n_{ij}} (d_{ijk} - d_{ij.})(h'_{ijk} - h'_{ij.})$$

jest kowariancją pierśnic i zredukowanych wysokości w i -tym drzewostanie j -tej klasy wiekowej, a

$$D_{ij} = \frac{1}{n_{ij}} \sum_{k=1}^{n_{ij}} (d_{ijk} - d_{ij.})^2 (h'_{ijk} - h'_{ij.})$$

jest odpowiednim trzecim momentem mieszanym. Trudnością dendrometryczną pozostałoby zbadanie, czy wielkości σ_{ij}^2 , C_{ij} i D_{ij} ulegają dużym zmianom w drzewostanach tej samej klasy wiekowej, a jeśli tak, to czy nie można by tych wielkości szacować w sposób przybliżony jakąś łatwą i prostą metodą. W pracy Sucheckiego [5] przedstawiono próby przybliżonego szacowania pierwszej z tych wielkości.

Widzimy więc, że w dendrometrii nie jest konieczne używanie średniej kwadratowej pierśnicy, gdyż można ją otrzymać ze średniej arytmetycznej pierśnicy i wariancji. Te ostatnie zaś mają nad średnią kwadratową jeszcze i inną przewagę: umożliwiają znalezienie średniej miąższości

bez korzystania z niejasnego pojęcia średniej liczby kształtu. Zauważmy, że średnią arytmetyczną i jej wariancję jest znacznie łatwiej obliczać niż średnią kwadratową i wariancję tej średniej. Wreszcie, średnia arytmetyczna i wariancja są wskaźnikami powszechnie używanymi w statystyce i wszystkich naukach posługujących się statystyką. Znamy sposoby estymowania tych wskaźników na podstawie próbki i własności tych estymatorów, a w szczególności efektywność. Wiemy na przykład, że średnia arytmetyczna jest najefektywniejszym estymatorem, podczas gdy średnia kwadratowa nie ma tej własności. Dlatego w pracy niniejszej wbrew zwyczajom dendrometrów posługujemy się średnią arytmetyczną pierśnicą d_{ij} , łatwiejszą do obliczenia i mającą lepsze własności statystyczne niż średnia kwadratowa; wielkości d_{ij} podano w odpowiedniej kolumnie tablicy 4. Przez $d_{i..}$ oznaczamy średnią pierśnicę w i -tej klasie wiekowej; jest ona podana w tablicy 4 w ostatnim wierszu każdej klasy wiekowej. Wreszcie przez $d_{...}$ oznaczamy ogólną średnią pierśnicę wszystkich drzew we wszystkich 148 drzewostanach; jest ona podana w ostatnim wierszu tablicy 4 i wynosi 24,21 cm.

Całkowitą zmienność S^2 , czyli sumę kwadratów odchyleń poszczególnych pierśnic od średniej pierśnicy $d_{...}$, rozkładamy na sumę trzech składników, mianowicie S_1^2 — zmienności wewnątrz drzewostanów, S_2^2 — zmienności między drzewostanami jednakowych klas wiekowych i S_3^2 — zmienności między klasami wieku:

$$(1) \quad S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2,$$

gdzie

$$S^2 = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^{r_i} \sum_{k=1}^{n_{ij}} (d_{ijk} - d_{...})^2,$$

$$S_1^2 = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^{r_i} \sum_{k=1}^{n_{ij}} (d_{ijk} - d_{ij.})^2,$$

$$S_2^2 = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^{r_i} n_{ij} (d_{ij.} - d_{i..})^2,$$

$$S_3^2 = \sum_{i=1}^7 n_i (d_{i..} - d_{...})^2,$$

a. $n_i = \sum_{j=1}^{r_i} n_{ij}$ jest ilością drzew w i -tej klasie wiekowej. W naszym przypadku otrzymaliśmy $S^2 = 667794$, $S_1^2 = 445920$, $S_2^2 = 102848$, $S_3^2 = 119026$. Odpowiednie liczby stopni swobody wynoszą 8650, 8503, 141, 6. Stąd wniosek, że wariancja wynikająca ze zmienności drzew wewnątrz drzewostanów wynosi $s_1^2 = 52,44$; wariancja wynikająca z różnic między drzewostanami, ale wewnątrz klas wiekowych, wynosi $s_2^2 =$

$\approx 729,42$; wreszcie wariancja wynikająca z różnic między klasami wiekowymi wynosi $s_3^2 = 19837$. Kryterium Snedecora pozwala stwierdzić, że trzy te źródła wpływają w sposób istotnie różny na wariancję s^2 .

Można by przypuszczać, że wariancja między drzewostanami zawdzięcza swą dużą wartość temu, że poszczególne drzewostany różnią się wiekiem (mimo, że należą do tej samej klasy wiekowej), czyli że dziesięcioletnia klasa wiekowa jest tak bardzo zróżnicowana w dużej mierze dzięki temu, iż do jednej klasy należą drzewostany różniące się wiekiem niekiedy o 10 lat. Aby to zbadać, wyszukaliśmy 5 drzewostanów w wieku dokładnie 60 lat. Tablica 5 zawiera dane dotyczące tych 5 drzewostanów. Okazuje się, że wariancja pochodząca z różnic między tymi drzewostanami wynosi 828,74, czyli nie różni się istotnie od obliczonej poprzednio wariancji s_2^2 . Widać więc, że wariancji między-drzewostanowej nie można złożyć na karb różnic wieku między drzewostanami. Drzewostany mają jakiś specyficzny zespół cech — można go nazwać ekologicznym (jakość siedliska) — którego wpływ na pierśnice drzew jest jednakowy w jednym drzewostanie, a różny w różnych drzewostanach.

