

H. STEINHAUS (Wrocław)

Rachunek prawdopodobieństwa jako narzędzie badań w przyrodzawstwie i produkcji

Artykuł ten, opracowany przy współpracy T. Czechowskiego, M. Fisza, O. Langego, J. Oderfelda i W. Sadowskiego, wygłoszony jako referat na VIII Zjeździe Matematyków Polskich w Warszawie dnia 9 września 1953 r., drukujemy według materiałów nadesłanych przez Komitet Organizacyjny Zjazdu.

I. Wstęp

To, co się działo z geometrią w ciągu XIX wieku, stało się z rachunkiem prawdopodobieństwa dopiero w XX. Kiedy D. Hilbert w swoich *Grundlagen der Geometrie* nadawał ostateczną formę logiczną odkryciom Gaussa, Łobaczewskiego i Bolyaia młodszego oraz późniejszym Beltramiego, Pascha, Kleina i Poincarégo, rachunek prawdopodobieństwa nie był wcale lepiej ufundowany niż za Laplace'a. Twierdzenia matematyki czystej, wzory przybliżone, reguły empiryczne i luźne fakty statystyczne łączyły się w coś, co zasługiwało raczej na nazwę umiejętności niż nauki matematycznej. Przed pierwszą wojną światową nikt nie wiedział naprawdę, czy teoria błędów — od dawna stosowana przez geodetów, astronomów i fizyków — da się uzasadnić matematycznie, czy też jest tylko opisem eksperymentów i obserwacji, chociaż wiedza matematyczna takich twórców tej teorii, jak Gauss, Bessel i Helmert była głęboka.

Przed pierwszą wojną światową nikt też nie zdawał sobie sprawy z tego, że twierdzenia rachunku prawdopodobieństwa są prawdziwe, a nie prawdopodobne. Sformułowanie prawa wielkich liczb w podręczniku E. Czuber'a, najobszerniejszym i zwłaszcza w zasięgu języka niemieckiego najpoczytniejszym, było takie, że jeżeli miało jakiś sens, to sens prawa mocnego, ale autor — jak zresztą wszyscy jemu współcześni probabiliści — umiał udowodnić tylko prawo słabe, czyli prawo Bernoulliego. Dla gry w orla i reszkę mocne prawo wielkich liczb jest równoważne z twierdzeniem Borela o rozwiniciach dwójkowych, które było wcześniejsze o kilka lat od wspomnianego podręcznika, ale sam Borel nie spostrzegł tej równoważności; jak wszyscy wtedy, sądził, że rachunek prawdopodobieństwa jest doktryną o tworach swoistych, a własności rozwinąć dwójkowych dotyczą zwykłych liczb rzeczywistych. Pierwszy

uświadomił sobie mocne prawo wielkich liczb Cantelli w 1916 r. i podał dowód. W 1917 r. zrobił to samo niezależnie S. Mazurkiewicz, jeden z trzech twórców warszawskiej szkoły matematycznej; oddzielony frontem wojennym od Włoch nie znał publikacji Cantelliego.

Tak więc linia rozwojowa rachunku prawdopodobieństwa doszła do Polski właściwie dopiero po pierwszej wojnie światowej. Przedtem podręcznik Gosiewskiego, zaopatrzony w doskonałą bibliografię, reprezentował u nas epokę tę samą, co Czuber w Niemczech. Z naszych oryginalniejszych twórców tylko dwaj zasługują na wymienienie: W. Bortkiewicz i M. Smoluchowski. Bortkiewicz przebywał stale w Berlinie i mało był znany w kraju, chociaż on pierwszy wskazał na zastosowania prawa Poissona, które nazwał prawem małych liczb. Smoluchowski, jak powszechnie wiadomo, znakomicie rozwinął idee Maxwella i Boltzmana, czyli kinetyczną teorię materii opartą na rachunku prawdopodobieństwa, i zastosował ten rachunek do ruchów Browna, do zjawisk opalescencji i do innych zagadnień optyki i termodynamiki. Zajmował się także paradoksami tej teorii, znanymi pod nazwiskami Zermeli i Loschmidta.

Niewątpliwie, kilkuletni pobyt Smoluchowskiego we Lwowie musiał wpłynąć na tamtejszych matematyków, ale dopiero po wojnie, w 1922 r., ukazały się dwie prace w *Fundamenta Mathematicae*, w IV tomie, o rachunku prawdopodobieństwa. Autor pierwszej, A. Łomnicki, proponuje definiowanie prawdopodobieństwa przez całąkę Lebesgue'a i chce nadać pojęciu niezależności zmiennych losowych charakter matematyczny; autor drugiej pracy, H. Steinhaus, wprowadza po raz pierwszy szeregi o wyrazach losowych i redukuje aksjomatykę przeliczalnego ciągu rzutów orła-reszki do aksjomatyki miary Lebesgue'a. Jest znamienne, że żaden z tych autorów nie znał wtedy pracy Cantelliego, choć w drugiej pracy jest udowodnione ostrzejsze mocne prawo wielkich liczb niż dotychczasowe. Wkrótce jednak obie prace zostały prześcignięte przez dwóch reprezentantów szkoły moskiewskiej: A. Chinczyn udowodnił i ogłosił w *Fundamentach* twierdzenie o iterowanym logarytmie, tj. podał najostrzejsze sformułowanie prawa wielkich liczb dla alternatywy orzeł-reszka, A. Kołmogorow zaś ogłosił zasadniczą pracę o podstawach rachunku prawdopodobieństwa, w której program matematyzacji teorii prawdopodobieństwa został wykonany.

Te wspomnienia historyczne mają na celu pokazanie roli matematyki polskiej i wytłumaczenie obecnego stanu teorii i praktyki prawdopodobieństwa u nas. Kilkakrotnie zdarzało się, że najnowocześniejsze idee tej nauki zakwitły u nas, ale na krótko, i nigdy nie doszło do stworzenia silnej szkoły. Przyczyny były dwojakie. Siła atrakcyjna szkoły warszawskiej wciągała w jej orbitę znaczną część młodych matematyków i czyniła ich obojętnymi na wszystko, co nie było teorią mnogości; drugą

przyczyną, która zaczęła działać dopiero później, była niewyraźna sytuacja polityczna kraju, która w 1939 r. zamieniła się w tragiczną. W Warszawie obok S. Mazurkiewicza zajmował się rachunkiem prawdopodobieństwa tylko A. Rajchman. We Lwowie młodszy Łomnicki i S. Ulam ogłosili w paryskich *Comptes Rendus* notę o prawdopodobieństwie w produktach, która miała znaczenie dla ufundowania matematycznej teorii prawdopodobieństwa, w *Studia Mathematica* zaś zaczęła się od pracy M. Kaca seria prac o funkcjach niezależnych. A. Zygmund i J. Marcinkiewicz podali wariant prawa iterowanego logarytmu, który wzbudził sensację swoją paradoksalnością. W Warszawie i w Puławach rozwinęła się szkoła statystyczna J. Sławy-Neymana. Przed wojną wyemigrowali M. Kac, S. Ulam i Łomnicki młodszy, a także J. Sława-Neyman i jego uczeń W. Kozakiewicz; nie wiadomo, gdzie zaginął J. Marcinkiewicz zaraz z początkiem wojny; z rąk gestapowców ponieśli śmierć Łomnicki starszy i A. Rajchman. Po wojnie tylko garstka ludzi znalazła się w kraju i można dziś na palcach policzyć tych, co znają teorię i praktykę prawdopodobieństwa.

Tymczasem budowa naszego państwa postawiła nas przed zadaniami przewyższającymi siły tej szczupłej garstki. Dysproporcja między tymi siłami a mnogością zagadnień czyni nierealnym każdy program, który obejmuje całość problematyki probabilistycznej.

W referacie przedstawimy pokrótce obecny stan rachunku prawdopodobieństwa i jego ważniejszych zastosowań, ich kierunki rozwojowe oraz rosnący nieustannie zakres środków matematycznych, którymi rachunek prawdopodobieństwa i jego zastosowania się posługują. Szczególną uwagę zwrócimy na dorobek polski, tam gdzie on występuje, i postaramy się wyciągnąć stąd wnioski i sugestie dotyczące zadań, jakie w tej dziedzinie stoją przed matematykami polskimi. Zastanowimy się też nad tym, co należy zrobić, żeby wykształcić specjalistów, którym by można powierzyć nie tylko nauczanie młodzieży, ale także wprowadzenie znanych metod statystycznych do produkcji i obrotu towarowego oraz do nauk przyrodniczych i lekarskich. Najtrudniejsze pytanie będzie dotyczyło wykształcenia ludzi w rozwiązywaniu konkretnych zagadnień praktycznych, które nie podpadają pod schematy typowe, i tego, jak usunąć nieufność, którą żywią do matematyków praktycy, przyzwyczajeni do empiryzmu, a która sprawia, że znachorstwo wydaje się nieraz właściwsze od racjonalnego postępowania. Znachorstwem nazywamy bezkrytyczną rutynę.

II. Teoria funkcji niezależnych i ich zastosowania do mechaniki i fizyki

Do polskiego dorobku teoretycznego należy tutaj teoria funkcji niezależnych, w szczególności teoria szeregów potęgowych o współczyn-

nikach losowych. Stąd wzięło się pierwsze poprawne sformułowanie twierdzenia Borela o takich szeregach (Math. Zeitschrift 31 (1929)), a w końcu potwierdzenie koniektury Blackwella przez C. Ryll-Nardzewskiego (w XIII tomie Studiów w 1953 r.), która rozstrzyga kompletnie zagadnienie Borela przy niezależności współczynników. Dużą rolę w rozwoju teorii prawdopodobieństwa w tym właśnie kierunku odegrała znajomość miary i całki Lebesgue'a, co zawdzięczamy W. Sierpińskiemu, S. Banachowi, A. Tarskiemu i S. Saksowi. Dlatego zagadnienia z teorii procesów ergodycznych i stochastycznych trafiły na grunt przygotowany. Świadczy o tym sporo dzisiejszych rezultatów E. Marczewskiego, C. Ryll-Nardzewskiego, S. Hartmana, K. Urbanika i innych. Nie są zakończone jednak zagadnienia związane z pojęciem efektywnego, a więc indywidualnego ciągu przypadkowego. U Misesa jest on jeszcze pojęciem swoistym, niematematycznym, u nas jest taki ciąg zdefiniowany (por. pracę o funkcjach niezależnych w tomie XI Studia Mathematica (1950)); z tej definicji wynika, że efektywnym przykładem jest ciąg cyfr dwójkowego rozwinięcia efektywnej liczby absolutnie-normalnej, określonej efektywnie znacznie wcześniej przez W. Sierpińskiego.

