



H. STEINHAUS (Wrocław)

Długość, kształt i pole

Praca niniejsza jest raczej zaproszeniem czytelnika do rozwiązywania zagadnień czystej i stosowanej geometrii, napotkanych przez autora przy badaniu pojęcia długości i kształtu, niż odpowiedzią na te zagadnienia.

1. Tło historyczne. P. S. Laplace [9] już w r. 1812 proponował użycie metod probabilistycznych przy mierzeniu długości. Na jego wezwanie odpowiedział w r. 1868 M. Crofton, który zdefiniował miary zbiorów prostych na płaszczyźnie. Odkrycia Croftona [4] nie spotkały się z uznaniem, na jakie zasługiwały; stosowano je w zagadnieniach dotyczących prawdopodobieństw geometrycznych; E. Czuber [5] poświęcił im książkę. R. Deltheil [7] opublikował w r. 1926 monografię w kolekcji Borela; jego *Probabilités géométriques* są oparte na pracy E. Cartana o zasadzie dualności, a w całej pracy zachowany jest punkt widzenia geometrii różniczkowej — w tym szeregu żaden autor nie jest w pełni świadomy, co zawdzięcza swemu bezpośredniemu poprzednikowi. Duża część tych badań należy do rachunku całkowego, na co wskazuje zdanie z pierwszej pracy Croftona: „...omawianych metod używamy także do dowodu pewnych nowych twierdzeń z rachunku całkowego”. W. Blaschke [2] i jego współpracownicy uzyskali wiele nowych wyników z podstawowej idei Croftona. W *Integralgeometrie* Blaschkego znajdujemy imiona H. Lebesgue’a i J. Favarda (1932) jako tych, którzy pierwsi proponowali zdefiniowanie długości łuku na zasadzie Croftona — krótka broszura [12] autora niniejszej pracy, opublikowana w r. 1930, uszła widocznie ogólnej uwagi.

2. Tło matematyczne. Aby sformułować główny wynik Croftona, zauważmy, że gdy rozciągniemy pojęcie miary na zbiory prostych na płaszczyźnie, będziemy mogli mówić o prawdopodobieństwie tego, że prosta przetnie łuk A w $0, 1, 2, \dots$ punktach. Prawdopodobieństwa te będą proporcjonalne do miar zbiorów prostych, które przecinają łuk A w $0, 1, 2, \dots$ punktach. Mówiąc językiem teorii zmiennych losowych, możemy oznaczyć przez x liczbę przecięć prostej losowej X z łukiem A ,

a przez $E(x)$ wartość oczekiwaną x : wynik Croftona polega na równości

$$(1) \quad cE(x) = \text{długość łuku } A,$$

gdzie c jest stałą absolutną.

Aby sformułować (1) ściśle, oznaczmy literą Π płaszczyznę, do której ograniczać się będą wszystkie nasze rozważania. Niech O będzie ustalonym punktem, a OQ ustalonym kierunkiem na Π . Dla każdego kąta ϑ ($0 \leq \vartheta < \pi$) i każdej liczby rzeczywistej p możemy znaleźć kierunek OT zdefiniowany równością $\sphericalangle QOT = \vartheta$ i taki punkt P na OT , że $OP = p$. Rysujemy przez P prostą L prostopadłą do OT . W ten sposób ustalamy wzajemnie jednoznaczność odpowiedniości między punktami (ϑ, p) pasa $S = \{0 \leq \vartheta < \pi\}$ płaszczyzny (ϑ, p) a prostymi L płaszczyzny Π . Możemy teraz zdefiniować miarę $|Z|$ dowolnego zbioru Z prostych L płaszczyzny Π

$$(2) \quad |Z| = \text{miara płaska zbioru } Z^*,$$

gdzie Z^* jest obrazem zbioru Z w pasie S . Ta definicja, która jest nowoczesnym sformułowaniem głównej idei Croftona, przypisuje skończoną miarę $|Z|$ każdemu zbiorowi Z prostych L , którego obraz Z^* ma skończoną miarę płaską w sensie Lebesgue'a.

Rozważmy teraz łuk A na płaszczyźnie Π i oznaczmy przez A_k ($k = 1, 2, \dots$) zbiór prostych L , które przecinają łuk A dokładnie w k punktach. Twierdzenie Croftona można napisać tak:

$$(3) \quad \text{długość łuku } A = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k |A_k|.$$

Aby uzyskać stąd (1), musimy tylko ograniczyć płaszczyznę Π do koła o promieniu 1 i środku O i założyć, że łuk A leży w tym kole; stała c jest równa wtedy π . To ograniczenie jest tu oczywiście nieistotne i potrzebne tylko do ułatwienia przekładu równości (3) na język probabilistyczny.

Obraz L w płaszczyźnie Π punktu (ϑ, p) z pasa S oznaczmy przez $L(\vartheta, p)$. Liczba przecięć prostej $L(\vartheta, p)$ z łukiem A na Π jest funkcją $a(\vartheta, p)$ dwu zmiennych ϑ, p . Wzór (3) możemy teraz napisać w postaci

$$(4) \quad \text{długość łuku } A = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} a(\vartheta, p) d\vartheta dp,$$

gdzie całkę podwójną rozumie się w sensie Lebesgue'a.