Równość analogiczna do (1) obowiązuje w każdej klasie wiekowej. Można by stąd obliczyć wariancję wewnątrz-drzewostanową i między-drzewostanową w poszczególnych klasach wiekowych i pokazać, jak rozwija się z wiekiem każda z tych wariancji. Nasz materiał okazał się zbyt szczupłym do takich badań. Wariancja wewnątrz-drzewostanowa na ogół wzrasta wraz z wiekiem aż do 90 lat, potem zachowuje się nieregularnie. Wariancja między-drzewostanowa wzrasta i maleje nieregularnie. Do dokładnego zbadania zagadnienia trzeba by mieć więcej materiału. Badania takie są specjalnie potrzebne po to, żeby zbadać wariancję wewnątrz drzewostanów, która, jak wspominaliśmy wyżej, jest potrzebna do obliczania średniej kwadratowej pierśnicy ze średniej arytmetycznej.

Zupełnie analogicznie przeprowadziliśmy analizę wariancji wysokości drzew. Wariancja wysokości wynikająca ze zmienności drzew wewnątrz drzewostanów wynosi 4,95; wariancja wynikająca z różnic między drzewostanami, ale wewnątrz klas wiekowych, wynosi 582; wreszcie wariancja wysokości wynikająca z różnic między klasami wiekowymi wynosi 4935. Jak widać, wpływ właściwości ekologicznych drzewostanu na wysokość jest jeszcze większy niż na pierśnicę. Można by poglądowo powiedzieć, że każdy las poprzez swoje właściwości ekologiczne

TABLICA 5

Pierśnice 5 drzewostanów
60-letnich

| Nr próbki | n_{ij} | d |
|-----------|----------|-------|
| 2 | 49 | 19,27 |
| 6 | 71 | 22,45 |
| 14 | 58 | 25,07 |
| 25 | 53 | 29,16 |
| 28 | 59 | 20,53 |

$$\bar{d} = 23,27 \quad s_2'^2 = 828,74$$

ujednolica swoje drzewa, przy czym o wiele silniej ujednolica wysokość swych drzew niż ich pierśnice.

3. Okazuje się więc, że nie można jednocześnie badać poszczególnych drzew i całych drzewostanów, traktując te ostatnie jako losowe zbiory drzew. Pierśnice i wysokości poszczególnych drzew mają inne rozkłady jednowymiarowe, a tym bardziej łączny rozkład dwuwymiarowy, niż średnie pierśnice i średnie wysokości drzewostanów (po uwzględnieniu liczebności). Sprawa ta nie była dla nas dostatecznie jasna, gdy pisaliśmy pracę [4]. Niniejszą pracę poświęcamy badaniu drzewostanów, a nie poszczególnych drzew. Dlatego w dalszym ciągu średnią pierśnicę (wysokość) w drzewostanie będziemy traktowali jako daną jednakowej wagi, bez względu na to, z jak licznej próbki ta średnia była wyestymowana. Liczebność próbki bowiem może wpłynąć tylko na dokładność estymacji, fakt zaś przynależności próbki do danego drzewostanu wyznacza estymowaną wielkość. Dalsze obliczenia będziemy więc wykonywali posługując się wyłącznie tablicą 4, przy czym kolumnę podającą liczebności próbek pozostawimy tylko dla orientacji, nie korzystając w rachunkach z danych z tej kolumny. Nie będziemy również korzystali w dalszych rachunkach z liczb zawartych w kolumnie: „Wariancja pierśnic”.

Pierśnicę podawaliśmy dotychczas w cm, a wysokość w m. Aby uwolnić się od tych jednostek i przygotować materiał do dalszych operacji statystycznych, trzeba te dwie cechy wyrazić w jednostkach naturalnych, tj. niezależnych od przyjętego układu jednostek miar. Robi się to przez unormowanie cech na wariancję 1, czyli przez podzielenie wszystkich pierśnic przez średnie kwadratowe odchylenie pierśnic, a wszystkich wysokości przez średnie kwadratowe odchylenie wysokości. Za średnie kwadratowe odchylenia należy tu przyjąć pierwiastek z wariancji między drzewostanami wewnątrz klas wiekowych. Można je otrzymać dwoma sposobami:

1° Można obliczyć średnie kwadratowe odchylenie średnich pierśnic (wysokości) 148 drzewostanów podzielonych na klasy wiekowe (od średnich w klasach). Wyniki tych obliczeń, mianowicie $s_{\bar{a}} = 3,46$ i $s_{\bar{h}} = 3,07$, przyjęliśmy za podstawę do dalszych rachunków.

2° Niemal te same liczby ($s_{\bar{a}} = 3,49$ i $s_{\bar{h}} = 3,11$) otrzymuje się z wariancji pierśnic (wysokości) między drzewostanami, a wewnątrz klas wiekowych ($s_{2a}^2 = 729$ i $s_{2h}^2 = 582$), po podzieleniu ich przez średnią liczebność próbki $n = 60$.

Można by do unormowania użyć zamiast średniego kwadratowego odchylenia innej miary rozszewu, np. przeciętnego odchylenia. Otrzymalibyśmy nieco inne wyniki, ale ponieważ rozkład pierśnic i rozkład wysokości niezbyt odbiegają od normalnego, różnice wyników byłyby znikomo małe (dla rozkładu normalnego nie byłoby różnic).