Wprowadzenie funkcji przypadkowych pozwala traktować zmienne losowe jako funkcje zmiennej pomocniczej t . Doprowadziło to do spostrzeżenia, że w fizyce mogą wystąpić takie funkcje czasu t , które nadają przebiegom zjawisk niezależność w sensie stochastycznym, to jest w sensie Kołmogorowa. To spostrzeżenie zawdzięcza się temu, że u nas skonkretyzowano pojęcie niezależności stwierdzając np., że niezależne wzajemnie są dwie funkcje Peano określające krzywą wypełniającą kwadrat i że niezależne są w przedziale nieskończonym funkcje harmoniczne o okresach niewspółmiernych. To spostrzeżenie prowadzi do nowej interpretacji rachunku prawdopodobieństwa; przez nadanie zmiennej pomocniczej roli czasu można zastosować twierdzenia rachunku prawdopodobieństwa do niektórych modeli mechanicznych, odbierając im zupełnie charakter losowy. Łatwo to pokazać na przykładzie pudełka sześciennego, w którym rój punktów materialnych odbija się od ścian według klasycznego prawa równych kątów. Otrzymuje się wyniki dotyczące ekwipartycji cząstek i ruchu środka masy, które nie różnią się wcale od tych, które daje rachunek prawdopodobieństwa, a jednak są zupełnie inaczej uzasadnione: klasyczne rozwiązanie zadania opiera się na postulatach, które ani matematycznie, ani mechanicznie nie dadzą się dowieść, natomiast tutaj operuje się tylko analizą matematyczną i własnościami ruchu bez sił zewnętrznych, a zamiast prawdopodobieństwa zjawisk otrzymuje się ich frekwencje czasową.

Ponadto model pokazuje zgodność mechaniki deterministycznej dla każdej cząstki, której tor jest efektywnie wyznaczony, z takimi zja-

wiskami statystycznymi jak położenie środka masy; dotychczas wierzono na słowo, że te dwa aspekty są niesprzeczne. Rezultaty, o których mowa, można znaleźć w X, XII i XIII tomie Studiów. W tomie X i XIII są prace H. Steinhausa, w XII praca matematyków węgierskich E. Egerváryego i P. Turána, oparta na innej metodzie, powstała pod wpływem pierwszej z wymienionych: ich osiągnięciem jest oszacowanie czasu potrzebnego do zbliżenia się gazu do ekwipartycji. Idąc po tej linii, można się spodziewać uwolnienia od specjalnego kształtu zbiornika i otrzymania kiedyś bez rachunku prawdopodobieństwa wszystkiego, czym szczyści się kinetyczna teoria materii z XIX i z początku XX wieku. Ale już model specjalny wystarcza, żeby pokazać słuszność zarzutów Loschmidta i Zermelo — klasyczny sposób uzasadnienia drugiego prawa termodynamiki za pomocą rachunku prawdopodobieństwa jest błędny. Udoskonalenie modelu, o którym mówiliśmy, powinno objąć także cząstki rozciągle, to jest niepunktowe.

Powyższy przykład nasuwa zagadnienie turbulencji, czyli burzliwego ruchu cieczy. Tutaj równania Naviera-Stokesa odpowiadają prawom Gay-Lussaca i van der Waalsa z termodynamiki klasycznej, czyli fenomenologicznej, a więc należałoby i tu zrobić owe dwa kroki, które w teorii gazu zrobił wiek XIX i XX: stworzyć stochastyczną teorię turbulencji opartą na przypadkowym zachowaniu się cząstek cieczy, a potem — na wzór tego, co udało się w szczególnym przypadku roju cząstek gazu — uwolnić teorię od koncepcji probabilistycznych. Trudności są tu bez porównania większe, bo w cieczy idealizacja cząstek do punktów zbyt odbiega od rzeczywistości wobec tego, że cząstki są bliżej siebie niż w gazie i dlatego nie można zaniedbać ich rozmiarów.

III. Klasyczne zagadnienia teorii prawdopodobieństwa

Już we wstępie do referatu omówiliśmy szkicowo rozwój problematyki związanej z prawami wielkich liczb. Współczesny stan tego zagadnienia ujmują dwa zasadnicze twierdzenia Kołmogorowa o mocnym prawie wielkich liczb i twierdzenie Kołmogorowa o iterowanym logarytmie, uogólniające rezultaty A. Chinczyna. Dotychczas znane są tylko warunki dostateczne na to, żeby zachodziło mocne prawo wielkich liczb, jednak warunki te nie są konieczne, natomiast znane dotychczas warunki konieczne nie są dostateczne. Problematyka praw wielkich liczb stanowi fragment ogólnej teorii rozkładów granicznych sum zmiennych losowych. Do najstarszych wyników w tej teorii należą twierdzenia Moivre'a-Laplace'a i Poissona o granicy rozkładu dwumianowego oraz prawa wielkich liczb Bernoulliego i Poissona. W twierdzeniach tych mowa o rozkładzie granicznym standaryzowanych sum niezależnych zmiennych losowych, z których każda może przybierać z dodatnim prawdopodobień-

stwem dwie wartości. Rozkładami granicznymi są tu odpowiednio: normalny, Poissona i jednowartościowy.

Kwestia znalezienia warunków koniecznych i dostatecznych na to, by ciąg dystrybuant standaryzowanych sum zmiennych losowych był zbieżny do dystrybuanty Gaussa, gdy ilość dodajników wzrasta do nieskończoności, zaprzętała umysły wielu matematyków. Rozwiązanie tego zagadnienia ułatwiło wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa funkcji charakterystycznych.

Metodą funkcji charakterystycznych otrzymuje się łatwo twierdzenie Lapunowa i Lindeberga-Fellera o warunkach zbieżności do rozkładu normalnego.

Było jednak rzeczą jasną, że klasa możliwych rozkładów granicznych sum zmiennych losowych nie ogranicza się do rozkładów normalnego, Poissona i jednopunktowego. Co więcej: w wielu zagadnieniach, np. fizycznych, otrzymuje się rozkłady graniczne o nieskończonej wariancji. Powstała ponadto kwestia możliwych rozkładów granicznych sum unormowanych inaczej, niż to się robi przy standaryzowaniu.

Problem rozkładów granicznych sum zmiennych losowych wymagał więc nowego, ogólnego sformułowania. Dokonał tego A. Chinczyn. Wprowadził on tzw. podwójne sumy postaci

$$(1) \quad \zeta_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \dots + \xi_{nk_n},$$

w których składniki ξ_{nk} są niezależne, mogą się jednak zmieniać wraz z n , przy czym składniki poszczególne ξ_{nk} odgrywają coraz to mniejszą rolę, gdy ich liczba wzrasta do nieskończoności (ξ_{nk} jest nieskończenie małe). Rozważane dotąd standaryzowane sumy w centralnych twierdzeniach granicznych oraz średnie arytmetyczne w prawach wielkich liczb stanowią przypadek szczególny sum (1). Zagadnienie ogólnie sformułowane polega na

(A) znalezieniu klasy możliwych rozkładów granicznych sum (1),

(B) znalezieniu warunków koniecznych i dostatecznych, jakie muszą spełnić dystrybuanty zmiennych ξ_{nk} na to, by ciąg dystrybuant sum (1) był zbieżny do danej dystrybuanty.

Postawione zagadnienia zostały rozwiązane przez wprowadzenie teorii zmiennych nieskończenie podzielnych, tj. takich, które dla dowolnego naturalnego n mogą być przedstawione w postaci sumy n niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Szczególnym przypadkiem zmiennej nieskończenie podzielnej jest zmienna normalna oraz zmienna poissonowska. Warto zaznaczyć, że w myśl twierdzenia Craméra, jeżeli zmienna normalna jest kompozycją skończonej ilości zmiennych, to zmienne te są normalne. Analogiczne twierdzenie dla zmiennych poissonowskich udowodnił D. Rajkow.

Teoria rozkładów nieskończenie podzielnych, która powstała na gruncie teorii jednorodnych procesów stochastycznych, wywarła głęboki wpływ na teorię rozkładów granicznych sum niezależnych zmiennych losowych. Zasadniczą rolę odgrywa tu twierdzenie Gniedenki, pozwalające na badanie rozkładów granicznych sum niezależnych zmiennych losowych za pomocą badania granicy odpowiedniego ciągu dystrybuant zmiennych losowych nieskończenie podzielnych.

Zagadnienie (A) zostało rozwiązane przez A. Chinczyna, który znalazł, że klasa rozkładów granicznych sum (1), w których składniki ξ_{nk} są nieskończenie małe, pokrywa się z klasą rozkładów zmiennych nieskończenie podzielnych.

W oparciu o wspomniane twierdzenie Gniedenki otrzymano warunki konieczne i dostateczne zbieżności ciągu dystrybuant sum (1) do dystrybuanty danej. Wspomniane twierdzenie Lindeberga-Fellera otrzymuje się jako natychmiastowy wniosek z rozważanych twierdzeń.

Ograniczając się do sum narastających, tj. do sum postaci

$$(2) \quad \zeta_n = \left(\sum_{k=1}^n \xi_k \right) / B_n - A_n ,$$

P. Lévy znalazł klasę wszystkich możliwych rozkładów granicznych, tzw. klasę *L*. Jeżeli wszystkie ξ_k w (2) mają rozkład jednakowy, to jak wykazał A. Chinczyn i P. Lévy, jedynymi możliwymi rozkładami granicznymi sum (2) są rozkłady stabilne, tj. takie, że suma dwóch dowolnych niezależnych funkcji liniowych zmiennej losowej o rozkładzie stabilnym jest funkcją liniową zmiennej o takim samym rozkładzie.

Warto zauważyć, że rozkład normalny jest jedynym rozkładem stabilnym o skończonej wariancji, co tłumaczy dominującą rolę, jaką rozkład normalny ma w zastosowaniach teorii prawdopodobieństwa. Znane są poza tym dwa efektywne rozkłady stabilne: jednym z nich jest rozkład Cauchy'ego, drugim — rozkład graniczny, jaki się otrzymuje przy „błędnym ruchu” molekuly na linii prostej.

Jakkolwiek omawiana teoria rozkładów granicznych sum jest bardzo posunięta, to jednak są tu jeszcze zagadnienia nierozwiązane. W szczególności dalsze badania rozkładów stabilnych w celu efektywnego ich wyznaczenia ma znaczenie nie tylko teoretyczne, ale także dla zastosowań.

Z nowszych badań w zakresie rozkładów granicznych sum wspomnimy:

1. Wynik A. Rényiego, który znalazł warunki konieczne i dostateczne na to, by ciąg dystrybuant sum niezależnych, całkowito-liczbowych zmiennych losowych był zbieżny do dystrybuanty sumy niezależnych zmiennych Poissona.

2. Wynik M. Fisza, który znalazł klasę wszystkich możliwych rozkładów granicznych sum niezależnych r -punktowych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Okazało się, że poza rozkładem jednopunktowym należą do tej klasy jedynie rozkład normalny i Poissona oraz kempozycja zmiennych Poissona i zmiennej normalnej, zawierające co najwyżej $r-1$ składników.