Wzór (4) nie jest jednak pierwszym wzorem wyrażającym długość za pomocą całki podwójnej: już w r. 1832 znajdujemy w pracy Cauchy'ego [3] wzór

$$(5) \quad \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^1 |x'(t) \cos \vartheta + y'(t) \sin \vartheta| dt$$

dla krzywych wypukłych $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($0 \leq t \leq 1$). Łatwo spraw-

dział, że oba wzory, (4) i (5), wyrażają średnią długość rzutu krzywej we wszystkich kierunkach. W świetle tej uwagi wzór (4), który jest nowoczesną transkrypcją twierdzenia Croftona, okazuje się niezależnym od rozważań probabilistycznych.

3. Dowody i komentarze. Aby udowodnić (1), zaczynamy od specjalnego przypadku, gdy A jest odcinkiem; w tym przypadku dowód jest oczywisty. W następnym kroku rozpatrzmy łuk A złożony ze skończonej liczby odcinków $C_1, C_2, \dots, C_n$. Jeśli x jest liczbą przecięć prostej losowej X z łukiem A , a x_j ($j = 1, 2, \dots, n$) liczbą przecięć prostej X z odcinkiem C_j , to $x = \sum_{j=1}^n x_j$ i, na podstawie twierdzenia o zmiennych losowych,

$$cE(x) = c \sum_{j=1}^n E(x_j) = \sum_{j=1}^n \text{długość } C_j = \text{długość } A.$$

Trzeci i ostatni krok polega na aproksymowaniu danego łuku A łamaną złożoną z kolejnych cięciw $C_1, C_2, \dots, C_n$; przejście do granicy przy $n \rightarrow \infty$ prowadzi do (1).

Dla krótkości będziemy dalej nazywali *łukiem* wzajemnie jednoznaczny i ciągły obraz odcinka, a *krzywą* wzajemnie jednoznaczny i ciągły obraz koła. Łuk będziemy nazywali *prostowalnym* (lub *rektyfikowalnym*), gdy ma skończoną długość w sensie Jordana; to samo dotyczy krzywej. Nazwijmy nieujemną funkcję $a(\vartheta, p)$ *całkowalną* na pasie S , jeśli jest skończona we wszystkich punktach pasa S (z wyjątkiem, być może, zbioru punktów o mierze Lebesgue'a zero) i jeżeli staje się całkowalna na S w sensie Lebesgue'a po zamianie jej wartości nieskończonych na skończone. Ilekróć będziemy mówili o wartości podwójnej całki (4), będziemy uważali, że jest ona obliczona w ten właśnie sposób. Przy tych umowach możemy sformułować następujące twierdzenie:

(T) *Dla dowolnego łuku A całkowalność funkcji $a(\vartheta, p)$ na pasie S jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, żeby był on prostowalny, a dla każdego prostowalnego łuku A zachodzi wzór (4), w którym lewą stronę czyta się jako długość Jordana.*

Dowód naszkicowany dla (1) zawiera wszystkie składniki dowodu twierdzenia (T): przeprowadził go W. Maack i jest opublikowany w książce Blaschkego [2].

Nasuwa się naturalnie pytanie, czy podwójna całka (4) musi być koniecznie całką Lebesgue'a. Ogólność całki Lebesgue'a wynika z dwóch względów:

1° można ją stosować do funkcji nieograniczonych, a przynajmniej do niektórych z nich;

2° można ją stosować do funkcji bardzo nieciągłych.

Można by przypuszczać, że tylko własność 1° wymaga stosowania lebesgue'owskiego całkowania we wzorze (4) i twierdzeniu (T): istnieją prostowalne łuki A , dla których liczba $a(L)$ przecięć łuku A z prostą L jest nieograniczoną funkcją prostej L . To prowadzi do pytania, czy całka Riemana wystarczałaby dla łuków, dla których $a(L)$ jest ograniczona, np. $a(L) \leq 6$. H. Fast i A. Goetz [8] rozstrzygnęli to pytanie negatywnie, konstruując łuk A , którego żadna prosta nie przecina w więcej niż 6 punktach i dla którego funkcja $a(\vartheta, p)$ ma zbiór punktów nieciągłości miary płaskiej dodatniej. Przykład ten pokazuje, że nie można zastąpić w (4) całki Lebesgue'a całką Riemanna nawet po zmianie wartości funkcji $a(\vartheta, p)$ na zbiorze punktów miary zero.