Przez d'_{ij} i h'_{ij} będziemy w dalszym ciągu oznaczali średnią pierśnicę i średnią wysokość w j -tym drzewostanie i -tej klasy wiekowej wyrażone w jednostkach naturalnych, tj. podzielone przez omówione wyżej średnie kwadratowe odchylenie. Drzewostan taki można na płaszczyźnie $d'h'$ oznaczyć przez punkt o współrzędnych d'_{ij} , h'_{ij} . Na obu osiach tej płaszczyzny mamy tę samą jednostkę naturalną. Kierunki równoległe do osi można uważać za jednorodne w tym sensie, że wektor równoległy do osi d' oznacza przyrost pierśnicy przyrodniczo podobny (zob. [3]) do przyrostu wysokości określonego wektorem o takiej samej długości, równoległym do osi h' . Przyjmujemy konwencjonalnie, że wszystkie kierunki na płaszczyźnie $d'h'$ są jednorodne w tym samym sensie, czyli że każdy wektor o długości a przedstawia przyrost pierśnicy i wysokości o łącznej wielkości a . Przy takiej konwencji możemy mówić o podobieństwie dwóch drzewostanów jako o odległości ich punktów indywidualnych na płaszczyźnie $d'h'$. Jeśli drzewostany D_1 i D_2 mają na tej płaszczyźnie punkty indywidualne D_1 i D_2 w odległości mniejszej niż odległość między punktami indywidualnymi D_3 i D_4 drzewostanów D_3 i D_4 , to mówimy, że drzewostany D_1 i D_2 są podobniejsze (pod względem pierśnicy i wysokości) niż drzewostany D_3 i D_4 . To orzeczenie jest niezależne od tego, jakie są kierunki wektorów $\overline{D_1 D_2}$ i $\overline{D_3 D_4}$. Przy takiej konwencji odległość na płaszczyźnie $d'h'$ nabiera przyrodniczego znaczenia. Zauważmy, że bez normowania pierśnicy i wysokości, traktowanie płaszczyzny dh jako jednorodnej w podanym wyżej sensie jest nieuzasadnione, gdyż przyrost pierśnicy o 1 cm ma przyrodniczo inne znaczenie niż przyrost wysokości drzewostanu o 1 m. Nie uwzględniliśmy tego w pracy [4], co zresztą nie ma większego znaczenia praktycznego, gdyż średnie kwadratowe odchylenia s_d i s_h mają bliskie wartości liczbowe. Okazuje się więc w praktyce, że 1 cm przyrostu pierśnicy ma mniej więcej takie samo znaczenie przyrodnicze, jak 1 m przyrostu wysokości drzewostanu (dokładnie: jak 0,89 m wysokości).

Tablica 6 zawiera unormowane na wariancję 1 średnie pierśnice i średnie wysokości 30 drzewostanów klasy wiekowej 51-60 lat.

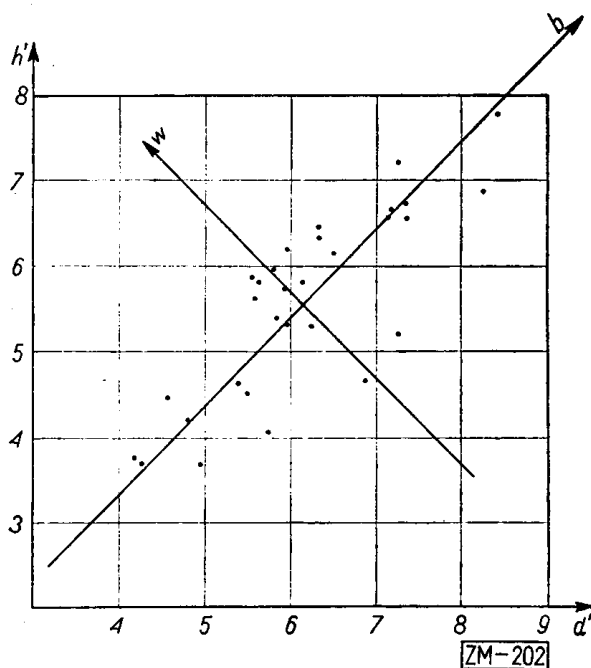
(^a) Tablic takich mieliśmy siedem dla siedmiu klas wiekowych.

TABLICA 6(^a)

Współrzędne unormowane d' i h'
próbek w wieku 51-60 lat

| Lp | d' | h' | Lp | d' | h' |
|----|------|------|----|------|------|
| 1 | 6,25 | 5,29 | 16 | 6,32 | 6,32 |
| 2 | 5,57 | 5,63 | 17 | 6,32 | 6,45 |
| 3 | 5,37 | 4,63 | 18 | 5,54 | 5,87 |
| 4 | 6,49 | 6,15 | 19 | 5,76 | 4,06 |
| 5 | 6,14 | 5,18 | 20 | 6,88 | 4,67 |
| 6 | 5,79 | 5,97 | 21 | 5,94 | 5,32 |
| 7 | 5,86 | 5,38 | 22 | 8,26 | 6,84 |
| 8 | 7,25 | 7,21 | 23 | 5,50 | 4,51 |
| 9 | 7,36 | 6,55 | 24 | 5,62 | 5,79 |
| 10 | 4,96 | 3,68 | 25 | 7,25 | 5,20 |
| 11 | 5,96 | 6,21 | 26 | 4,81 | 4,20 |
| 12 | 7,35 | 6,73 | 27 | 7,18 | 6,64 |
| 13 | 8,43 | 7,77 | 28 | 4,28 | 3,71 |
| 14 | 7,12 | 6,57 | 29 | 4,57 | 4,43 |
| 15 | 5,93 | 5,73 | 30 | 4,18 | 3,77 |

Rysunek 2 przedstawia punkty indywidualne tych drzewostanów na płaszczyźnie $d'h'$. Narysowane są także osie korelacji, tj. prosta spełniająca warunek, że suma kwadratów odległości wszystkich 30 punktów indywidualnych od tej prostej jest najmniejsza, oraz prosta prostopadła