Odrębną problematykę w zakresie rozkładów granicznych sum przedstawia sprecyzowanie twierdzeń granicznych przez wyznaczenie dokładności wzorów asymptotycznych. Zagadnienie to ma bardzo istotne znaczenie w zastosowaniach wyników teorii rozkładów granicznych sum. Z najważniejszych wyników należy tu wymienić twierdzenie Lapunowa-Craméra i Esseena, dotyczące dokładności wzorów asymptotycznych w integralnym i lokalnym twierdzeniu granicznym.

O stopniu aktualności tej problematyki może świadczyć fakt, że w ostatnim dziesięcioleciu ukazały się dwie prace, S. Bernsteina i W. Feller'a, precyzujące twierdzenie Moivre'a-Laplace'a.

Problematyka ta nie wzbudziła dotąd w Polsce szerszego zainteresowania. Pewne wyniki osiągnął M. Fisz.

Znane są podstawowe prace S. Bernsteina w zakresie rozkładów granicznych sum zależnych zmiennych losowych. Rozkładami granicznymi sum zmiennych zależnych równoważnych (w sensie Cantelliego) zajmowała się H. Milicer-Grużewska. Ze względów zarówno teoretycznych, jak i praktycznych byłoby pożądane rozszerzenie badań na funkcje, poza sumami, niezależnych i zależnych zmiennych losowych.

IV. Procesy stochastyczne

Na okres ostatnich dwudziestu lat historii rachunku prawdopodobieństwa przypada nie tylko stworzenie podstaw matematycznych (A. Kołmogorow) i bogaty w wyniki rozwój badań nad granicznymi rozkładami sum zmiennych przypadkowych, ale także powstanie nowego działu rachunku prawdopodobieństwa, noszącego nazwę „procesy stochastyczne”. W tym dziale, którego podstawy teoretyczne stworzył A. Kołmogorow, rachunek prawdopodobieństwa korzysta w niespotykanym dotąd zakresie z aparatu pojęciowego i analitycznego innych dyscyplin matematycznych, zwłaszcza teorii równań różniczkowych, całkowych, różniczkowo-całkowych, teorii szeregów Fourierowskich oraz analizy funkcjonalnej, stawiając jednocześnie zagadnienia nowe pod względem teoretycznym. Teoria procesów stochastycznych wywodzi się z dwóch źródeł. Jednym były rozważania Bacheliera o prawdopodobieństwach ciągłych, drugim prace A. Markowa o zdarzeniach losowych powiązanych w łańcuch.

W dziedzinie zastosowań procesy stochastyczne okazują się dobrymi modelami teoretycznymi do badania układów dynamicznych wtedy, gdy stan układu nie jest wyznaczony jednocześnie przez posiadane o nim informacje dla ustalonej wartości parametru, lecz może być wyznaczony jedynie z pewnym prawdopodobieństwem dla każdego z możliwych stanów. Pojęcia układu i stanu układu dla ustalonej wartości parametru na gruncie procesów stochastycznych mogą być rozumiane bardzo szeroko, np. amplituda sygnału telegraficznego, liczba zajętych linii centrali telefonicznej, liczba osobników badanej populacji, suma zapadłych płatności w przedsiębiorstwach ubezpieczeniowych itd. W szczególności procesy stochastyczne znajdują szerokie zastosowanie wszędzie, gdzie ze względów zasadniczych zawodzą metody determinizmu klasycznego, a więc np. w mechanice kwantowej i mechanice statystycznej.

Do opisywania stanów badanego układu używa się pojęcia funkcji przypadkowej $f(t)$, której wartościami są zmienne przypadkowe, a więc funkcje abstrakcyjne (funkcjonały) określone na zbiorze abstrakcyjnym Ω (zbiorze zdarzeń elementarnych). Z wielu względów wygodnie jest rozpatrywać funkcję przypadkową jako funkcję $f(t, \omega)$ dwóch zmiennych, określoną na $T \times \Omega$, gdzie T jest zbiorem wartości t . Ustalając t otrzymujemy jako wartości funkcji przypadkowej zmienne przypadkowe, ustalając zaś ω otrzymujemy funkcję zmiennej rzeczywistej t , zwaną *realizacją* procesu. Według Shuckiego wszystkie własności funkcji przypadkowej dają się całkowicie scharakteryzować przez n -wymiarowe rozkłady zmiennej przypadkowej $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, o składowych będących wartościami funkcji przypadkowej odpowiednio w dowolnych chwilach $t_1, t_2, \dots, t_n$. Mimo to dotychczasowe teorie funkcji przypadkowych określają funkcje przypadkowe w sposób w pewnym sensie fragmentaryczny, ściśle nawiązując do pewnych typów badanych zjawisk. Tak więc w teorii procesów stacjonarnych (w szerszym sensie) A. Chinczyn wyprowadza własności funkcji przypadkowych z warunków spełnianych przez pierwsze dwa momenty rozkładu funkcji przypadkowej. *Procesem Markowa* zaś nazywa się taki proces, w którym prawdopodobieństwa przyszłych stanów są jednoznacznie określone przez stan w danej chwili, analogicznie jak to ma miejsce w mechanice klasycznej.

Uwzględniając jeszcze definicję N. Wienera i P. Lévy'ego, przyjmującą za punkt wyjścia równanie stochastyczne, a także definicję analityczną przez szereg Fouriera o współczynnikach będących zmiennymi przypadkowymi, ściśle związaną ze wspomnianymi już badaniami H. Steinhausa, należy podkreślić fakt, że nie zawsze wszystkie własności funkcji przypadkowej mogą być uwidocznione w oparciu o jedną definicję; np. dotychczas nie wiadomo, czy zawsze określenie funkcji przypadkowej przez równanie stochastyczne daje informacje o jej funkcji ko-

relacyjnej, tj. o wartości oczekiwanej iloczynu $f(t, \omega) \cdot \overline{f(s, \omega)}$. Zagadnienie to jest związane z niedawnymi badaniami P. Lévy'ego. Z drugiej strony, funkcje stacjonarne na gruncie teorii korelacyjnej mogą nie być stacjonarne w sensie definicji Śluckiego.

Podstawową rolę w teorii procesów stacjonarnych odgrywa funkcja korelacyjna. Teoria procesów stacjonarnych, opierająca się wyłącznie na pierwszych momentach i na funkcji korelacyjnej, nosi nazwę *teorii korelacyjnej*. Twórcami tej teorii są A. Chinczyn, A. Kołmogorow i N. Wiener. W oparciu o teorię korelacyjną rozwiązano zagadnienie ekstrapolacji oraz zagadnienie filtracji. *Ekstrapolacja* polega na prognozie wartości funkcji przypadkowej na całej prostej t na podstawie znajomości wartości funkcji w pewnym zbiorze punktów, tak by średni błąd kwadratowy prognozy był najmniejszy. Zagadnienie ekstrapolacji ma prostą interpretację geometryczną w przestrzeni Hilberta. *Filtracja* polega również na prognozie wartości funkcji przypadkowej, w warunkach kiedy obserwowane wartości funkcji są obciążone błędami. Klasycznym zastosowaniem teorii filtracji jest w telekomunikacji zadanie oczyszczania sygnału z szumów.

Doniosłe znaczenie ma fakt, że funkcja korelacyjna okazała się funkcją określoną dodatnio: transformacja Fouriera pozwoliła związać funkcję korelacyjną z funkcją rozkładu przeciętnej mocy sygnału na poszczególne pasma częstości. Wynik ten ma szczególne znaczenie ze względu na to, że w oparciu o istniejące twierdzenie ergodyczne dla procesów stacjonarnych funkcja korelacyjna może być wyznaczona doświadczalnie na podstawie dowolnej realizacji sygnału. Teoria korelacyjna procesów stacjonarnych jest w przeważającej części teorią transformacji Fouriera, uogólnionej w tym sensie, że stosuje się ją nie tylko do funkcji o wartościach liczbowych, ale także do funkcji przypadkowych.

Proces stacjonarny w szerszym sensie może być interpretowany jako krzywa leżąca na kuli w przestrzeni Hilberta, a następnie jako grupa operatorów unitarnych. Metody analizy funkcyjnej znalazły zastosowanie do procesów stacjonarnych w badaniach A. Kołmogorowa, Karkunena, a w ostatnich latach i w pracach Grenandera, związanych z testowaniem hipotez statystycznych w procesach stochastycznych.

Szczególną dziedzinę zastosowań procesów stacjonarnych stanowi zagadnienie korelacji serii czasowych (zwanych w statystyce także „szeregami czasowymi”). W tej dziedzinie prace H. Wolda umożliwiły poprawne matematyczne ujęcie estymacji współczynników regresji i sprawdzania hipotez dotyczących tych współczynników. W związku z tym należy wspomnieć o aparacie stochastycznych równań różnicowych, służących do wyprowadzenia procesów stochastycznych, których realizacje stanowią stochastyczne serie czasowe.

Ważną klasę funkcji przypadkowych stanowią *procesy różnicowe*, tzn. takie, dla których przyrosty $f(t) - f(u)$ w niezachodzących na siebie przedziałach (t, u) są niezależne. Do procesów różnicowych zaliczają się w szczególności *proces Poissona*, tj. proces stochastyczny, w którym rozkład przyrostów jest poissonowski, oraz *ruch Browna*, tj. proces stochastyczny, w którym rozkład przyrostów jest normalny. Prawdopodobieństwo w tym ostatnim procesie może być zrozumiane jako miara Wienera w przestrzeni funkcji ciągłych (w przestrzeni realizacji).

Procesy typu Markowa stanowią klasę obszerniejszą od klasy procesów różnicowych. Dla procesów Markowa spełnione jest znane równanie związane z nazwiskami A. Markowa, M. Smoluchowskiego, A. Einsteina, Chapmana i A. Kołmogorowa. Często przyjmuje się to równanie za definicję procesu Markowa (np. A. Kołmogorow). Nasuwa się pytanie, czy każdy proces spełniający to równanie i poza tym ewentualnie spełniający pewne warunki regularności istotnie określa proces Markowa w sensie podanym wyżej.

Procesy Markowa znajdują zastosowanie w takich dziedzinach, jak obciążenie sieci telefonicznej, proces rozpadu promieniotwórczego, promieniowanie kosmiczne oraz w badaniach nad rozwojem populacji biologicznych, przy procesach dyfuzji i ruchu Browna. Specjalnym przypadkiem procesów Markowa są tzw. *procesy rozgałęzione*, opisujące rozpad jednostek na większą liczbę elementów. Procesy te mają zastosowanie przy badaniu łańcuskowych przemian chemicznych oraz tzw. kaskad promieniotwórczych.