Twierdzenie Banacha. S. Banach [1] udowodnił, że istnienie dwóch całek pojedynczych

$$(6) \quad \int_{-\infty}^{\infty} a(\vartheta_i, p) dp \quad (i = 1, 2; 0 \leq \vartheta_1 < \vartheta_2 < \pi)$$

jest warunkiem dostatecznym prostowalności łuku A . Z warunku Banacha wynika, że funkcja $a(\vartheta_i, p)$ ($i = 1$ lub 2) jest skończona poza zbiorem liczb p miary liniowej zero. Twierdzenie Banacha i (T) pokazują, że funkcje $a(\vartheta, p)$ mierzalne na pasie S i spełniające warunek Banacha muszą być całkowne, jeśli tylko odpowiadają jakiemuś łukowi. Powstaje pytanie: Czy całka podwójna

$$(7) \quad \int_{p_0}^{\infty} \int_0^{\pi} a(\vartheta, p) d\vartheta dp$$

musi być skończona, jeśli dla $p = p_0 > 0$ skończone są całki

$$(8) \quad \int_0^{\pi} a(\vartheta, p) d\vartheta, \quad \int_0^{\pi} a(\vartheta, -p) d\vartheta$$

i, oczywiście, $a(\vartheta, p)$ odpowiada pewnemu łukowi A ?

4. Definicja długości. Opuszczając warunek, że A jest łukiem, możemy zdefiniować długość dowolnego płaskiego zbioru A wzorem (4) w tych wszystkich przypadkach, gdy rozważana całka podwójna jest skończona.

Zalety takiej definicji są widoczne: długość okazuje się tutaj całką i staje się niezależna od przedstawienia parametrycznego zbioru A , od pojęć stycznej lub pochodnej i od aproksymowania A przez wpisane wielokąty. Nasza definicja obejmuje więcej niż łuki prostowalne: skończony lub przeliczalny zbiór takich łuków ma długość w nowym sensie, skoro tylko suma długości komponent jest skończona. Zakres stosował-

ności naszej definicji jest jednak, jak to pokazał S. Sherman [11], szerzej, niż to wskazuje powyższe stwierdzenie.

Pole powierzchni można zdefiniować w analogiczny sposób za pomocą całki czterokrotnej; funkcją całkowaną jest liczba przecięć powierzchni przez ruchomą prostą. Taka definicja stawia paradoks Schwarza w nowym świetle: przyczyną, dla której triangulacja powierzchni (na przykład walca) nie daje w pewnych przypadkach aproksymacji pola tej powierzchni, jest istnienie prostych, które przecinają aproksymujący wielościan w większej liczbie punktów niż samą aproksymowaną powierzchnię; paradoks znika, gdy się takie wielościany aproksymujące wyłączy.

Jedyną wadą naszej definicji długości jest to, że nie pokazuje bezpośrednio niezmienniczości długości względem ruchów sztywnych; dowód niezmienniczości jest jednak bardzo prosty. Aby nasza definicja była doskonała, należałoby wprowadzić sferę zamiast płaszczyzny.

5. Długość i pole na sferze. Traktujemy zamiast płaszczyzny Π sferę K o promieniu 1. Wielkie koła L na K będziemy nazywali *prostymi*. Każda para antypod na K niech się nazywa *punktem*. Każdej prostej L na K możemy przypisać jako jej obraz *punkt* P , zdefiniowany jako para biegunów odpowiadających równikowi L . W ten sposób ustaliliśmy wzajemnie jednoznaczność $P = f(L)$, $L = f^{-1}(P)$, między punktami P a prostymi L na K . Zdefiniujemy miarę $|Z|$ dowolnego zbioru Z prostych L jako sferyczną miarę Lebesgue'a zbioru punktowego $Z^* = f(Z)$, zakładając oczywiście mierzalność Z^* . Jeśli A jest łukiem na K , a A_k jest zbiorem prostych L , które przecinają łuk A w k punktach, można napisać twierdzenie Croftona w postaci (3), tak jak na płaszczyźnie. Należy jednak zauważyć, że łuk A składa się z punktów w nowym sensie, tu zdefiniowanym — w zwykłym sensie składa się on z dwóch antypodalnych łuków A' i A'' . Gdy te łuki mają zwykłe punkty wspólne, A nie jest łukiem w nowym sensie, ponieważ przecina się sam ze sobą. Mówiąc o długości łuku A , mamy na myśli sumę długości łuków A' i A'' , obliczonych w zwykły sposób, to znaczy według definicji Jordana. Ta sama uwaga dotyczy mierzenia Z^* .

Oznaczając przez $a(P)$ liczbę przecięć prostej $L = f^{-1}(P)$ z łukiem A , uzyskujemy wzór

$$(9) \quad \text{długość } A = \frac{1}{2} \int_K a(P) dK,$$

gdzie obszarem całkowania jest sfera K , a dK jest różniczką pola. Wzór (9) można uważać za definicję długości dla łuków sferycznych lub ogólniej dla zbiorów punktowych na sferze. Ta długość nie zmienia się, gdy łuk (zbiór) poddajemy sztywnemu przesunięciu na K : niezmienniczość wy-

nika trywialnie z niezmienniczości miar zbiorów A_k , bo każde sztywne przesunięcie jest obrotem sfery K ; musimy tylko uznać, że takie obroty nie zmieniają sferycznej miary zbiorów punktowych.