Rys. 2

do poprzedniej a przechodząca przez środek zbioru punktów indywidualnych, tj. przez punkt d'_2, h'_2 (symbolem \bar{d}'_i oznaczamy średnią arytmetyczną średnich pierśnic drzewostanów i -tej klasy wiekowej; analogicznie \bar{h}'_i ; $i = 2$ oznacza drugą klasę wiekową, tj. lata 51-60). Osie te i jednostki na nich wyznacza się z pewnego równania sekularnego (zob. [1], [2] i [4]). Jeśli je przyjmiemy za nowy układ współrzędnych b (wzdłuż osi korelacji) i w (wzdłuż prostopadłej), otrzymamy układ współrzędnych nieskorelowanych. Nowe współrzędne b, w są kombinacjami liniowymi pierśnicy i wysokości i są jedynymi ich kombinacjami

liniowymi tworzącymi układ współrzędnych nieskorelowanych. Współrzędna b wzrasta wraz z pierśnicą i wysokością, a więc i z objętością (miąższością) drzewostanu. Współrzędną tę nazywamy *bonitacją*. Drugą współrzędną, w , nazywamy *wysmukłością* drzewostanu. Jest ona nieskorelowana z bonitacją i wzrasta, gdy wzrasta wysokość, a maleje pierśnica. Charakteryzuje ona kształt drzew drzewostanu. Jest duża, gdy drzewa drzewostanu są wysokie a cienkie, jest mała, gdy drzewa są niskie a grube.

Tablica 7 zawiera współrzędne \bar{d}'_i, \bar{h}'_i , czyli środki klas wiekowych drzewostanów, tangensy kątów między osią d' a osiami korelacji b dla wszystkich klas wiekowych, oraz jednostki λ_1 i λ_2 na nowych osiach b i w .

TABLICA 7

Punkty środkowe i osie korelacji
w klasach wiekowych

| Klasa wieku | \bar{d}'_i | \bar{h}'_i | $\text{tg } \varphi_i$ | λ_{1i} | λ_{2i} |
|-------------|--------------|--------------|------------------------|----------------|----------------|
| 41-50 | 5,56 | 5,37 | 0,85 | 0,12 | 1,25 |
| 51-60 | 6,14 | 5,57 | 0,95 | 0,18 | 1,65 |
| 61-70 | 6,74 | 6,15 | 1,03 | 0,22 | 2,00 |
| 71-80 | 7,49 | 6,27 | 1,08 | 0,26 | 2,20 |
| 81-90 | 7,76 | 6,52 | 1,06 | 0,26 | 2,20 |
| 91-100 | 7,95 | 6,61 | 0,98 | 0,25 | 2,00 |
| 101- | 9,44 | 7,45 | 0,62 | 0,19 | 1,55 |

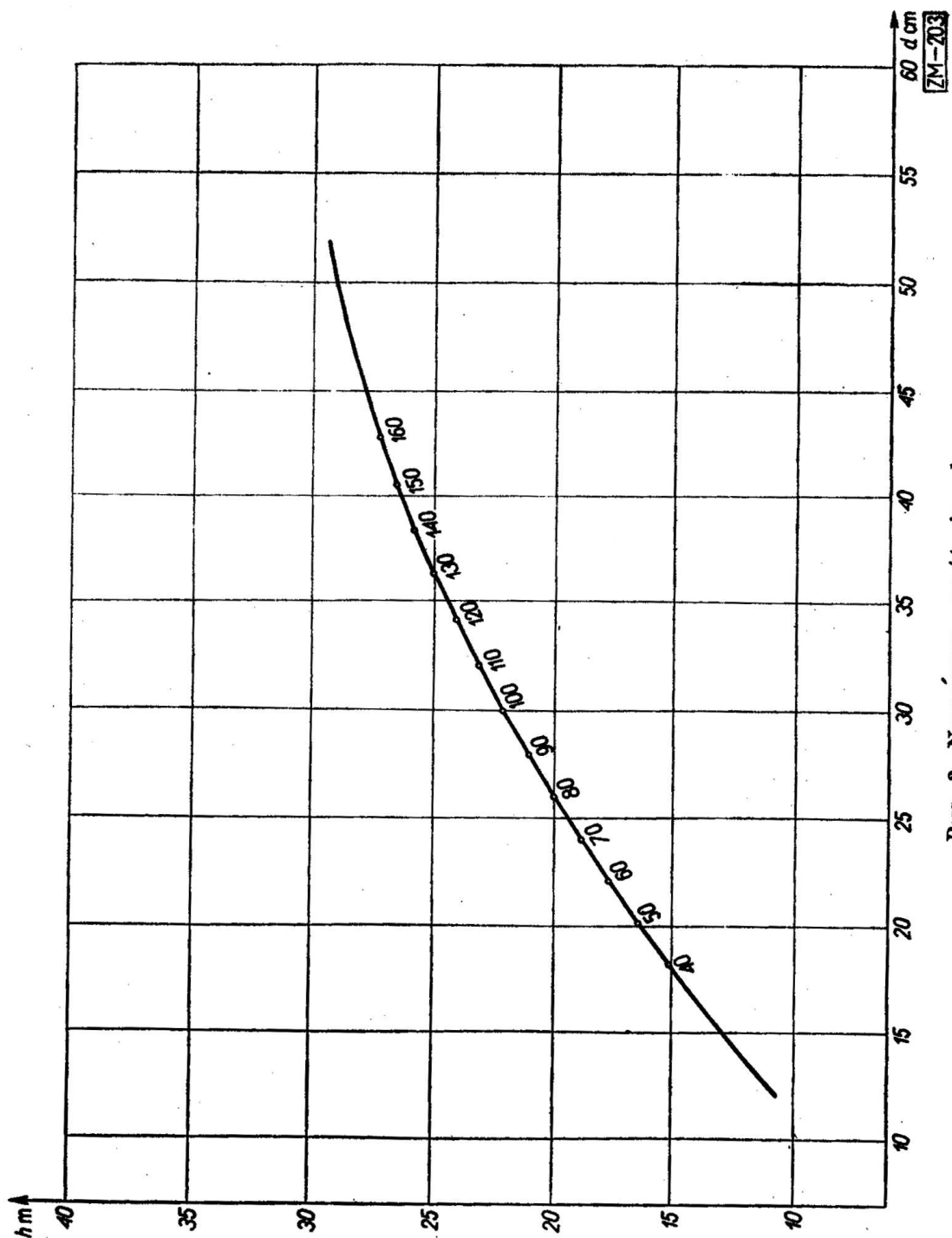
Na tej podstawie sporządzono nomogram na rysunku 3, za pomocą którego można odczytywać nowe współrzędne b, w drzewostanu, jeśli dane są stare jego współrzędne d, h . Dokładny opis rachunków (zresztą prostych) i konstrukcji nomogramu podaliśmy w pracy [4]. Dla łatwiejszego posługiwania się nim, podziałka na osi pierśnicy podana jest w centymetrach, a na osi wysokości w metrach (oczywiście podziałki te muszą być wobec tego różnej długości). Jeśli znamy średnią pierśnicę i średnią wysokość jakiegoś drzewostanu D , to nie przedstawia żadnych trudności znalezienie na płaszczyźnie nomogramu punktu indywidualnego D tego drzewostanu. Do wyznaczenia bonitacji i wysmukłości drzewostanu D potrzebny nam jest jeszcze wiek tego drzewostanu. Przez nomogram na rysunku 3 przebiega linia rozwoju drzewostanów, tj. linia (wyrównana) łącząca środkowe punkty klas wiekowych. Średni drzewostan rozwijałby się w ten sposób, że jego punkt indywidualny przesuwalby się wzdłuż linii rozwoju. Na linii tej zaznaczona jest podziałka oznaczająca wiek. Posługując się tą podziałką znajdujemy na linii rozwoju punkt D' o wieku równym wiekowi drzewostanu D . Na nomogram nakładamy teraz jego część ruchomą, wydrukowaną na przejrzystej wkładce, mianowicie część przeznaczoną dla wieku drzewostanu D (zaznaczone w prawym górnym rogu ruchomej części). Część ruchomą nakładamy środkiem na punkt D' i wybiegającym ze środka wektorem stycznie do linii rozwoju. Na części ruchomej nakreślony jest układ współrzędnych b, w , za pomocą którego odczytujemy współrzędne b, w punktu D zaznaczonego poprzednio na płaszczyźnie nomogramu, a widocznego obecnie przez przejrzystą część ruchomą. Pierwsza z odczytanych współrzędnych jest bonitacją, druga zaś wysmukłością rozważanego drzewostanu D . Tablica 8 zawiera bonitacje i wysmukłości drzewostanów klasy wiekowej 51-60 lat.