Aparat analityczny stosowany w procesach typu Markowa, to układy równań różniczkowych liniowych, równanie typu parabolicznego oraz równanie różniczkowo-całkowe postaci nie spotykanej gdzie indziej. W badaniach niektórych autorów występują równania funkcyjne, np. u B. HARRISA równanie typu Koeniga. Podobnie A. RÉNYI w swych badaniach nad procesami o przyrostach niezależnych rezygnuje z aparatu teorii równań różniczkowych, korzystając z równań funkcyjnych. Przeniesienie pojęć i metod analizy funkcyjnej na grunt procesów Markowa można znaleźć w książce E. HILLE'a, *Functional analysis and semi-groups*, New-York 1948. W zastosowaniach praktycznych rachunku prawdopodobieństwa spotyka się często zagadnienia prowadzące do procesów stochastycznych nie będących procesami Markowa. Niektóre z nich mają postać $z(t) = f[x(t)]$, gdzie $x(t)$ jest procesem Markowa. Badaniem takich typów procesów nie-markowskich zajmował się A. RÉNYI, stwierdzając, że w zasadzie wszystkie procesy tego typu dają się sprowadzić do procesów Markowa, przy czym dla pewnych klas procesów nie-markowskich redukcja ta pozwala zbadać różne ich własności, np. własności ergodyczne.

W Polsce Grupa Funkcji Rzeczywistych Państwowego Instytutu Matematycznego rozpoczęła systematyczną pracę nad procesami stochastycznymi w styczniu 1951 r. i prowadzi ją głównie na konwersatorium we Wrocławiu, kierowanym przez E. Marczewskiego i H. Steinhausa. Wyjściową grupą tematów były procesy różnicowe jednorodne, w szczególności proces Poissona i ruch Browna, a pierwszym celem pracy było opracowanie dwu zasadniczych zagadnień:

1. Uproszczenia twierdzeń o rozkładach przez odrzucenie różnych założeń analitycznych lub zastąpienie ich innymi.

2. Opracowanie dowodów istnienia prawdopodobieństwa, których w podręcznikach na ogół nie ma.

Dla procesu Poissona udało się przestudiować obie te kwestie i otrzymać także nowe rezultaty.

Przedewszystkim, jeżeli funkcja $f(t)$ zmiennej nieujemnej spełnia warunki

$$(S) \quad \begin{aligned} f(0) &= 0, f(t) = 0, 1, 2, \dots, \\ f(t) &\text{ jest niemalejąca i ma skoki jednostkowe,} \end{aligned}$$

to dla procesu różnicowego jednorodnego, określonego w zbiorze funkcji spełniających warunki (S), przyrosty w czasie mają rozkład Poissona o wartości oczekiwanej proporcjonalnej do t .

E. Marczewski zauważył, że twierdzenie cytowane pozostaje słuszne, gdy zamiast badać przyrosty w przedziale o długości t bada się przyrost — czyli sumę skoków — w dowolnym zbiorze borelowskim o mierze t . Ta metoda operowania dowolnymi podzbiorami osi czasowej zamiast przedziałów okazała się korzystna. Na tej właśnie drodze C. Ryll-Nardzewski uzyskał wyniki analogiczne do podanego twierdzenia dla procesów bez założenia jednorodności.

Dla ruchu Browna postawione zagadnienia zostały opracowane przez S. Hartmana i C. Ryll-Nardzewskiego. Nie otrzymano wprawdzie nowych twierdzeń w tym zakresie — opracowano jedynie dowody, które trudno by znaleźć w literaturze.

Dalsze prace dotyczyły związków między teorią procesów stochastycznych a teorią ergodyczną, tak podkreślanych przez Craméra. Idąc po linii pytań H. Steinhausa, C. Ryll-Nardzewski sformułował i udowodnił twierdzenie ergodyczne o ruchu Browna, K. Urbanik zaś twierdzenie ergodyczne dla procesów jednorodnych „urodzeń i śmierci” oraz dalsze wyniki, które przedstawi sam na Zjeździe.

Grupa Statystyki Matematycznej PIM zajmowała się zagadnieniem statystycznej estymacji parametrów oraz sprawdzania hipotez staty-

stycznych w procesach Markowa. W tej dziedzinie pewne wyniki wstępne uzyskał O. Lange. Problematyka ta zasługuje na uwagę i wymaga dalszych badań.

V. Statystyka matematyczna

Statystyka matematyczna jako odrębna i ścisła dyscyplina matematyki zaczęła się rozwijać stosunkowo niedawno. W dawniejszych pracach stanowiła ona część opisanego we wstępie konglomeratu twierdzeń z rachunku prawdopodobieństwa, wzorów przybliżonych, obserwacji empirycznych oraz intuicyjnych reguł postępowania. Stosunkowo niedawno rozpoczęła się praca nad ścisłym sformułowaniem zagadnień oraz nad sprecyzowaniem przedmiotu badań statystyki matematycznej, głównie dzięki pracom J. Neymana i A. Walda.

Badania szły przede wszystkim w trzech kierunkach:

- 1) teoria estymacji,
- 2) teoria sprawdzania hipotez statystycznych,
- 3) zapoczątkowany stosunkowo najpóźniej kierunek badań, który można by nazwać *teorią doświadczenia statystycznego* (*design of experiments*, *опытное дело*).

Omówimy pokrótce stan każdego z tych trzech działów statystyki, wskazując na perspektywy rozwojowe.

1. Teoria estymacji. W teorii estymacji chodzi o konstrukcję metod pozwalających na oszacowanie wartości jednego lub więcej parametrów, które występują w rozkładzie zmiennych losowych będących przedmiotem obserwacji. Pierwsze rozwiązania dotyczące oszacowania nieznanego parametrów oparte były na słynnym twierdzeniu Bayesa i na tzw. postulacie Bayesa. Zakładano, iż nieznaną parametr, który szacujemy, jest zmienną losową o określonym rozkładzie (rozkład *a priori*). Jeśli rozkład ten nie był znany, korzystano z postulatu Bayesa, przyjmując, iż rozkład szacowanego parametru jest jednostajny. Bayesowskie rozwiązanie problemu estymacji spotkało się z poważną krytyką. Krytyka ta sprowadzała się do tego, że w praktyce bądź szacowany parametr jest wielkością stałą, bądź — jeśli jest zmienną losową — rozkład jego jest nieznaną i korzystanie w tych warunkach z postulatu Bayesa jest nieczym nie usprawiedliwione.

Podstawy nowoczesnej teorii estymacji zbudował J. Neyman, twórca rozpowszechnionej obecnie teorii *przedziałów ufności* (*confidence intervals*). Teoria ta jest nader ogólna, gdyż szacowany parametr może być zarówno wielkością stałą, jak i zmienną losową, przy czym w tym ostatnim przypadku znajomość jej rozkładu nie jest wymagana. Podkre-

ścić należy, że teoria Neymana w przeciwieństwie do podobnej teorii Fishera (*przedziały zaufania — fiducial intervals*) — ma jasny sens logiczny i interpretację frekwencyjną. Zarówno ta, jak i inne teorie Neymana, o których jeszcze będzie mowa, wolne są od wszelkich subiektywistycznych koncepcji pojęcia prawdopodobieństwa, czego nie można powiedzieć o teoriach Fishera. W pracach Neymana daje się tutaj zauważyć wpływ rosyjskiej szkoły prawdopodobieństwa, z której wyszedł Neyman jako uczeń S. Bernsteina. Wskazane jest, by matematycy polscy zajęli się bliższym zbadaniem wzajemnego stosunku teorii Neymana i Fishera.

Przy okazji praktycznych prac nad statystyczną kontrolą jakości, wykonanych w Polskim Komitecie Normalizacyjnym, J. Oderfeld zwrócił uwagę na ścisły związek wiarogodności (w sensie Fishera) z prawdopodobieństwem obliczonym z postulatu i twierdzenia Bayesa; H. Steinhaus nazwał następnie to prawdopodobieństwo „możliwością” i wykazał, że poprawnie zdefiniowana wiarogodność i możliwość są sobie równe; pokazał ponadto, że każda z obu metod *a priori* opiera się na innej hipotezie co do rozkładu *a priori*, przy czym obie hipotezy są równie sztuczne. W końcu H. Steinhaus zwrócił uwagę na istnienie weryfikacji frekwencyjnej Bayesa bez założeń co do rozkładu. Oznacza to rehabilitację teorii Bayesa.

Ostatnio rozpoczęto badania w zakresie estymacji nieparametrycznej. Chodzi tu o szacowanie nieznanego dystrybuanty lub gęstości. W szczególności bada się „przedziały” ufności, które z danym prawdopodobieństwem zawierają prawdziwą dystrybuantę obserwowanych zmiennych losowych. Jednym z pierwszych wyników dotyczących tej problematyki był wynik A. Kolmogorowa z 1933 r., w którym podane jest prawdopodobieństwo, z jakim empiryczna dystrybuanta zawarta jest w pewnym szczególnym przedziale ufności. Dalsze badania w tej dziedzinie prowadzili przede wszystkim N. Smirnow, A. Wald i J. Wolfowitz. Uzyskane wyniki są jeszcze bardzo skąpe i życzyć by sobie należało, by kontynuowano badania w tym zakresie.

2. Teoria sprawdzania hipotez statystycznych. Zasadniczym zagadnieniem w teorii sprawdzania hipotez statystycznych jest zbudowanie *testu*, tzn. reguły postępowania umożliwiającej rozstrzygnięcie na podstawie zaobserwowanych wartości zmiennych losowych, czy sprawdzaną hipotezę należy przyjąć czy odrzucić. Przez długi czas budowa odpowiednich testów oparta była na przesłankach czysto intuicyjnych i nie było ścisłej i ogólnej teorii sprawdzania hipotez statystycznych.

Nowoczesną teorię sprawdzania hipotez statystycznych zbudował J. Neyman wspólnie z E. Pearsonem. Neyman wykazał, że nie można zbudować teorii sprawdzania hipotez bez rozważania zbioru możliwych

hipotez. Główna idea Neymana polega na tym, iż znajduje się pewien obszar (zwany *obszarem krytycznym*) w *przestrzeni próby*, tj. w przestrzeni możliwych wyników obserwacji statystycznych. Jeżeli zaobserwowany punkt w wielowymiarowej przestrzeni prób należy do owego obszaru, to hipotezę odrzucamy, w przeciwnym razie hipotezę przyjmujemy. Obszar krytyczny buduje się w ten sposób, żeby był podobny do przestrzeni próby, tzn. by prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy, gdy jest prawdziwa, było równe z góry danej liczbie.