Dualność. Wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między punktami a prostymi na K wyjawia dualną wzajemność pojęć długości i pola, którą trudno byłoby odkryć bez geometrii sferycznej. Niech C będzie wypukłą krzywą Jordana na K ; wypukłość oznacza tu, że żadna prosta L nie przecina C w więcej niż dwóch *punktach*, a dwie zwykle antypodalne krzywe Jordana C' i C'' na K bez punktów wspólnych nazywają się *krzywą Jordana* na K . Oznaczając przez C_k zbiór prostych L , które przecinają C dokładnie w k *punktach*, mamy oczywiście $|C_k| = 0$ dla $k \neq 2$, i wzór (3) daje

$$(10) \quad \text{długość } C = |C_2|.$$

Ale prawa strona równości (10) jest równa mierze sferycznej punktowego zbioru $f(C_2)$. Ten otwarty zbiór jest ograniczony punktami zbioru $f(C_1)$; zbiór $f(C_1)$ jest wypukłą krzywą Jordana na K i można go oznaczać po prostu przez $f(C)$ — oznaczenie to jest zgodne z poprzednim ograniczeniem funkcji f do prostych i zbiorów prostych. Zbiór $D = f(C)$ jest wypukłą krzywą Jordana, złożoną z dwóch zwykłych antypodalnych krzywych C' i C'' , a pole obszaru pierścieniowego między C' a C'' jest miarą sferyczną zbioru $f(C_2)$, a więc jest równy prawej stronie równania (10). To pozwala nam napisać, że

$$(11) \quad \text{długość } C = \text{pole ograniczone przez } D \quad (D = f(C)).$$

Dla wyjaśnienia geometrycznego sensu równości (11) musimy tylko zauważyć, że symbol $D = f(C)$ oznacza, że krzywa D jest opisana przez bieguny ruchomego wielkiego koła stycznego do C podczas swego ruchu.

Zauważmy, że przekształcenie $D = f(C)$ jest involucją, to znaczy że $D = f(C)$ implikuje $C = f(D)$. Dla uzasadnienia tego twierdzenia oznaczmy przez L ruchome wielkie koło styczne do C ; niech c' i c'' będą infinitesimalnymi łukami wspólnymi dla C i L , a I niech będzie średnicą koła L łączącą c' i c'' . Chwilowy ruch koła L jest obrotem dookoła I ; oś J łącząca bieguny koła L opisuje podczas jego ruchu dwa infinitesimalne łuki równoległe do c' i c'' ; łuki te leżą na D ; nazwijmy je d' i d'' . Równoległość łuków c' , c'' , d' , d'' i ortogonalność osi I i J sprawia, że wielkie koło M , styczne do D wzdłuż d' i d'' , ma I za oś łączącą jego bieguny; oczywiście J jest osią jego chwilowego obrotu, gdy się ono porusza pozostając styczne do D . Z tego wynika, że bieguny koła M opisują podczas takiego ruchu krzywą C , a to właśnie oznacza symbol $C = f(D)$.

Gdy w ten sposób ustaliliśmy inwolucyjny charakter transformacji f , uzyskujemy bezpośrednio z równości (11) wzór

$$(12) \quad \text{długość } D = \text{pole ograniczone przez } C.$$

W ten sposób zdefiniowaliśmy inwolucję między pierścieniowymi obszarami na K , ograniczonymi przez pary antypodalnych wypukłych krzywych Jordana, tak że dla wszelkich dwóch odpowiadających sobie wzajemnie obszarów R_1 , R_2 zachodzi dualna relacja

$$(13) \quad \begin{aligned} \text{długość brzegu } R_1 &= \text{pole } R_2, \\ \text{długość brzegu } R_2 &= \text{pole } R_1. \end{aligned}$$

Inwolucja jest zdefiniowana wyżej: bieguny wielkich kół stycznych do brzegu R_1 (R_2) opisują brzeg R_2 (R_1). O ile wiadomo, tę dualność pierwszy odkrył L. A. Santaló [10].

6. Praktyczne obliczanie długości. Do zmierzenia długości rzeki lub drogi narysowanej na mapie, zgodnie z wzorem (4), używamy przezroczystej płytki z rodziną równoodległych prostych równoległych L_i ($i = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$). Mierzony łuk A przecina L_i w a_i punktach, a $s_0 = \sum a_i$ jest liczbą wszystkich przecięć. Obracając płytkę o kąt $\pi k/m$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$) uzyskujemy s_k przecięć, a $N = \sum_{k=0}^{m-1} s_k$ jest ogólną sumą wszystkich przecięć. Oznaczając odległość $L_i L_{i+1}$ przez d uzyskujemy wyrażenie

