



R. SIKORSKI (Warszawa)

O twierdzeniu Vitaliego

W teorii różniczkowalności funkcji o wahanu skończonym podstawową rolę gra następujące twierdzenie Vitaliego:

Jeśli rodzina $\mathcal{P}$ przedziałów domkniętych pokrywa w sensie Vitaliego zbiór ograniczony E liczb rzeczywistych (tzn. jeśli każdy punkt $x \in E$ zawiera się w przedziale $P \in \mathcal{P}$ o dowolnie małej długości), to istnieje taki ciąg skończony lub przeliczalny przedziałów rozłącznych $P_n \in \mathcal{P}$, że zbiór $E - \sum_n P_n$ jest miary Lebesgue'a zero.

Celem tej pracy jest wykazanie, że powyższe twierdzenie jest prawdziwe nie tylko dla miary Lebesgue'a, lecz także dla dowolnej miary (tzn. przeliczalnie addytywnej, nieujemnej funkcji zbioru) μ spełniającej następujące warunki:

- (1) μ jest określona w przeliczalnie addytywnym ciele $\mathcal{M}$ zbiorów liczb rzeczywistych, zawierającym wszystkie zbiory borelowskie;
- (2) zbiór $A \in \mathcal{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie zbiory borelowskie A_1 i A_2 , że $A_1 \subset A$, $A - A_1 \subset A_2$, $\mu(A_2) = 0$;
- (3) $\mu(A) < \infty$ dla każdego zbioru ograniczonego $A \in \mathcal{M}$.

W dalszym ciągu μ oznacza miarę spełniającą warunki (1)-(3).

Z warunku (2) wynika, że miara μ jest zupełna, tzn.

- (4) jeśli $A \subset A_1 \in \mathcal{M}$ i $\mu(A_1) = 0$, to $A \in \mathcal{M}$.

Z (2) i (3) wynika, że

- (5) dla każdego zbioru $A_1 \in \mathcal{M}$ istnieje taki zbiór $(G_\delta) A$, że $A_1 \subset A$ i $\mu(A) = \mu(A_1)$.

Niech dla dowolnego zbioru Z liczb rzeczywistych

$$\mu_e(Z) = \inf_{Z \subset A \in \mathcal{M}} \mu(A).$$

Łatwo sprawdzić, że μ_e jest miarą zewnętrzną w sensie Carathéodory'ego, to znaczy (por. [2], str. 74)

- (6) $\mu_e(0) = 0$,

- (7) jeśli $Z \subset \sum_{n=1}^{\infty} Z_n$, to $\mu_e(Z) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_e(Z_n)$.

Z definicji μ_e wynika wprost, że

(8) $\mu_e(A) = \mu(A)$ dla $A \in \mathfrak{M}$; jeśli $\mu_e(Z) = 0$, to $Z \in \mathfrak{M}$ i $\mu(Z) = 0$;

(9) jeśli $A_1 A_2 = 0$ i $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}$, to dla dowolnego zbioru Z jest

$$\mu_e(Z(A_1 + A_2)) = \mu_e(ZA_1) + \mu_e(ZA_2).$$

Z własności (5) i (2) wynika, że

(10) Dla dowolnego zbioru Z istnieje taki zbiór $(G_\delta) A$, że $Z \subset A$ i $\mu_e(Z) = \mu(A)$.

Twierdzenie I. Jeśli rodzina $\mathfrak{P}$ przedziałów domkniętych pokrywa w sensie Vitaliego zbiór ograniczony E liczb rzeczywistych, to istnieje taki ciąg przeliczalny lub skończony $P_n \in \mathfrak{P}$ przedziałów, że $\mu(E - \sum_n P_n) = 0$.

Dowód twierdzenia I jest modyfikacją znanego dowodu Banacha twierdzenia Vitaliego dla miary Lebesgue'a (por. [1], str. 130-136 oraz [3], str. 45-46) i opiera się na następującej uwadze:

(11) Z każdego pokrycia $\mathfrak{R}$ dowolnego zbioru Z liczb rzeczywistych przedziałami domkniętymi można wyjąć pokrycie co najwyżej przeliczalne.