Te obiektywne wskaźniki pozwalają wysnuć pewne wnioski. Wysmukłość drzewostanu wskazuje na nadmierną wybujałość lub przysadzistość

TABLICA 8

Wskaźniki b i w drzewostanów klasy wiekowej 51-60 lat

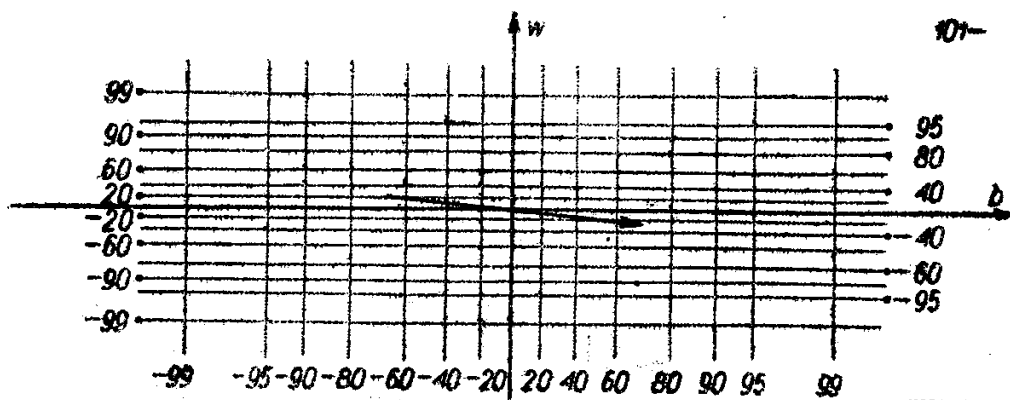
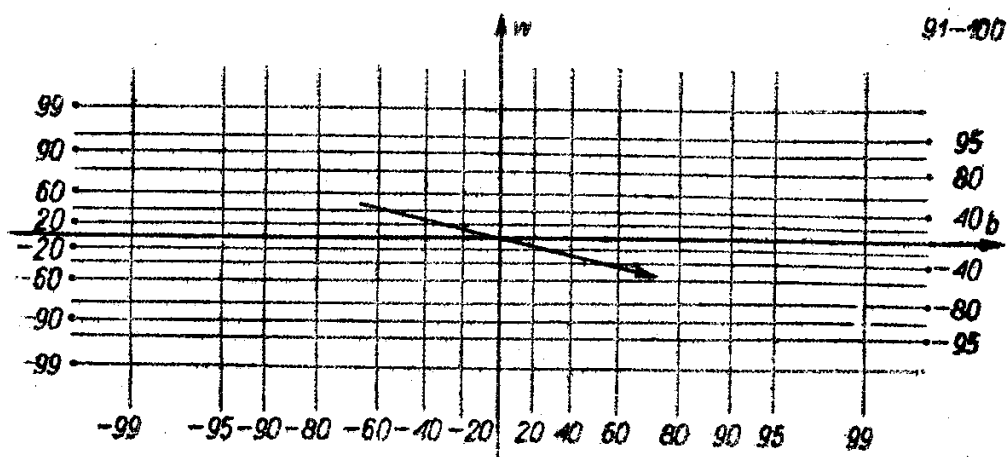
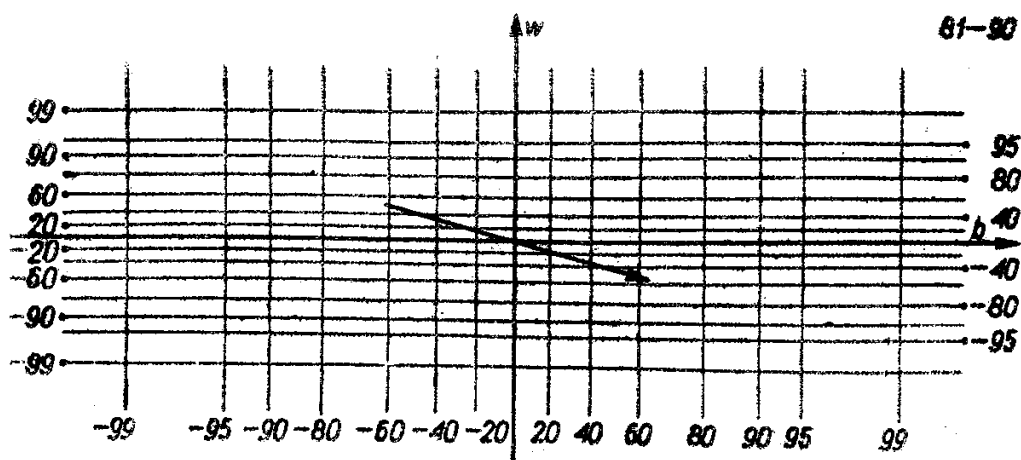
| Lp | b | w | Lp | b | w |
|----|-----|-----|----|-----|-----|
| 1 | -18 | -49 | 16 | +48 | +65 |
| 2 | -39 | +75 | 17 | +32 | +80 |
| 3 | -73 | -20 | 18 | +5 | +82 |
| 4 | +22 | +40 | 19 | -68 | -95 |
| 5 | -40 | -80 | 20 | -16 | -99 |
| 6 | 0 | +80 | 21 | 0 | -15 |
| 7 | -23 | +12 | 22 | +93 | -87 |
| 8 | +81 | +73 | 23 | -68 | -60 |
| 9 | +82 | -25 | 24 | -10 | +74 |
| 10 | -84 | -83 | 25 | +32 | -98 |
| 11 | +19 | +84 | 26 | -84 | -15 |
| 12 | +85 | -6 | 27 | +69 | +20 |
| 13 | +97 | +9 | 28 | -94 | -16 |
| 14 | +82 | -1 | 29 | -82 | +43 |
| 15 | -20 | +50 | 30 | -96 | +7 |