$$(14) \quad Nd\pi/2m$$

jako aproksymację długości łuku A . Dokładność ([13], [14]) zależy od d i m : wyrażenie (14) zmierza do długości A przy $d \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$ — nie bierzemy pod uwagę przykładu wymienionego w § 3. Pozostaje jednak otwarte pytanie, czy w tym przypadku zbieżność jest prawie pewna w sensie stochastycznym. W przeważnej liczbie zastosowań praktycznych $d = 2\text{mm}$ i $m = 6$ dają wystarczającą dokładność. Zalety tej techniki stają się jasne, gdy A jest rodziną krzywych. Zagadnienie wyznaczenia średniej pochyłości jest na to przykładem: trzeba pomnożyć całkowitą długość warstwic przez pionową odległość warstwic sąsiednich i podzielić otrzymany iloczyn przez pole badanego obszaru. Dużo łatwiej jest policzyć przecięcia prostych z przezroczystej płytki z rodziną warstwic, śledząc przecięcia wzdłuż prostych, niż toczyć pomiarowe kółko wzdłuż zakrętów krzywych lub kroczyć wzdłuż nich cyrklem; wyniki uzyskiwane tymi zwykłymi metodami są bardziej zależne od błędów osobistych i instrumentalnych, niż uzyskane w tym samym czasie naszą metodą.

Długość przedmiotów. Rzeka na mapie 1:100 000 ma zazwyczaj widoczną szerokość. Geografa interesuje długość rzeki, a nie długość jej brzegów. To prowadzi do pojęcia długości przedmiotów płaskich. Opisana wyżej metoda rozwiązuje kwestię w sposób naturalny: należy liczyć jako jedno przecięcie każdy „most”, to jest każdy odcinek prostej L_i łączący jeden brzeg rzeki z drugim i tylko takie odcinki; takie postępowanie jest równoważne z pomiarem długości najkrótszego zanurzonego w rzece sznura łączącego źródło z ujściem.

7. Paradoks długości. Długość jest funkcjonalem nieciągłym. To oznacza w prostych słowach, że możemy poprowadzić w sąsiedztwie każdego prostowalnego łuku A inny łuk A' o długości przekraczającej dowolną z góry daną liczbę lub nawet wręcz nieskończoną. Fakt ten jest czymś więcej, niż ciekawostką matematyczną: ma on konsekwencje praktyczne. Gdy mierzymy długość lewego brzegu Wisły na szkolnej mapie Polski, otrzymujemy długość znacznie mniejszą niż odczytana na mapie 1:200 000. Porównując długość obecnych granic Polski z ich długością w roku 963, nie możemy używać map narysowanych z jednakową dokładnością, z powodu braku informacji o dokładnym przebiegu naszych granic przed tysiącem lat. Tę samą trudność spotykamy przy pomiarze takich przedmiotów, jak kontury pni lub obwody płaskich przekrojów drzew. Wynik zależy istotnie od dokładności użytych przyrządów.

Tego paradoksu długości nie należy mieszać z faktem, że wszelkie pomiary takich wielkości fizycznych, jak pola, objętości, masy lub siły, podlegają błędom: mierząc pole możemy dostosować dokładność przyrządu do postulatu, żeby błąd nie przekraczał 1%; możemy, gdy to jest potrzebne, zwiększyć dokładność przyrządu tak, żeby błąd zredukować poniżej $\frac{1}{3}\%$. W stosunku do długości jest to przeważnie niemożliwe. Lewy brzeg Wisły, mierzony z rosnącą precyzją, da długości dziesięć, sto, a nawet tysiąc razy większe od długości odczytanej z mapy szkolnej. Nazwanie większości łuków spotykanych w naturze nieprostowalnymi jest zgodne z rzeczywistością. Twierdzenie to jest sprzeczne z opinią, że łuki nieprostowalne są wymysłem matematyków i że łuki naturalne są prostowalne: przeciwieństwo jest prawdą.

Nasza metoda pozwala opanować paradoks w większości zagadnień praktycznych: w tym celu należy tylko ograniczyć sumowanie szeregu (3) do m -tego wyrazu i napisać

$$(15) \quad \text{długość } A \text{ rzędu } m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m k |A_k|$$

jako definicję „długości rzędu m ”. Można też zmodyfikować wzór (4) pisząc po lewej stronie długość m -tego rzędu i zastępując po prawej stro-

nie funkcję $a(\vartheta, p)$ przez $a^{(m)}(\vartheta, p)$, gdzie $a^{(m)} = a$, gdy $a \leq m$, i $a^{(m)} = m$, gdy $a > m$. Obliczanie długości rzędu m za pomocą przezroczystej płytki opisanej w § 6 jest bardzo proste: należy liczyć przecięcia każdej prostej z A ; jeśli ich liczba a_i przekracza m , należy zastąpić a_i przez m ; praktycznie oznacza to, że mamy zakończyć liczenie, gdy osiągniemy m ; reguła ta skraca postępowanie opisane w § 6.