Niech

$$A = \sum_{P \in \mathfrak{R}} P \quad \text{ i } \quad A_0 = \sum_{P \in \mathfrak{R}} \text{int}(P),$$

gdzie $\text{int}(X)$ oznacza wnętrze zbioru X . Na mocy twierdzenia Lindelöfa istnieje taki ciąg przeliczalny $P'_n \in \mathfrak{R}$, że $A_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \text{int}(P'_n)$.

Aby udowodnić (11), wystarczy pokazać, że zbiór $D = A - A_0$ jest co najwyżej przeliczalny. Istotnie, każdy punkt tego zbioru należy do pewnego przedziału $P \in \mathfrak{R}$. Dołączając te przedziały do ciągu $\{P'_n\}$ otrzymujemy co najwyżej przeliczalne pokrycie zbioru A , a tym samym zbioru Z .

Niech D^- (D^+) będzie zbiorem takich $x \in D$, że istnieje przedział $P_x^- \in \mathfrak{R}$ ($P_x^+ \in \mathfrak{R}$), którego prawym (lewym) końcem jest punkt x . Oczywiście $D = D^- + D^+$. Jeśli $x \neq y$, to $\text{int}(P_x^-) \cdot \text{int}(P_y^-) = 0$. Ponieważ każda klasa przedziałów otwartych rozłącznych jest co najwyżej przeliczalna, więc zbiór D^- jest co najwyżej przeliczalny. Analogicznie wnioskujemy, że zbiór D^+ , a więc tym samym i zbiór D , jest co najwyżej przeliczalny.

Przejdziemy teraz do dowodu twierdzenia I. Wystarczy rozpatrzyć przypadek, gdy zbiór E i wszystkie przedziały $P \in \mathfrak{P}$ zawierają się w przedziale otwartym $Q = (a, \beta)$ (gdyby bowiem tak nie było, wystarczyłoby rozważać zamiast $\mathfrak{P}$ rodzinę tych przedziałów $P \in \mathfrak{P}$, które zawierają się w przedziale Q).

Ciąg $P_n \in \mathfrak{P}$ definiujemy przez indukcję. Niech r_n oznacza kres górny liczb $\mu(P)$, gdzie $P \in \mathfrak{P}$ i $P(P_1 + P_2 + \dots + P_{n-1}) = 0$, i niech $P_n \in \mathfrak{P}$ będzie takim przedziałem, że

$$(12) \quad \mu(P_n) > \frac{1}{2} r_n, \quad P_n(P_1 + P_2 + \dots + P_{n-1}) = 0.$$

Oczywiście w przypadku $n = 1$ warunek rozłączności pomijamy w powyższej definicji.

Jeśli indukcja urywa się na pewnej liczbie naturalnej m , to albo $E \subset P_1 + P_2 + \dots + P_m$ (więc twierdzenie jest prawdziwe), albo $r_{m+1} = 0$, tzn. każdy punkt $x \in E - (P_1 + P_2 + \dots + P_m)$ należy do przedziału $P_x \in \mathfrak{P}$ o mierze $\mu(P_x) = 0$. Na mocy (11) istnieje ciąg co najwyżej przeliczalny $\{P_{x_n}\}$ pokrywający zbiór $E - (P_1 + P_2 + \dots + P_m)$. Stąd

$$\mu(E - (P_1 + P_2 + \dots + P_m)) \leq \sum_n \mu(P_{x_n}) = 0,$$

więc twierdzenie jest również prawdziwe.

Wystarczy rozpatrzyć przypadek, gdy indukcja nie urywa się. Niech

$$B = E - \sum_{n=1}^{\infty} P_n.$$

Ponieważ $r_n < 2\mu(P_n)$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(P_n) \leq \mu(Q)$, więc

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0.$$

Jeśli $x_0 \in E$ i $\mu(\langle x_0 \rangle) > 0$, to $x_0 \in \sum_{n=1}^{\infty} P_n$. Istotnie, w przeciwnym przypadku byłoby $r_n \geq \mu(\langle x_0 \rangle) > 0$ wbrew (13).