Rys. 3. Nomogram — część nieruchoma

Zastosowania Matematyki III

J. Battek i J. Perkal, Bonitacja i wysmukłość drzewostanów

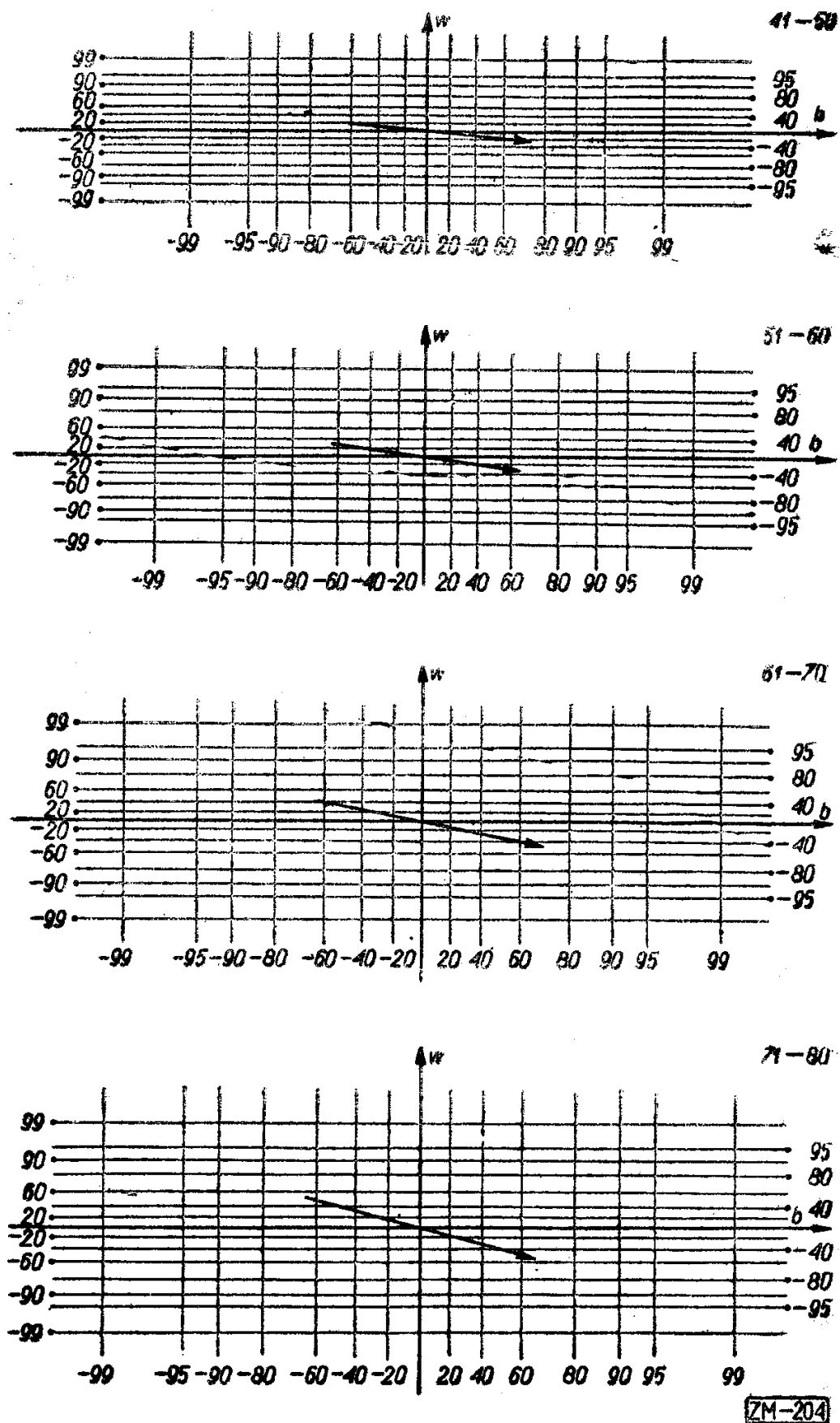


ZM-205

Rys. 3 (str. 302). Nomogram — część ruchoma
(dla drzewostanów w wieku ponad 81 lat)

Zastosowania Matematyki III

J. Battek i J. Perkal, Bonitacja i wyszukanie drzewostanów



Rys. 3 (str. 302). Nomogram — część ruchoma
(dla drzewostanów w wieku 41–80 lat)

drzewostanu, a więc niekiedy na potrzebę różnych zabiegów w lesie (np. trzebież, podsadzanie itp.). Bonitacja pozwala wnosić o miąższości drzewostanu, czyli o masie drewna w nim zawartej.

4. Ta ostatnia własność proponowanej przez nas bonitacji wynika z korelacji między bonitacją a miąższością. Można tu badać korelację między bonitacją a średnią miąższością jednego drzewa w drzewostanie albo też korelację między bonitacją a łączną miąższością wszystkich drzew na jednym hektarze drzewostanu (tj. średnią miąższością drzewa pomnożoną przez ilość pni na 1 ha).

TABLICA 9

Współczynniki korelacji między miąższością średnich drzew drzewostanów i ich zasobnością a bonitacją proponowaną, bonitacją leśniczą oraz wyszukłością

| Klasa wieku Korelacja | 41-50 | 51-60 | 61-70 | 71-80 | 81-90 | 91-100 | 101- |
|--------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|
| $r_{b\bar{v}}$ | 0,96 | 0,92 | 0,96 | 0,94 | 0,95 | 0,98 | 0,88 |
| $r_{B\bar{v}}$ | 0,66 | 0,85 | 0,74 | 0,78 | 0,84 | 0,81 | 0,80 |
| r_{bV} | 0,60 | 0,79 | 0,68 | 0,76 | 0,90 | 0,65 | 0,54 |
| r_{BV} | 0,47 | 0,73 | 0,60 | 0,74 | 0,51 | 0,63 | 0,28 |
| $r_{w\bar{v}}$ | 0,005 | -0,04 | -0,21 | -0,09 | -0,21 | 0,03 | -0,27 |

W pierwszym wierszu tablicy 9 podano współczynniki korelacji $r_{b\bar{v}}$ między proponowaną przez nas bonitacją a średnią miąższością pnia w drzewostanie dla poszczególnych klas wiekowych. W drugim wierszu dla porównania podano współczynniki korelacji $r_{B\bar{v}}$ między bonitacją używaną w leśnictwie a średnią miąższością pnia. Jak widać, proponowana przez nas bonitacja jest dużo lepiej skorelowana ze średnią miąższością pnia niż bonitacja używana w leśnictwie: pierwsza z tych korelacji nie