Ta wskazówka umożliwi nam porównywanie długości rzek lub granic narysowanych z różnymi dokładnościami: na przykład granica Polski z roku 963 jest narysowana tak, że żadna prosta nie przecina jej w więcej niż 8 punktach; długość, jaką możemy odczytać z takiej mapy, jest dokładnie długością rzędu 8, bez względu na to, jakich użyjemy instrumentów. Dla porównania tej długości z długością obecnej granicy musimy obliczyć dla obu granic długość rzędu 8, zaniehbując w ten sposób te wszystkie szczegóły nowoczesnej mapy, których by brakło, gdyby kartograf miał równie skąpe wiadomości o współczesnym przebiegu granic, jak je ma o ich przebiegu w X wieku ([15], [6]).

Długość względna. Idea przedstawiona wyżej prowadzi do porównywania długości łuków nieprostowalnych. Niech $|A|_m$ oznacza długość rzędu m łuku A ; $|A|_m$ jest zawsze skończona, ale $\lim_{m \rightarrow \infty} |A|_m = \infty$, gdy łuk A nie jest prostowalny. Może się zdarzyć, że łuki A i B są oba nieprostowalne, ale istnieje skończona granica

$$(16) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} |A|_m / |B|_m = C.$$

Możemy wówczas napisać $|A|/|B| = c$, co znaczy, że A jest c razy dłuższe niż B . Pomysł przezroczystej płytki z równoległymi prostymi umożliwia liczenie c z dowolną dokładnością w takich przypadkach jak porównanie długości obu brzegów Wisły.

8. Odległość. Niech A i B będą dwoma łukami (lub krzywymi Jordana). Oznaczmy przez $b(\vartheta, p)$ funkcję odpowiadającą B tak, jak funkcja $a(\vartheta, p)$ odpowiada A w tekście § 2. Przyjmijmy

$$(17) \quad (A, B) = \frac{1}{2} \int_S |a(\vartheta, p) - b(\vartheta, p)| d\vartheta dp$$

jako definicję odległości (A, B) łuków A, B . Jeśli oba łuki są prostowalne, (A, B) jest skończona. W tym przypadku mamy $(A, B) = (B, A)$. Jest oczywiście $(A, A) = 0$. Nierówność trójkątowa $(A, B) + (B, C) \geq (A, C)$ dla łuków prostowalnych oczywiście zachodzi. Gdy A jest ustalone, a B odsuwamy ruchem sztywnym do nieskończoności, odległość (A, B) łuków prostowalnych A, B staje się równa sumie ich długości. Aby zdefiniowane tu pojęcie odległości miało właściwy sens, musimy się odwołać

do twierdzenia orzekającego, że $(A, B) = 0$ pociąga za sobą identyczność A i B . Uproszczona wersja tego twierdzenia jest taka: Jeśli A i B są łukami (lub krzywymi Jordana), $A(L)$ jest liczbą przecięć A z L , a $B(L)$ liczbą przecięć B z L , wtedy identyczność funkcji $A(L) \equiv B(L)$ dla L przebiegających Π implikuje identyczność $A \equiv B$. To twierdzenie udowodnił H. Fast; swój wynik przedstawił Oddziałowi Wrocławskiemu PTM dnia 30 października 1953.

Zdefiniowana wyżej odległość streszcza w jednej liczbie wszystkie różnice między dwoma łukami. Można ją obliczać za pomocą przezroczystej płytki opisanej w § 6; trzeba tylko liczyć przecięcia wzdłuż L_i z łukami A i B : jeśli liczbami przecięć są odpowiednio liczby a_i i b_i , tworzymy sumę $s_0 = \sum_i |a_i - b_i|$ i analogiczne sumy s_k , a w końcu stosujemy wzór (14). Postępowanie to pozwala odpowiedzieć na takie pytania z geografii, jak określenie numeryczne zmiany biegu rzeki.

Odległość (A, B) ma wymiar długości. Aby uczynić zeń liczbę niemianowaną, możemy podzielić (A, B) przez sumę $|A| + |B|$ długości łuków A i B . W ten sposób uzyskujemy wskaźnik zmieniający się od 0 do 1; wartość 1 jest przyjęta bądź wtedy, gdy jeden z łuków oddala się do nieskończoności, bądź też wtedy, gdy jeden z łuków zbiega się do punktu.

W zagadnieniach praktycznych może wyniknąć potrzeba uniknięcia paradoksu długości, który dotyczy nie tylko pojęcia długości, ale i odległości. Czyni się to zastępując liczby a_i liczbą m , skoro tylko a_i przekracza m , i modyfikując b_i tak samo. Wynikiem jest odległość rzędu m , którą można łatwo obliczać za pomocą opisanej wyżej przezroczystej płytki.

Aproksymacja. Jeśli F jest dowolną rodziną krzywych, a C daną krzywą, możemy wybrać krzywą D_0 należącą do F i minimizującą odległość (C, D) przy D przebiegającym F . Jeśli na przykład F jest rodziną wszystkich kół, postępowanie powyższe prowadzi do najlepszej aproksymacji krzywej C za pomocą koła. Minimalna odległość (C, D_0) lub, lepiej, liczba $1 - (C, D_0) / (|C| + |D_0|)$ daje miarę „okrągłości” krzywej C ; środek koła D_0 w przypadku jednoznacznego rozwiązania można uważać za środek krzywej C , a promień koła D_0 za promień krzywej C .