Stąd wynika, że funkcje

$$\varphi_a(x) = \mu_e(\langle x, a \rangle B) \quad \text{dla} \quad x \leq a,$$

$$\psi_a(x) = \mu_e(\langle a, x \rangle B) \quad \text{dla} \quad x \geq a$$

są ciągłe. Istotnie, niech K będzie zbiorem takich x , że $\mu(\langle x \rangle) > 0$. Funkcja

$$\gamma(x) = \mu(\langle x, a \rangle - K) \quad \text{dla} \quad x \leq a$$

jest ciągła. Jeśli $x_1 < x_0 \leq a$, to (por. (9))

$$0 \leq \varphi_a(x_1) - \varphi_a(x_2) = \mu_e(\langle x_1, x_2 \rangle B) \leq \mu(\langle x_1, x_2 \rangle - K) = \gamma(x_1) - \gamma(x_2),$$

co dowodzi ciągłości φ_a . Podobnie dowodzi się ciągłości ψ_a .

Oczywiście jest

$$\varphi_a(x) = \text{const} \quad \text{dla} \quad x \leq a,$$

$$\psi_a(x) = \text{const} \quad \text{dla} \quad x \geq \beta,$$

$$\varphi_a(a) = \psi_a(a) = 0.$$

Niech będzie $P_n = \langle a_n, b_n \rangle$. Jeśli $\varphi_{a_n}(a) \leq 2\mu(P_n)$, niech $c_n = -\infty$. Jeśli $\varphi_{a_n}(a) > 2\mu(P_n)$, niech c_n będzie taką liczbą rzeczywistą, że

$$\varphi_{a_n}(c_n) = \mu_e(\langle c_n, a_n \rangle B) = 2\mu(P_n).$$

Podobnie, jeśli $\psi_{b_n}(b) \leq 2\mu(P_n)$, niech $d_n = +\infty$. Jeżeli zaś $\psi_{b_n}(b) > 2\mu(P_n)$, niech d_n będzie taką liczbą, że

$$\psi_{b_n}(d_n) = \mu_e(\langle b_n, d_n \rangle B) = 2\mu(P_n).$$

Przedział $P_n^* = \langle c_n, d_n \rangle$ (skończony lub nieskończony) ma więc następujące własności:

$$(14) \quad \mu_e(P_n^* B) \leq 5\mu(P_n).$$

$$(15) \quad \text{Jeśli } P_0 = \langle c, d \rangle \text{ jest przedziałem domkniętym skończonym oraz } P_0 - P_n^* \neq 0 \text{ i } P_0 P_n \neq 0, \text{ to } \mu(P_0) \geq 2\mu(P_n).$$

Aby udowodnić (15), wystarczy rozpatrzeć dwa przypadki: $-\infty < c < c_n$, $a_n \leq d$ oraz $c \leq b_n$, $d_n < d < \infty$.

W pierwszym przypadku jest

$$\mu(P_0) \geq \mu_e(\langle c_n, a_n \rangle B) = 2\mu(P_n),$$

w drugim zaś

$$\mu(P_0) \geq \mu_e(\langle b_n, d_n \rangle B) = 2\mu(P_n).$$

Ponieważ (por. (14))

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_e(P_n^* B) \leq 5 \sum_{n=1}^{\infty} \mu(P_n) \leq 5\mu(Q) < \infty,$$

więc istnieje taka liczba naturalna N , że

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \mu_e(P_n^* B) < \mu_e(B).$$

Stąd, przyjmując $C = B - \sum_{n=N+1}^{\infty} P_n^* B$, otrzymujemy nierówność

$$(16) \quad \mu_e(C) > 0.$$

Istnieje więc takie $x_0 \in C$, że $\mu_e(PC) > 0$ dla każdego przedziału P zawierającego x_0 . Istotnie, gdyby dla każdego $x \in C$ istniał taki przedział P_x , że $x \in P_x$ i $\mu_e(P_x C) = 0$, to stosując (11) można by wyjąć z rodziny $\{P_x\}_{x \in C}$ ciąg przeliczalny $\{P_{x_n}\}$ pokrywający zbiór C . Byłoby więc

$$\mu_e(C) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_e(P_{x_n} C) = 0,$$

wbrew nierówności (16).