Spośród obszarów krytycznych przyjmuje się ten, dla którego prawdopodobieństwo przyjęcia hipotezy, gdy jest ona fałszywa, będzie możliwie najmniejsze. Obszar taki nazywa się *obszarem największej mocy*. Teoria Neymana i Pearsona dostarcza układu twierdzeń, które pozwalają na konstrukcję obszarów krytycznych o powyższych własnościach, jak również daje pewne rozwiązanie również dla tych przypadków, gdy obszary o rozpatrzonych własnościach nie istnieją. Teoria ta ma jednak poważne ograniczenie. Stosuje się ona jedynie do tzw. *hipotez parametrycznych*, tj. zawierających pewne przypuszczenie dotyczące wartości jednego lub więcej parametrów, podczas gdy sam kształt dystrybucyjny uważa się za znany.

W zakresie testów parametrycznych rozpoczęto w Polsce prace nad zastosowaniem testów opartych na rozkładzie granicznym ilorazu różnicy dwóch zmiennych losowych przez inną sumę (M. Fiszer i J. Oderfeld).

Dopiero stosunkowo niedawno rozpoczęto poważniejsze badania w zakresie sprawdzania hipotez nieparametrycznych. Wprawdzie od dość dawna istniało kilka testów nieparametrycznych, np. znany test χ^2 , wszystkie one jednak nie miały dostatecznej podbudowy teoretycznej. Warto tu wspomnieć o dwóch ważnych testach nieparametrycznych, tzw. testach Kołmogorowa i Smirnowa, opartych na dwóch twierdzeniach granicznych tych autorów.

W tym miejscu należy wspomnieć o ciekawym zastosowaniu do statystyki matematycznej teorii procesów stochastycznych. Są nim podane przez Dooba i Donskera dowody wspomnianych twierdzeń granicznych Kołmogorowa i Smirnowa. Pierwotne dowody tych twierdzeń były bardzo trudne. Doob podał heurystyczny dowód oparty na teorii elementarnego procesu Gaussa, a następnie Donsker uzasadnił słuszność tego dowodu. W ten sposób został stworzony pomost między statystyką matematyczną a teorią procesów stochastycznych. Pożądane jest, żeby matematycy polscy zainteresowali się tą problematyką. Jest możliwe, że metoda Dooba i Donskera pozwoli na rozwiązanie zagadnienia mocy testu λ Kołmogorowa i Smirnowa.

Systematyczne badania prowadzące do zbudowania ogólnej teorii sprawdzania hipotez nieparametrycznych rozpoczął R. A. Fisher, który

zbudował metodę polegającą na permutowaniu obserwacji, która umożliwiała budowę obszarów podobnych dla hipotez nieparametrycznych. Dalsze rozwinięcie tej metody dali S. Scheffé, E. Lehman i C. Stein. W toku tych badań wykazano, przy dość słabych założeniach, że metoda permutacji obserwacji jest jedyną, która pozwala na konstrukcję obszarów podobnych. Również w ostatnim okresie rozpoczęto badania mocy testów nieparametrycznych. Pewne wyniki w tej dziedzinie ma F. Massey oraz W. Hoefding, który zbadał moc testów nieparametrycznych zbudowanych metodą permutowania obserwacji, gdy liczba obserwacji zmierza do nieskończoności.

Wydaje się, że ten kierunek badań nie tylko jest interesujący i ważny z punktu widzenia teoretycznego, ale ma także duże znaczenie praktyczne, bo w zastosowaniach często mamy do czynienia z sytuacją, gdy postać funkcyjna dystrybucyjny obserwowanych zmiennych losowych nie jest znana. Dotychczas w takiej sytuacji trzeba było rezygnować z zastosowania testów statystycznych, a tym samym z używania aparatu statystyki matematycznej. Teoria sprawdzania hipotez nieparametrycznych pozwala więc na wielkie rozszerzenie zasięgu zjawisk dostępnych badaniu statystycznemu.

W związku z tymi badaniami pozostają badania dotyczące problemu k prób ($k \geq 2$) pochodzących z różnych populacji o nieznanymi rozkładach. Chodzi tu nie tyle o sprawdzenie jakiejś konkretnej hipotezy, ile o rozstrzygnięcie, które z wielu możliwych hipotez dotyczących tych k -populacji jest słuszna. Badania w tym kierunku podjęte ostatnio zostały przez F. Mostellera, W. Kruskala i innych. Pewne wyniki w tym zakresie uzyskał W. Sadowski, w szczególności w zagadnieniu rozstrzygnięcia, która spośród k populacji ma największą wariancję. I ten kierunek badań ma również znaczenie praktyczne.

3. Teoria doświadczenia statystycznego. Trzecim działem statystyki jest tzw. *teoria doświadczenia statystycznego*, która wyrosła na gruncie zastosowań statystyki, głównie w doświadczalnictwie rolnym.

Istotną rolę w stosowaniu statystyki gra sam schemat doświadczenia. Przy tej samej liczbie obserwacji — zależnie od schematu doświadczenia — można mieć mniejszą lub większą ilość „informacji”. Systematyczne badania w tym kierunku zostały zapoczątkowane przez R. A. Fishera i J. Neymana. Poważne rezultaty mają tu także S. Barbacki, S. Kołodziejczyk i K. Iwaszkiewicz.

W ciągu ostatnich dziesięciu lat rozwinęła się bardzo płodna teoria zwana *analizą sekwencyjną*. W klasycznej teorii statystyki liczba obserwacji, na których podstawie prowadzi się wnioskowanie statystyczne, jest określona z góry przed rozpoczęciem doświadczenia. Nowe, odmienne

podejście dał A. Wald, wprowadzając tzw. analizę sekwencyjną, którą słuszniej może należałoby nazwać metodą sekwencyjną. Charakterystyczną jej cechą jest to, że liczba obserwacji nie jest stała i z góry dana, lecz jest zmienną losową. Sprawdzanie hipotez statystycznych odbywa się według tej metody kolejno, etapami. W każdym etapie doświadczenia możliwe są zawsze trzy decyzje:

- a) przyjąć sprawdzaną hipotezę,
- b) odrzucić hipotezę,
- c) dokonać dodatkowej obserwacji.

Okazuje się, że postępowanie takie jest znacznie efektywniejsze od postępowania klasycznego. Przy danych z góry prawdopodobieństwach odrzucenia hipotezy prawdziwej (błąd pierwszego rodzaju) oraz przyjęcia hipotezy fałszywej (błąd drugiego rodzaju) liczba obserwacji, jakiej wymaga metoda klasyczna, jest przeciętnie dwa razy większa niż przy metodzie sekwencyjnej.

Analiza sekwencyjna znajduje się w stałym rozwoju, głównie dzięki pracom M. Girshicka, J. Wolfowitza i innych. H. Steinhaus zauważył, że teoria Bayesa daje znacznie naturalniejsze zrozumienie analizy sekwencyjnej, niż podejście Walda i jego szkoły.

Metoda sekwencyjna okazała się szczególnie pożyteczna w zastosowaniu do teorii estymacji. Neymanowska teoria przedziałów ufności miała poważny mankament, obniżający bardzo jej znaczenie praktyczne. W teorii tej bowiem długość przedziałów ufności (w większości praktycznie spotykanych sytuacji) jest zmienną losową. Oznacza to, iż przed doświadczeniem nigdy nie wiadomo, jaka będzie długość otrzymanego przedziału, za pomocą którego szacujemy nieznaną wartość parametru. Okazuje się, iż niedostatek ten można usunąć, jeśli liczba obserwacji jest zmienną losową. Rozwiązanie tego zagadnienia dał C. Stein, a wyniki jego zostały później uogólnione przez A. Walda. Ogólnie można powiedzieć, że badania związane z metodą sekwencyjną mają doniosłe znaczenie teoretyczne i praktyczne i dlatego badania te, zwłaszcza w dziedzinie statystycznej kontroli jakości, należy kontynuować. W szczególności należy rozwijać badania w zakresie zastosowania metody sekwencyjnej do teorii estymacji, gdzie wiele kwestii jest jeszcze nierozstrzygniętych. Ponadto wydaje się, że należałoby podjąć próby zastosowania metody sekwencyjnej do sprawdzania hipotez nieparametrycznych. Pewien schemat losowania typu sekwencyjnego, dogodny w badaniach metodą reprezentacyjną, był rozważany przez M. Fiszę.

4. Ogólna teoria statystycznych funkcji decyzji. Niezwykle doniosłym teoretycznie kierunkiem badań jest teoria statystycznych funkcji decyzji, której twórcą był A. Wald. Teoria ta łączy wszystkie trady-

cyjne działy statystyki w harmonijną całość. Obejmuje ona wszystkie działy statystyki matematycznej. Poza tym w świetle tej teorii staje się zupełnie jasna swoistość statystyki matematycznej, odróżniająca ją od innych dyscyplin matematycznych, a zwłaszcza od rachunku prawdopodobieństwa, co ma duże znaczenie metodologiczne.

Każdy problem statystycznej decyzji powstaje na tle pewnego zbioru (skończonego lub nieskończonego) obserwowanych zmiennych losowych (zależnych lub niezależnych) o nieznanym rozkładzie łącznym. O rozkładzie tym wiadomo jedynie tyle, że jest on elementem pewnej klasy rozkładów, która jest dana w każdej konkretnej sytuacji. Zagadnienie polega na tym, by mając zbiór decyzji, jakie są możliwe do podjęcia w związku z nieznanym rozkładem, podjąć jedną z nich. Decyzja tego typu nosi nazwę *decyzji ostatecznej*, w odróżnieniu od decyzji dotyczących sposobu przeprowadzenia doświadczenia, tzn. sposobu obserwowania wartości zmiennych losowych. W każdym konkretnym przypadku przestrzeni decyzji możliwych jest z góry dana; jest ona sumą dwóch przestrzeni: przestrzeni decyzji ostatecznych oraz przestrzeni decyzji dotyczących sposobu przeprowadzenia doświadczenia. Funkcja decyzji zbudowana jest w taki sposób, iż wartościami jej są elementy przestrzeni decyzji możliwych, argumentami zaś punkty w przestrzeni prób. Całe zagadnienie sprowadza się do skonstruowania takiej funkcji decyzji, która miałaby odpowiednie własności. Dla rozstrzygnięcia, która z funkcji decyzji jest lepsza, A. Wald wprowadził dwa pojęcia pomocnicze: funkcję wagi i funkcję ryzyka.

W swym obecnym stanie teoria funkcji decyzji składa się przede wszystkim z twierdzeń podających warunki istnienia funkcji decyzji. W bardzo niewielkim jeszcze zakresie teoria ta pozwala na efektywne rozwiązywanie konkretnych zagadnień statystycznych, jakkolwiek i w tym zakresie mamy już pewne wyniki, uzyskane głównie przez samego A. Walda oraz J. Wolfowitza. Prace, mające na celu uzyskanie efektywnych rozwiązań zagadnień statystycznych na podstawie teorii funkcji decyzji, są kontynuowane, chociaż uzyskiwane rezultaty ciągle jeszcze mają jedynie znaczenie teoretyczne.