Nazwijmy krzywe, dla których m jest maksymalną liczbą przecięć z prostymi, *krzywymi rzędu m* . Biorąc za F rodzinę wszystkich krzywych rzędu $\leq m$ możemy zdefiniować najlepszą aproksymację krzywej C przez krzywe rzędu $\leq m$. To jest próba podejścia do pojęcia generalizacji używanego w kartografii i innych naukach praktycznych.

Symetria. Jeśli C jest daną krzywą, możemy zdefiniować jej asymetrię w stosunku do prostej M jako odległość (C, C') , gdzie C' oznacza

odbicie krzywej C w prostej M . Prosta M , która minimizuje asymetrię (C, C') , można nazwać *osią symetrii* krzywej C , różnicę $1 - \min(C, C')/2|C|$ zaś *wskaznikiem symetrii* krzywej C . Nie będziemy się rozwodzić nad dalszymi szczegółami. Pojęcia aproksymacji i symetrii nie są jeszcze gotowe do zastosowań i publikujemy je tu, aby dać czytelnikom okazję do ulepszeń. Pojęcie symetrii środkowej można potraktować podobnie. To samo dotyczy także ekscentryczności krzywej. Jeśli Q jest jakimkolwiek punktem, a $C(\alpha)$ uzyskuje się z krzywej C przez obrót jej dookoła Q o kąt α , definiujemy ekscentryczność krzywej C jako $\min_Q \max_\alpha (C, C(\alpha))$.

9. Składowe odległości. Niech $\{B\}$ będzie zbiorem wszystkich łuków przystających do B , a B_0 niech będzie wyznaczone z warunku

$$(18) \quad (A, B_0) = \min_{B \in \{B\}} (A, B) = c.$$

Przyjmijmy

$$(19) \quad (A, B) = (A, B_0) + d = c + d;$$

d jest składnikiem odległości (A, B) spowodowanym przez przesunięcie $B_0 \rightarrow B$, a $c = (A, B_0)$ jest miarą koniecznej zmiany kształtu do zmiany A w B . Zmiana kształtu jest nowym rodzajem odległości — oznaczmy ją przez $((A, B))$. $((A, B)) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy A przystaje do B ; $((A, B)) = ((B, A))$. Aby udowodnić nierówność trójkątową dla zmiany kształtu, napiszmy

$$((A, B)) = (A, B_0), \quad ((B, C)) = (B, C_0).$$

Połączmy sztywno B z C_0 i przesunijmy je razem tak, żeby B pokryło się z B_0 ; C_0 przejdzie wtedy w C_1 i uzyskamy

$$(20) \quad ((A, B)) + ((B, C)) = (A, B_0) + (B, C_0) = (A, B_0) + (B_0, C_1) \geq (A, C_1).$$

Ale $((A, C))$ jest równe minimum odległości (A, X) względem wszystkich X przystających do C ; C_1 przystaje do C_0 , C_0 przystaje do C , a więc $(A, C_1) \geq ((A, C))$; porównując to z (20), otrzymujemy

$$((A, B)) + ((B, C)) \geq ((A, C)), \quad \text{c. n. d.}$$

Możemy rozbić przesunięcie na dwie składowe, przesunięcie równoległe i obrót. Niech $\{B\}'$ będzie zbiorem wszystkich łuków otrzymywanych z B przez przesunięcia równoległe i niech B_1 będzie wyznaczone z warunku

$$(21) \quad (A, B_1) = \min_{B \in \{B\}'} (A, B) = m;$$

jest oczywiście $m \geq c$, a więc z wzoru (19) mamy

$$(A, B) = (A, B_1) + d' = m + d',$$

gdzie $d' \leq d$. A więc możemy napisać

$$(22) \quad d = d' + r,$$

i nazwać d' *translacyjnym*, a r *rotacyjnym* składnikiem przesunięcia d . Jeśli chodzi o zmianę kształtu, to możemy ją rozbić na składnik spowodowany przez rozciągnięcie—skurczenie i czyste skrzywienie. Nie będziemy tu wchodzić w szczegółowe studium tego zagadnienia.

10. Zbieżność. Niech $\{C_n\}$ będzie ciągiem łuków prostowalnych. Zasługują na uwagę następujące rodzaje zbieżności:

1° $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{card } C_n = C_\infty$, co oznacza, że dla prawie wszystkich prostych L liczba kardynalna zbioru LC_n zmierza do liczby kardynalnej zbioru LC_∞ ;

2° $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{card } C_n$ istnieje, co oznacza, że dla prawie wszystkich prostych L liczba kardynalna zbioru LC_n zmierza do granicy;

3° $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C_\infty$, co oznacza, że $\lim_{n \rightarrow \infty} (C_n, C_\infty) = 0$;

4° $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n$ istnieje, co oznacza, że $\lim_{m, n \rightarrow \infty} (C_m, C_n) = 0$.