Ponieważ $x_0 \notin P_1 + P_2 + \dots + P_N$, więc istnieje taki przedział $P_0 \in \mathfrak{P}$, że $x_0 \in P_0$ i $P_0(P_1 + P_2 + \dots + P_N) = 0$. Jest $\mu_e(P_0 C) > 0$; musi więc być $P_0 P_n \neq 0$ dla pewnego $n > N$. Istotnie, gdyby tak nie było, mielibyśmy

$$r_n \geq \mu(P_0) \geq \mu_e(P_0 C) > 0 \quad \text{dla} \quad n > N,$$

wbrew równości (13).

Niech n_0 będzie taką najmniejszą liczbą naturalną, że $P_0 P_{n_0} \neq 0$. Ponieważ $P_0(P_1 + P_2 + \dots + P_{n_0-1}) = 0$, więc

$$\mu(P_0) \leq r_{n_0}.$$

Z drugiej strony, $x_0 \in P_0 - P_{n_0}^*$ i $P_0 P_{n_0} \neq 0$, na mocy zatem własności (15) i (12) mamy

$$\mu(P_0) \geq 2\mu(P_{n_0}) > r_{n_0},$$

co daje sprzeczność: $r_{n_0} < r_{n_0}$. Twierdzenie I jest więc udowodnione.

Twierdzenie II. *Jeśli rodzina $\mathfrak{P}$ przedziałów domkniętych pokrywa w sensie Vitaliego zbiór ograniczony E , to dla każdego $\eta > 0$ istnieje taki ciąg skończony przedziałów rozłącznych $P_1, P_2, \dots, P_p \in \mathfrak{P}$, że*

$$\sum_{n=1}^p \mu(P_n) - \eta \leq \mu_e(E) \leq \mu_e\left(E \sum_{n=1}^p P_n\right) + \eta.$$

Twierdzenie II może być wyprowadzone z twierdzenia I w ten sam sposób, jak w przypadku miary Lebesgue'a (por. [3], str. 46-47) korzystając z własności (10).

Niech φ będzie dowolną funkcją określoną na linii prostej (lub w jakimś przedziale otwartym). Liczba y_0 nazywa się pochodną funkcji φ w punkcie x_0 względem miary μ , jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że dla każdego przedziału $P = \langle a, b \rangle$ warunki $0 < b - a < \delta$, $a \leq x_0 \leq b$ implikują nierówność

$$|(\varphi(b) - \varphi(a)) / \mu(P) - y_0| < \varepsilon.$$

Twierdzenie III. *Niech φ będzie funkcją o wahanii skończonym, ciągłą w każdym punkcie x_0 , w którym $\mu(\{x_0\}) > 0$. Pochodna funkcji φ względem miary μ istnieje prawie wszędzie μ (tzn. zbiór tych punktów, w których pochodna nie istnieje, ma miarę μ zero).*

Twierdzenie III można wyprowadzić z twierdzenia II dokładnie w ten sam sposób, jak twierdzenie Lebesgue'a o różniczkowaniu funkcji o wahanii skończonym z twierdzenia II sformułowanego dla miary Lebesgue'a (por. [3], str. 69-72).

Prace cytowane

- [1] S. Banach, *Sur le théorème de Vitali*, Fund. Math. 5 (1924), str. 130-136.
- [2] H. Hahn and A. Rosenthal, *Set functions*, Albuquerque 1948.
- [3] S. Saks, *Zarys teorii całki*, Warszawa 1930.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Р. СИКОРСКИЙ (Варшава)

О ТЕОРЕМЕ ВИТАЛИ

РЕЗЮМЕ

Основная теорема статьи гласит, что теорема Витали о покрытиях интервалами применима (в одномерном случае) к произвольной локально-конечной борелевой мере.

R. SIKORSKI (Warszawa)

OF THE VITALI THEOREM

SUMMARY

The main result of the paper is that the Vitali theorem on covering by intervals is true (in the one-dimensional case) for each locally finite Borel measure.