Interesujące jest to, że jakkolwiek statystyka matematyczna w głównej mierze korzysta z aparatu probabilistycznego, często ucieka się także do innych gałęzi matematyki. W szczególności teoria funkcji decyzji korzysta między innymi z topologii i z analizy funkcyjnej.

W zakończeniu należy podkreślić, że rozwój teorii statystyki matematycznej we wszystkich wskazanych powyżej kierunkach ma znaczenie także dla zastosowań statystyki.

O zastosowaniach statystyki matematycznej w Polsce do produkcji i techniki będzie mowa nieco dalej. W tym miejscu wspomnimy o zasto-

sowaniach do zagadnień demograficznych oraz doświadczalnictwa rolnego. W obu tych dziedzinach zastosowań statystyka polska ma pewne osiągnięcia. Tak np. materiały Narodowego Spisu Powszechnego z 1950 r. opracowywano metodą reprezentacyjną, co pozwoliło na uzyskanie najważniejszych wyników w ciągu kilku miesięcy. Również i w doświadczalnictwie rolnym mamy interesujące rezultaty. Wydaje się jednak, że wciąż jeszcze zbyt mało korzysta się w tych dziedzinach ze statystyki matematycznej, co odbija się ujemnie zarówno na praktyce, jak i na rozwoju samej teorii statystyki matematycznej.

VI. Zastosowania do produkcji przemysłowej

1. Zagadnienia ogólne. Szczególne zastosowanie ma statystyka matematyczna w dziedzinie produkcji przemysłowej. Kluczowym zagadnieniem jest tutaj weryfikacja hipotez statystycznych. Znamy wiele testów uniwersalnych i specjalnych, nieraz bardzo pomysłowych, istnieją też ogólne teorie testów, które zostały wyżej opisane. Bardzo mało zrobiono jednak, żeby odpowiedzieć na dwa pytania praktyka:

1° Jaka ma być wielkość próbki?

2° Jaki poziom istotności zastosować?

Oba te pytania są ze sobą sprzężone, gdyż wielkość próbki zależy od przyjętego poziomu istotności i na odwrót.

Na żadne z tych pytań matematyk nie może odpowiedzieć z sensem bez ekonomii. Przy jej pomocy może on odpowiedzieć konkretnie na pierwsze pytanie, a zamiast odpowiedzi na drugie pytanie może dać regułę postępowania sformułowaną w terminach zrozumiałych i uchwytnych dla praktyka. Wyjaśnimy to biorąc za przykład dwa skrajne przypadki sprawdzania produktów. Jeśli sprawdzanie nie kosztuje, można i należy zrezygnować z metod statystycznych i sprawdzać całą ilość produktu. Jeśli sprawdzanie kosztuje nieskończenie wiele, trzeba zrezygnować z badania. Między tymi kresami leżą wszystkie przypadki praktyczne i w każdym z nich praktyk pyta o wielkość próbki i o regułę postępowania. Można na to odpowiedzieć, jeśli się sprecyzuje, jaka jest jego cena, jaki jest cel badania i jaka jest cena konsekwencji, które pociąga za sobą decyzja oparta na błędnym wyniku badania.

Postulat najmniejszej ogólnej szkody gospodarczej, wprowadzony przez H. Steinhaus'a, pozwala na ustalenie wielkości próbki i podanie reguły postępowania, przy czym nie korzysta się wcale z arbitralnych poziomów istotności. Należy jednak zaznaczyć, że oszacowanie tej szkody trafia na trudności, gdyż wśród ekonomistów nie ma zgody co do zasadniczych kwestii, a nawet można spotkać się z radą, żeby opierać

wyznaczenie liczebności próbki (które tu jest głównym zagadnieniem) na doświadczeniu praktyków. Oczywiście takie rozwiązanie byłoby znachorstwem tym gorszym, że zwykle praktycy zwracają się do matematyków, żeby ci orzekli, czy ich zwyczaje są uzasadnione. S. Drobot powziął niezmiernie oryginalną i trafną myśl rozcięcia węzła gordyjskiego przez zastosowanie analizy wymiarowej do statystycznej kontroli jakości. Praca napisana przez niego i M. Warmusa ukazała się w drugim tomie *Zastosowań Matematyki*. Głównym rezultatem jest zbudowanie wzoru na liczebność próbki, w którym obok takich zmiennych, jak liczebność partii, wartość sztuki, koszt próbowania jednej sztuki itd., które są zwykle bezpośrednio znane, występują inne w taki sposób, że wiadomo, jakie wstępne badania statystyczne i dane empiryczne są potrzebne do ich wyznaczenia. Efekt praktyczny jest taki, że przyjęcie liczebności próbki dla jednej partii towaru wyznacza ją już dla wszystkich. Niezmierna ważność zagadnienia i ogólność metody uprawniają nas do nadziei, że systematyczne przeprowadzenie idei Drobeta nie tylko ożywi statystykę polską, ale przyczyni się do ugruntowania naszej pozycji naukowej w ogólnym znaczeniu tego słowa.

Liczne są zastosowania analizy sekwencyjnej do badania produkcji. Pewne prace aplikacyjne wykonano w Komisji Statystycznej Kontroli Jakości w Polskim Komitecie Normalizacyjnym, prowadzi się je nadal w Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk.

Interesującym kierunkiem statystyki matematycznej jest wnioskowanie na podstawie naturalnego lub sztucznego uporządkowania elementów w próbie.

Pierwszy przypadek zachodzi na przykład przy bieżącym badaniu produktów, gdy o stałości produkcji wnosimy na podstawie zespołu pomiarów uszeregowanych w kolejności chronologicznej. Ważnym tego zastosowaniem stały się karty kontrolne, wprowadzone przez Shewharta i obecnie używane w przemyśle niemal wszystkich krajów. Pod naciskiem potrzeb praktyki, metody matematyczne doznały tu pewnej wulgaryzacji, co skłania do wznowienia badań teoretycznych.

Drugi przypadek dotyczy między innymi rozkładu elementów próbek uporządkowanych rosnąco lub ich kombinacji liniowych. Interesujące wyniki uzyskali w tym zakresie S. Romanowski i inni.

Pewne prace w obu kierunkach prowadzi się obecnie w Instytucie Matematycznym P.A.N.

We wszystkich zastosowaniach przemysłowych statystyki matematycznej stale potrzebna jest pomoc matematyki klasycznej, w szczególności analizy.

Niezwykle płodne okazało się zastosowanie analizy wymiarowej do statystycznej kontroli jakości. Wymienione już prace Drobeta i War-

musa pozwoliły skutecznie zaatakować na nowej drodze zagadnienie wielkości próbki i oświectliły z nowej strony rolę eksperymentu statystycznego.

Wydaje się, że cenną pomocą dla statystyki matematycznej w sprawach jednorodności populacji będą metody taksonomiczne (Ogólna Grupa Zastosowań Instytutu Matematycznego P.A.N.).

Duże znaczenie dla probabilistyki mają metody numeryczne matematyki, rozwijane w kilku grupach Instytutu Matematycznego. Jako przykład wymienimy zastosowanie do probabilistyki ciągów Renarda (J. Oderfeld).

Wyraźnie zarysowuje się ścisły kontakt między probabilistyką a naukami technicznymi, w szczególności nauką o wytrzymałości materiałów. Ruch ten daje się zauważyć również w naszym kraju (z okresu międzywojennego prace W. Wierzbickiego, w ostatnich latach W. Mośzyńskiego, W. Pogorzelskiego i J. Oderfelda).

Niezbędna w naszym kraju, lecz dotąd nie okazana, jest dla probabilistyki przemysłowej pomoc ekonomistów. Bez niej nie jest możliwe efektywne rozwiązanie takich fundamentalnych zagadnień, jak sprawa liczebności próbki i bezpieczeństwa konstrukcji.

2. Niektóre zastosowania. Z wielu zastosowań przemysłowych statystyki matematycznej wymienimy tylko kilka, ograniczając się do tych, które opracowuje się w naszym kraju i które wydają się nam szczególnie ważne.

A. Górnictwo. Do zagadnień niemal zupełnie nietkniętych matematycznie należy problem wierceń próbnych w górnictwie. Obejmuje on poszukiwanie i charakteryzowanie złóż węgla, cynku, ołowiu, ropy itd., ma więc pierwszorzędne znaczenie ekonomiczne. Problem rozpada się na kompleksy zagadnień. Pierwszy z nich to rozmieszczenie wierceń próbnych, drugi to wydobycie informacji zawartych w obrazie dostarczonym przez gotowe wiercenia. Większość geologów niezupełnie zdaje sobie sprawę z tego, że obok morfologicznego istnieje matematyczny aspekt zagadnienia. Bierze się to stąd, że niezmiernie trudno jest abstrahować od doświadczeń, które składają się na wiedzę praktycznego geologa; doświadczenia te ułatwiają znalezienie właściwej drogi w każdym terenie z osobna, a utrudniają stworzenie jasno określonej metody, którą można by zakomunikować innym. Pierwszym krokiem matematyka jest studium statystyczne obszarów pokrytych otworami wiertniczymi. Zmierza ono do scharakteryzowania korelacji między grubością złożeń w dwóch punktach odległych o d , która to korelacja $f(d)$ okaże się funkcją malejącą zmiennej d . Gdy znajdziemy tę funkcję, będziemy mogli podać sposób obliczania zawartości złóż z dat dostarczonych przez otwory. To zadanie

nie jest bynajmniej łatwe, ale matematycznie niezmiernie interesujące. Obok trudności teoretycznych pojawia się inna, mianowicie trudność znalezienia prostych schematów, które pozwoliłyby powierzyć rachunki siłom pomocniczym i nie wymagały żmudnych obliczeń. Po rozwiązaniu tego zadania można będzie pomyśleć o problemie planowania otworów wiertniczych. Zauważymy tutaj, że zarówno zasada najmniejszej szkody gospodarczej, jak i analiza wymiarowa mogą i powinny znaleźć tu zastosowanie.

B. Wytrzymałość konstrukcji. Jak zauważył W. Wierzbicki, bezpieczeństwo konstrukcji budowlanych podpada pod rachunek prawdopodobieństwa, bo wytrzymałość elementów konstrukcyjnych jest zmienną losową. Tak np. wytrzymałość pręta na zerwanie jest zmienną losową, bo fabrykowane seryjnie pręty o minimalnie jednakowym przekroju z jednego materiału, różnią się indywidualnie. Stąd ich wytrzymałość na zerwanie jest różna; jest to zmienna losowa, której wartość oczekiwaną i rozrzut na ogół znamy.