opada dla żadnej klasy wiekowej poniżej 0,88, a druga nie przekracza 0,85. W trzecim wierszu podano współczynniki korelacji r_{bV} między proponowaną przez nas bonitacją a łączną miąższością wszystkich drzew na 1 ha drzewostanu; w czwartym wierszu dla porównania podano współczynniki r_{BV} korelacji między bonitacją używaną w leśnictwie a łączną miąższością drzew na 1 ha. Jak widać i tu w każdej klasie wiekowej nasza bonitacja jest silniej skorelowana z miąższością niż bonitacja używana w leśnictwie. Zaznaczyć należy, że współczynniki korelacji w tych dwóch wierszach są zniekształcone przez niedokładne oznaczenie powierzchni próbnych, bądź ilości pni na 1 ha, co miało miejsce w kilku próbkach (w próbkach tych współczynnik zadrzewienia wykroczył poza prze-

dział 0,6-1,2). W ostatnim wierszu tablicy 9 podany jest współczynnik r_{uv} korelacji między wysmukłością a średnią miąższością drzewa w drzewostanie. Nie przekraczają one w żadnej klasie wiekowej 0,3 i w myśl kryterium Fishera nie są istotne.

Prace cytowane

- [1] T. Nowakowski i J. Perkal, *Nowe metody badania zależności między wzrostem, wagą a wiekiem młodzieży*, Przegląd Antropologiczny 18 (1952), str. 12-33.
- [2] J. Perkal, *O pewnych korelacjach obszarowych*, Sprawozdanie ze wspólnego VII Zjazdu Polskich a III Zjazdu Czechosłowackich Matematyków, Praha 1949, str. 293-300.
- [3] — *O wskaźnikach antropologicznych*, Przegląd Antropologiczny 19 (1953), str. 208-221.
- [4] J. Perkal i J. Battek, *Próba oceny rozwoju drzewostanów*, Sylwan 99.1 (1955), str. 12-31.
- [5] K. Suchecki, *Rozwinięcie teorii ekologicznego wypełnienia przestrzeni i zastosowania jej w hodowli lasu*, Kraków 1953.
- [6] А. В. Тьюрин, И. М. Науменко, П. В. Воробанов, *Лесная вспомогательная книжка*, Москва 1946.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła 21. 7. 1956

Е. БАТТЭК и Ю. ПЕРКАЛЬ (Вроцлав)

БОНИТЕТ И ВИД ДРЕВОСТОЕВ

РЕЗЮМЕ

Статья является продолжением статьи [4]. На основании средних диаметров на высоте груди, высоты и возраста деревьев в древостое определяются объективно при помощи номограммы на чертеже 3 новые два признака древостоя: бонитет и вид.