Jest oczywiste, że 1° implikuje 2° i że 3° implikuje 4°. Nie wiemy, czy 2° implikuje 1° i czy 4° implikuje 3°; gdyby tak było, pozostałoby jeszcze otwarte pytanie, czy 1°, 2°, 3° i 4° są równoważne. Jest oczywiste, że 3° implikuje

$$(23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{długość } C_n) = \text{długość } C_\infty,$$

ale nie wiemy, czy 1° implikuje (23). Moglibyśmy zdefiniować inne rodzaje zbieżności oparte na zbieżności zbiorów LC_n do zbiorów granicznych, co znaczyłoby, że dla dużych n każdy punkt zbioru LC_n miałby małą odległość od zbioru granicznego. Tym sposobem moglibyśmy uzyskać dalszych sześć rodzajów zbieżności 5°-10°, ale nie udało się nam ustalić żadnych implikacji między zbieżnościami 1°-4° a jakkolwiek ze zbieżności 5°-10°⁽¹⁾.

Pozostało jeszcze wiele zagadnień godnych uwagi. Na przykład: zastępując w całce (9) funkcję $a(P)$ przez $a^2(P)$ moglibyśmy zdefiniować „średnią kwadratową długość A ” i uzyskać stąd „wariancję A ”. Moglibyśmy też zastąpić $|a-b|$ w (17) przez $(a-b)^2$. Ograniczamy się tu do tych luźnych uwag i przyznajemy, że nie udało się nam pokonać trudności napotkanych na drodze do tych i wielu innych zagadnień.

⁽¹⁾ H. Fast ustalił równoważność 3° z (23) plus zbieżność topologiczną $C_n \rightarrow C_\infty$. Znalazł on także prosty przykład przeciw implikacji 4° $\Rightarrow$ 3°.

Prace cytowane

- [1] S. Banach, *Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie*, Fund. Math. 7 (1925), str. 225-236.
- [2] W. Blaschke, *Vorlesungen über Integralgeometrie*, Leipzig 1936.
- [3] L. A. Cauchy, *Mémoire sur la rectification des courbes et la quadrature des surfaces courbes*, Oeuvres complètes, I série, vol. 2, str. 167-177.
- [4] M. W. Crofton, *On the theory of local probability, applied to straight lines drawn at random in a plane*, Philosophical Transactions of the Royal Society 158 (1868), str. 181-199.
- [5] E. Czuber, *Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte*, Leipzig 1884.
- [6] J. Czyżewski, *Przyczynek do analizy kartometrycznej granic politycznych Polski*, Przegląd Geograficzny 22 (1948/49), str. 59-79.
- [7] R. Deltheil, *Probabilités géométriques*, Paris 1926.
- [8] H. Fast et A. Goetz, *Sur l'intégrabilité riemannienne de la fonction de Crofton*, Annales Soc. Pol. Math. 25 (1952), str. 301-322.
- [9] P. S. Laplace, *Théorie analytique des probabilités*, Paris 1812, str. 259-362.
- [10] L. A. Santaló, *Integral formulas in Croftons style on the sphere*, Duke Math. Journal 9 (1942), str. 707-722, w szczególności § 2.
- [11] S. Sherman, *A comparison of linear measures in the plane*, Duke Math. Journal 9 (1942), str. 1-9.
- [12] H. Steinhaus, *Sur la portée pratique et théorique de quelques théorèmes sur la mesure des ensembles de droites*, Comptes Rendus du Premier Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves, 1930, str. 353-354.
- [13] — *Zur Praxis der Rektifikation und zum Längenbegriff*, Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften 82 (1930), str. 120-130.
- [14] — *W sprawie mierzenia długości linii krzywych płaskich*, Polski Przegląd Kartograficzny 37(1932), str. 1-9.
- [15] — *O długości krzywych empirycznych i jej pomiarze, zwłaszcza w geografii*, Sprawozdania Wrocławskiego Tow. Nauk. 4(1949), dodatek 5, str. 1-6.

Г. ШТАЙНХАУЗ (Вроцлав)

ДЛИНА, ФОРМА И ПЛОЩАДЬ

РЕЗЮМЕ

Автор выводит разные следствия из метода Крофтона, который в 1868 г. определил меру множеств, элементы которых прямые линии. Мера Крофтона применена к измерению длины в картографии.

Чтобы устранить парадокс безпредельного роста длины при возрастающей точности измерений, автор вводит понятие длины произвольного порядка, определяет расстояние форм и дает математическое толкование некоторых интуитивных геометрических понятий.

Окончание статьи вводит в проблематику сходимости дуг, следуя основной идее автора, т. е. применению множеств, состоящих из прямых линий.

Автор не ставит своей целью решить все поставленные вопросы. Его намерение — дать толчок читателю к самостоятельному решению проблем из области чистой и прикладной геометрии, вытекающих из принятого в статье подхода к длине и форме кривых.

H. STEINHAUS (Wrocław)

LENGTH, SHAPE AND AREA

SUMMARY

This paper is a translation of a paper under the same title, which has appeared in *Colloquium Mathematicum* 3 (1954), p. 1-13.