Ale i obciążenie, któremu poddany będzie element konstrukcji, jest zmienną losową i to z dwóch powodów. Pierwszy powód to nieuniknione niedokładności w wykonaniu, przez co np. w kratownicy mogą powstać naprężenia wewnętrzne. Drugi powód jest na ogół ważniejszy. Jest nim zmienność obciążeń roboczych w czasie. Na przykład pług może orać grunt piaszczysty albo kamienisty, rama samochodu w czasie półgodzinnej jazdy po mieście podlega wielu tysiącom wstrząsów o różnej amplitudzie i częstotliwości, więzar dachowy podlega obciążeniu zależnemu od prędkości wiatru itd. Z tego wynika, że życie konstrukcji jest zmienną losową. Można dążyć do zagwarantowania pewnej długowieczności konstrukcji z arbitralnym prawdopodobieństwem, jeśli się da owe prawdopodobieństwo uzasadnić rzeczowo, nie zaś przez analogię np. z astronomią lub geodezją.

Bardziej obiecująca wydaje się eliminacja arbitralności za pomocą postulatu najmniejszej szkody, a więc metodą matematyczno-techniczno-ekonomiczną. Tu znowu ustalamy zaledwie program, do którego realizacji jest daleko, choć cel jest wytyczony. Trzeba wiele głów do przemyślenia i definitywnego sformułowania. Pełne zastosowanie znajdują tu zagadnienia dotyczące wielu zmiennych losowych. Znowu musi się nasuwać pomysł analizy wymiarowej.

C. Statystyczna kontrola jakości. Ten dział zastosowania statystyki matematycznej, zapoczątkowany przed 30 laty przez Shewharta, wyrósł w osobną dyscyplinę, znaną u nas dopiero od 6 lat, lecz reprezentowaną już przez wykład w wyższej uczelni i przez dość zaawansowane prace badawcze H. Steinhausa i jego uczniów.

Po dość dokładnym opracowaniu metod statystycznego odbioru produktów gotowych, złożonych z poszczególnych sztuk (jak śruby, wyroby metalowe, szklane itd.), na najbliższe lata przewiduje się badania nad odbiorem ciał bezkształtnych (jak cement, benzyna, węgiel itd.). Występuje tu z całą siłą zagadnienie wielkości próbki, o którym wspominaliśmy poprzednio. Zastosowanie znajdzie zapewne analiza sekwencyjna. Widzimy tu także zastosowania dla metod retrospektywnych, uwzględniających poprzednie doświadczenie przemysłowe.

Dwa problemy: ocena dokładności badań laboratoryjnych i badanie przedmiotów co do wielu właściwości wymagają szybkiego rozwoju teorii w zakresie omówionych poprzednio zagadnień wielu zmiennych losowych.

Jednym z najpilniejszych zagadnień wydaje się wprowadzenie do przemysłu statystycznej kontroli zapobiegawczej, to znaczy kontroli sprawowanej w toku produkcji. Zadaniem jej jest dobór środków produkcji do zamierzonego poziomu jakości i czuwanie nad praktyczną stałością tej jakości. Tu znowu należy rozwiązać w sposób wolny od arbitralności trudne zagadnienie wielkości próbek i częstości ich pobierania, korzystając w miarę możliwości i potrzeby z analizy wymiarowej i teorii struktury próbki.

Powinno się kontynuować prace z zakresu obrotu produktów, oparte na postulatcie najmniejszej szkody gospodarce.

Postępowi technicznemu w przemyśle powinny służyć metody porównywania nowych produktów, nowych urządzeń i nowych metod, oparte na prostych testach o dużej mocy, być może sekwencyjnych.

Na szczególną uwagę zasługuje zagadnienie badania towarów co do cechy ciągłej, któremu wiele uwagi poświęcił H. Steinhaus. Badanie towarów sztukowych ma rozległe piśmiennictwo; teorie i praktyczne metody tego działu statystyki obejmują wszystkie sytuacje, z którymi zwykle spotyka się inżynier, sprzedawca, brakarz lub kontroler. Inaczej jest z towarami ciągłymi, takimi jak węgiel, rudy, cement, nafta, benzyna, karbid i inne. Zwykle bada się je laboratoryjnie. Tak np. bada się wartość kaloryczną węgla mieszając dokładnie proszek otrzymany z kilkuset grud reprezentujących całodzienną produkcję szybu i spalając następnie szczyptę tego proszku w kalorymetrze. Jest to jednak wyminięcie praktycznej kwestii użyteczności towaru. Konsumentowi nie chodzi o wyznaczenie parametru fizykalnego, jakim jest kaloryczność, lecz o praktyczną użyteczność towaru, której nie można odczytać z jednej cechy, a nawet z zespołu cech zmierzonych. Stąd powstał u nas pomysł badania towarów ciągłych poprzez przedmioty sztukowe użytkujące materiał ciągły. Tak więc w przypadku nafty, która jest przeznaczona do lampek konduktorskich, napełnia się nią 20 lampek wybranych losowo i określa się

wartość cysterny nafty według tego, ile lampek zachowało przepisaną jasność 15 świec przez co najmniej 6 godzin. Dzięki temu nie tylko można wyzyskać teorię statystycznej kontroli jakości towarów sztukowych, ale także uwolnić się od konieczności laboratoryjnego badania co do kilku cech, trudnego i nie odpowiadającego na pytania praktyka. Można mieć tu wątpliwość co do przedmiotu obranego za probierz, przecież lampki mogą być zepsute... Otóż lampki należy badać w ten sam sposób, próbą świecenia. Wprawdzie powstaje tu na pierwszy rzut oka błędne koło, ale jak wiadomo — matematyka umie jechać na takim kole: termin „kolejne przybliżenia” taką ma etymologię. Ten ciekawy tok myśli dotychczas nie został gruntownie opracowany, jak wiele pomysłów znajdujących się w archiwach Komisji Statystycznej Kontroli Jakości w Polskim Komitecie Normalizacyjnym.

VII. Zastosowania do nauk przyrodniczych, medycyny i rolnictwa

W naukach przyrodniczych można zanotować w Polsce następujące osiągnięcia uzyskane za pomocą statystyki matematycznej. Pierwszym jest uwaga zrobiona przy sposobności badania spadku granulocytozy w miarę powracania do zdrowia pacjentów (leczonych penicyliną, co nie jest istotne) mających objawy ropne. Spadek jest zwykle zamaskowany wahaniem; można spadek obliczyć tak, jak się oblicza współczynnik regresji dwóch zmiennych, tu są nimi czas i poziom granulocytów. Wtedy wahanie granulocytów gra rolę błędu owego współczynnika. Uwaga polega na tym, że zachowanie się organizmu nie jest błędem, lecz symptomem, którego nie należy pomijać. Tworzymy iloraz współczynnika regresji przez ów rzekomy błąd i klasyfikujemy pacjentów według tego ilorazu, czyli istotności spadku, a nie samego spadku. Uwagi tej nie wyzyskano dotąd poza jedną pracą, której lekarska część pochodzi od Szczeklika.

Drugim ciekawym chwytem jest połączenie pojęcia dendrytu z rachunkiem prawdopodobieństwa. Powstało ono z zagadnienia łańcusków gwiazdnych. Gdy na mapie gwiazd łączy się każdą gwiazdę z najbliższą, powstaje dendryt, który ma punkty końcowe, punkty przejściowe czyli podwójne, rozgałęzienia czyli punkty potrójne, poczwórne i popięte. Rozkład frekwencji tych punktów charakteryzuje tendencję do układania się gwiazd w łańcuszki, mianowicie będzie wtedy więcej punktów podwójnych, niż byłoby ich przy przypadkowym rozłożeniu. Ale obliczenie rozkładu przy rozłożeniu przypadkowym jest zbyt skomplikowane, dlatego S. Zubrzycki postanowił zrobić mapę gwiazd sztucznych, wzięwszy ich współrzędne z tablicy liczb przypadkowych i budować dendryt, co jest zadaniem bardzo łatwym. Porównanie obu dendrytów pokazało,

że mają one tę samą frekwencję punktów każdego rodzaju. Wnioski astronomiczne z tego spostrzeżenia można znaleźć w pracy W. Zonna, która jest w druku. Narzucają się inne zastosowania.

Trzecim zastosowaniem rachunku prawdopodobieństwa jest dochodzenie ojcostwa. Jak wiadomo, prawa dziedziczenia grup krwi są takie, że czasem pozwalają wyłączyć absolutnie ojcostwo pozwanego mężczyzny, którego — wraz z matką i dzieckiem — poddano badaniu serologicznemu, a w pozostałych przypadkach mogą co najwyżej wzmocnić lub osłabić prawdopodobieństwo ojcostwa. Ekspertyzy podają przeważnie to prawdopodobieństwo *a posteriori*, ale zawsze błędnie. Błąd polega na nieznajomości prawdopodobieństwa *a priori*: albo zakłada się, że jest ono równe $1/2$, albo przyjmuje się fałszywą zasadę logiczną „jeżeli R implikuje S z prawdopodobieństwem p , to $\text{non-}S$ implikuje $\text{non-}R$ z prawdopodobieństwem p ”.

Korzystając ze spostrzeżeń L. Hirszfelda i z materiału dwóch tysięcy ekspertyz sądowych, udało się obliczyć prawdopodobieństwo *a priori* ojcostwa mężczyzn wskazanych w pozwach; wynosi ono w tej chwili 72% . Dzięki temu można dziś w ekspertyzach podawać poprawne prawdopodobieństwo ojcostwa.

Porównano także statystykę z wyrokami. Okazuje się, że sądy z reguły oddalają pozew w razie wyłączenia ojcostwa. Ponieważ wyłączeń jest około 10% , więc w pozostałych 90% mieści się 72% ojców. Z tych 90% sądy uwalniają tylko 5% od odpowiedzialności; gdyby nawet tu się nigdy nie myliły, to zostałoby $18\% - 5\% = 13\%$ wyroków krzywdzących pozwanych. Nieraz prawnicy protestują przeciw orzekaniu według rachunku prawdopodobieństwa, odwołując się do zasady indywidualnego traktowania każdej sprawy. Statystyka, którą podaliśmy, świadczy, że postępują wręcz przeciwnie: rozstrzygają przeważnie zgodnie z rachunkiem prawdopodobieństwa opierając się zwykle na ekspertyzie, to jest na udowodnionej lub domniemanej prawdzie materialnej i nie często umiają prostować ją za pomocą konkretnej oceny indywidualnego przypadku.

Czwartym osiągnięciem, które zawdzięczamy J. Łukasiewiczowi i A. Kellusowi, jest zbadanie schematu dziedziczenia grup krwi A, B, O, AB oraz M, N, podanego przez S. Bernsteina. Badanie przeprowadzono na 86 populacjach, a wyniki porównano z tymi, które by uzyskano biorąc zamiast prawdziwych populacji populacje wylosowane. Rezultaty zostaną opublikowane w Zastosowaniach Matematyki i dlatego nie będę ich tutaj omawiał.

Wszystkie te badania mają wspólną cechę, że nie są powtarzaniem rzeczy, które zagranicą były zrobione wcześniej i lepiej. Dlatego każda z cytowanych prac może mieć kontynuację i już dzisiaj możemy przewidywać, że tych kontynuacji nie zabraknie.