Из статистической совокупности возраста (числа слоев на разрезе пня) деревьев экспериментального древостоя в Рогове (Польша), приведенной в таблице 1, следует, что определение возраста древостоя с точностью до года нереально. Более реальное является зачисление древостоев до 10-летних возрастных классов. Исходным материалом были данные относящиеся к 149 древостоям расброшенным по всей Польше (см. черт. 1). В таблице 2 приводится распределение этих древостоев по возрастным классам и лесном бонитете; таблица 3 является примером таблицы содержащей диаметры на высоте груди, высоты и возрасты деревьев одной выборки; таблица 4 содержит исходные данные 148 древостоев (один, слишком старый, отброшено).

Проанализировано дисперсию диаметров на высоте груди и высот, что привело к заключению, что дисперсия между деревьями, являющаяся следствием

дисперсии внутри древостоев, равняется 52, дисперсия вытекающая с различия между древостоями внутри вековых классов, 14-кратно большая и равняется 729, дисперсия же вытекающая с различия между возрастными классами равняется 19837, т. е. почти 30 раз больше чем дисперсия вызванная различием древостоев. Из этого следует, что имеются существенные различия среди равновековых древостоев. Это делает невозможным рассматривать древостои как выборки деревьев с данного класса.

После нормализации диаметров на высоте груди и высот на дисперсию 1, найдено, среди линейных комбинаций этих признаков, две некоррелированные комбинации (при помощи секулярного уравнения), одну с которых (прямую ортогональной средней квадратической регрессии) названо бонитетом древостоя, другую же видом.

Эти два новые признака древостоя можно найти с номограммы на чертеже 3 на основании диаметров на высоте груди, высоты и возраста древостоя. На неподвижной части номограммы имеются две точки: D с координатами равными среднему диаметру на высоте груди и высоте древостоя D ; D' лежащая на начерченной на номограмме кривой роста древостоев в точке соответствующей возрасту древостоя D . Затем накладывается подвижная часть номограммы (прозрачная) центром на точку D' и так, чтобы стрелка касалась кривой роста. Наконец, новые координаты, b (бонитет) и w (вид), точки D находим на решетке начерченной на подвижной части номограммы.

Таблица 9 содержит коэффициент корреляции в отдельных вековых классах: r_{bw} — между предлагаемым бонитетом а средним объёмом дерева в древостое; r_{Bw} — между лесным бонитетом а средним объёмом; r_{bV} — между предлагаемым бонитетом а общим объёмом всех деревьев в древостое на 1 гектар; r_{BV} — между лесным бонитетом а общим объёмом; r_{wV} — между видом а объёмом.

Легко заметить, что предлагаемый бонитет даёт лучшее представление о объёме чем употребляемый до сих пор лесной бонитет. Вид однако не является существенно коррелированным с объёмом.

J. BATTEK and J. PERKAL (Wrocław)

QUALITY AND SHAPE OF FOREST STANDS

SUMMARY

The present paper is a further development of paper [4]. On the basis of the means of breast high diameters, height and age of the trees in a forest stand we define in an objective way, by means of the nomogram given in Figure 3, two new characteristics of the forest stand: quality and shape.

From the frequency distribution of age (the number of grains on the cross-section of a trunk) of the trees of the experimental forest stand at Rogów, shown in Table 1, it follows that giving the age of a forest stand with the accuracy to a year is not practicable. It is more practicable to assign forest stands to 10-year age classes. The starting point has been the material concerning 149 forest stands scattered all over Poland (see Fig. 1). Table 2 shows the distribution of those forest stands according to age classes and tabular quality, Table 3 is an example of a table of breast-high diameters, heights and ages of trees in one sample, Table 4 contains the initial data concerning 148 forest stands (one has been rejected as too old).

We have analysed the variance of breast-high diameters and heights and found that the variance between the trees resulting from dispersion inside the forest stands is equal to 52, the variance resulting from the differences between the forest stands within the age classes is 14 times as large and is equal to 729, and the variance resulting from the differences between the age classes is 19 837, *i. e.*, nearly 30 times as much as the variance brought about by the differences between the forest stands. This implies in particular that there are significant differences between forest stands of different age, and those differences make it impossible to regard forest stands as random samples of the trees of a given age class.

Having normalized the breast-high diameters and heights to variance 1, we found among the linear combinations of those characteristics two uncorrelated combinations (by means of the secular equation), one of which (the correlation axis) has been termed the quality and the other the shape of the forest stand.

Those new characteristic of a forest stand are read on the nomogram represented in Figure 3 on the basis of the means of the breast-high diameters, heights and ages of the forest stands. On the immovable part of the nomogram we mark two points: D with the coordinates equal to the mean breast-high diameter and the height of a given forest stand D and the point D' , lying on the development line of the forest stands, drawn on the nomogram at the point corresponding to the age of the forest stand D . We then put the movable (transparent) part of the nomogram with its centre on the point D and the arrow tangent to the development line. Finally we read the new coordinates, b — quality and w — shape, of the point D showing on the network drawn on the movable part of the nomogram.

Table 9 gives the correlation coefficients in the individual age classes: $r_{b\bar{v}}$ — between the proposed quality and the mean volume of a tree of the forest stand; $r_{B\bar{v}}$ — between the used quality and this mean volume; r_{bV} — between the proposed quality and the volume of the forest stand in 1 ha; r_{BV} — between the used quality and the volume of the forest stand in 1 ha; and $r_{w\bar{v}}$ — between the shape and the volume. It can be seen that the proposed quality gives better evidence of the volume than the tabular quality used so far. Shape is not significantly correlated with volume.