Wśród nauk, które by mogły odnieść niemalą korzyść z rachunku prawdopodobieństwa, geografia zajmuje poczesne miejsce. Geografia matematyczna składa się z rozdziału traktującego o tych faktach astromicznych, które są ważne dla geografii fizycznej i dla orientacji czasowej i przestrzennej, oraz z kartografii matematycznej, która uczy, jak odwzorowywać elipsoidę ziemską na płaszczyznę mapy. Nie ma w niej natomiast rozdziału o takich sprawach, jak matematyczne ujęcie kształtu, definicja rozwoju granic, indeksy stromości, wahania pionowego, rzeźby terenu, geometryczny wskaźnik erozji albo takich, jak współczynnik rozproszenia i skupienia punktów geograficznych, a więc miast i innych ośrodków. Próbowanie poprawnego określania parametrów dających się mierzyć towarzyszą protesty, i to nie tylko ze strony zwolenników opisu, nieraz literackiego traktowania nauki o ziemi, ale także ze strony tak zwanych antyformalistów. W obu przypadkach tło psychologiczne jest jednakowe: obawa przed kryteriami pozwalającymi ustalić fakty obiektywne.

Nauką, która z konieczności długo musiała się obywać bez interwencji matematycznej, jest meteorologia. Obserwatoria meteorologiczne zbierały spostrzeżenia i rejestrowały zapiski instrumentów, aż ten materiał przerósł możliwości, które daje rachunek bez maszyn. Toteż przeważna część materiału marnuje się, a wciąż napływa nowy. Można jednak już dziś wyobrazić sobie maszynę do prognozy meteorologicznej. Nie musi to być koniecznie maszyna elektronowa, jej działanie zaś nie musi być ograniczone do meteorologii. Nie byłby zbyt śmiałym pomysłem projekt maszyny do diagnozy i prognozy lekarskiej. Istotą takiej maszyny jest urządzenie rejestrujące materiał obserwacyjny w ten sposób, żeby można z niego wybrać wszystkie zapisy odnoszące się do przypadków symptomatycznie podobnych do aktualnego, i drugie urządzenie, obliczające frakcję przebiegów pomyślnych spośród wybranych przez pierwsze. Ta frakcja daje prognozę. Sprawa terapii jest bardziej zawiła, ale nie jest wcale beznadziejna. Natomiast beznadziejne jest już dzisiaj czytanie kazuistyki lekarskiej, obejmującej miliony pozycji.

VIII. Aparaty, tablice, uproszczenia rachunkowe

Bardzo wiele zagadnień probabilistycznych i to właśnie tych, które nastęrcza praktyka, wiedzie do beznadziejnie skomplikowanych rachunków. Przeważają jednak wśród nich takie, które można by zastąpić losowaniem z odpowiednich populacji sztucznych, byle ono było beztendencyjne i wielokrotnie powtarzane. Aparat przeznaczony do tego celu musiałby umieć tworzyć populację sztuczną, losować wielokrotnie bardzo szybko, a w końcu rejestrować wyniki losowania. Przy dzisiejszym

stanie techniki nie jest możliwe skonstruowanie takiej maszyny. C. Rajski opracował projekt wstępny maszyny do szybkiego sprawdzania działania planów odbiorczych na drodze czysto empirycznej. Maszyna sama wytwarza populację generalną o wadliwości, którą można nastawić z góry. Wstępnym elementem do wytwarzania populacji generalnej jest rodzaj elektronowego koła wirującego. Źródło promieniowania radioaktywnego wylosowuje za pośrednictwem licznika Geigera-Müllera ciąg cyfr spełniających ostre wymagania co do równości frekwencji cyfr i frekwencji liczb utworzonych przez cyfry. W ten sposób otrzymujemy elektronowy aparat produkcyjny o wadliwości nastawialnej w skokach co 1%; gdy użyjemy np. 04, 05, 06 jako symbolów złych sztuk, wadliwość będzie 3%. Na tym musimy przerwać opis techniczny. W ostatecznym wyniku maszyna produkuje zbiór liczb, który informuje nas, ile razy np. w 1000 gier maszyna kazała odrzucić partię, ile razy przyjąć i jak długo trwało każde z tysiąca badań przy wadliwości partii 3% i przy narzuceniu maszynie pewnego określonego planu badania. Tym sposobem możemy badać wartość rozpoznawczą planów i koszt ich użycia bez żmudnej analizy matematyczno-probabilistycznej.

W naszych warunkach jednak ważniejsze są proste przybory warsztatowe, niż wszelkie wyrafinowane aparaty. Takim przyborem jest np. papier probabilistyczny, to jest papier, na którym dzięki anamorfozie osi pionowej dystrybuenta normalna ma przebieg linii prostej. Nic łatwiejszego, jak zrobienie odpowiedniej kliszy i drukowanie takiego papieru. Przyrządem o dużym znaczeniu praktycznym, już skonstruowanym przez H. Steinhausa, jest dyspersjometr. Jego model jest gotowy. Jest to po prostu blacha ze szczeliną złamaną pod kątem prostym i zaopatrzoną w zwykłe podziałki z odpowiednimi modułami. Tę blachę kładzie się na deskę zaopatrzoną w gwoździć, który ją prowadzi wzdłuż szczeliny, a przy każdym ruchu drugim punktem stałym jest szpilka, którą się wbija według odchyłeń obliczonych z obserwacji, a następnie wyjmuje. Aparat daje odchylenie standardowe i przy kilkunastu obserwacjach jest jeszcze wcale wygodny. Ponieważ odchylenie standardowe ma wielkie znaczenie przy ocenie jednostajności produkcji, więc dyspersjometr może odegrać — zwłaszcza wobec prostoty budowy i łatwości manipulacji — użyteczną rolę w praktyce warsztatowej i fabrycznej. Nie zapominajmy także, że lekarze i przyrodniecy nieraz powinni obliczać dyspersję, a jeżeli tego nie czynią, to często dlatego, że ich odstrasza rachunki.

Na wzmiankę zasługują aparaty automatyczne. Tym terminem oznaczamy urządzenia przeznaczone do specjalnych celów, które łączą pomiar z obliczeniem. W zakresie statystycznej kontroli jakości zajmował się tym J. Oderfeld. Jeden z projektów np. przewiduje jednoczesny pomiar kilkunastu sprężyn, przy czym jako wynik otrzymuje się od razu

średnią arytmetyczną i jej rozstęp, z pominięciem pomiarów indywidualnych i wszelkich rachunków.

Do tego rozdziału należą liczby przypadkowe. Wkrótce wyjdzie nakładem Instytutu Matematycznego P.A.N. *Tablica liczb przetasowanych* (już się ukazała w *Rozprawach Matematycznych* 6 (1954) — przyp. Red.), zawierająca wszystkie liczby czterocyfrowe, każdą raz i tylko raz, przy czym dbano o ich gruntowne przemieszanie. Różni się ona od tablic liczb przypadkowych nie tylko tym, że wypełnia pojedynczo przedział od 0000 do 9999, ale także i tym, że nie pochodzi z losowania a więc nie jest natury fizycznej ani też nie powstała z zapisków statystycznych. Liczby przemieszano mianowicie sposobem matematycznym stosując coś w rodzaju zasady ergodycznej, to znaczy iterując pewien określony proces, a następnie poddając liczby permutacji określonej wprowadzie po prostu, ale sprawiającej, że w końcu liczby sąsiadujące w tablicy powstają, każda z poprzedniej, przez kilkaset iteracji. Tablicę można czytać dwojako, jako tablicę liczb tasowanych lub jako tablicę liczb przypadkowych. Ten drugi sposób polega na czytaniu pionowym bloków złożonych z wierszy. Zauważmy, że w samej koncepcji tablicy liczb przypadkowych tkwi paradoks: przestaje ona być przypadkowa, gdy jest wydrukowana, była nią, gdy jeszcze tkwiła w maszynie losującej. Postulat wymagający od tablicy, żeby była wolna od wszelkich prawidłowości w układzie liczb, nie da się sformułować matematycznie i trudno mu przypisać jakiś określony sens. Praktycznie uważamy za przypadkową taką kolejność liczb, która nie wykazuje żadnej pospolitej prawidłowości, takiej jak np. alternowanie liczb parzystych i nieparzystych. Wydaje się dosyć dziwne, że tak zwane liczby przypadkowe odgrywają taką rolę w zagadnieniach praktycznych — może głębsza analiza pojęcia przypadkowości uwolni kiedyś wszystkie plany postępowania z kolektywami od magicznych sztuczek z wyciąganiem numerków przez tresowaną papugę — jakoś trudno uwierzyć w to, że np. przy odbieraniu prętów żelbetowych owa papuga jest najlepszym doradcą przy wyborze sztuk próbnych. Wydaje się nam, że liczby tasowane są pierwszym krokiem na tej drodze.

IX. Dydaktyka i szkolenie

Co do nauczania rachunku prawdopodobieństwa, sprawa zaczyna chromać tam, gdzie trzeba przejść do zastosowań. Jak wykształcić ludzi, którzy potrafią stosować rachunek prawdopodobieństwa do potrzeb techników, przyrodników i lekarzy? Autor niniejszego referatu nie wierzy w to, że matematyka stosowana da się wykładać, natomiast można wykładać matematykę tak, żeby zwrócić uwagę na możliwość jej stosowania.

W roku 1952 w Warszawie, a obecnie i we Wrocławiu, zostało uruchomione na uniwersytecie w ramach studiów matematycznych studium magisterskie w zakresie zastosowań statystycznych. Również w Szkole Głównej Planowania i Statystyki w Warszawie powstaje specjalizacja magisterska w dziedzinie statystyki matematycznej i jej zastosowań. Uważam za zbędne stawianie daleko idących żądań co do katedr, instytutów i dotacji. Impuls powinien przyjść skądinąd, stamtąd gdzie się będzie rachunek prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej stosowało.

Ludzie chodzą po poradę do lekarzy, nie chodzą do matematyków. Czy chodziliby do lekarzy, gdyby były tylko wykłady medycyny, a nie było szpitali, klinik i aptek, gdyby byli profesorowie medycyny lub nauczyciele higieny, ale nie było nikogo, co umie zbadać chorego i zapisać mu lekarstwo? Dopóki nie będzie matematyków-praktyków, to jest ludzi przyuczonych i przyzwyczajonych do udzielania porad matematycznych, i dopóki w każdej fabryce, w każdym biurze, urzędzie, banku czy też dyrekcji kolei nie będzie wiadomo, gdzie leczą choroby matematyczne, dopóty cała dydaktyka niższa i wyższa nie da rezultatu. A matematyka-praktyka każdy pozna po tym, że od swoich pacjentów, tj. ludzi skarżących się na niedomogę matematyczną, nie żąda, żeby sami sobie stawiali diagnozę.
