ANNALES SOCIETATIS MATHEMATICAE POLONAE
Series I: COMMENTATIONES MATHEMATICAE XIV (1970)
ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: PRACE MATEMATYCZNE XIV (1970)

ZYGMUNT BUTLEWSKI (Poznań)

Théorèmes de comparaison pour un système d'équations aux différences finies

Introduction. Dans cet article nous considérons un système d'équations aux différences finies

$$\Delta y = hA(x)z, \qquad \Delta z = hB(x)y, \tag{0.1}$$

où les fonctions $A(x)$ et $B(x)$ sont continues dans l'intervalle J et h est une constante positive.

Nous appelons une solution $y(x), z(x)$ du système (0.1) *oscillante* dans l'intervalle (x_0, ∞), si les deux fonctions $y(x)$ et $z(x)$ changent de signe $+$ et $-$ une infinité de fois dans l'intervalle (x_0, ∞).

Dans le § 1 nous trouvons des conditions *suffisantes* pour que toute solution $y(x), z(x)$ du système (0.1) soit oscillante. Ces conditions sont les suivantes: $0 < A_1 \leqslant A(x)$, $B(x) \leqslant B_1 < 0$ $(A_1, B_1 = \text{const})$, $x \in (x_0, \infty)$. Dans ce cas les zéros des fonctions $y(x)$ et $z(x)$ se séparent alternativement.

Ensuite (§ 2), nous considérons les deux systèmes d'équations linéaires aux différences finies

$$\Delta y(x) = hA(x)z(x), \qquad \Delta z(x) = hB(x)y(x), \qquad h > 0, \tag{0.2}$$

$$\Delta u(x) = ha(x)v(x), \qquad \Delta v(x) = hb(x)u(x), \qquad h > 0, \tag{0.3}$$

où les coefficients $A(x), B(x), a(x)$ et $b(x)$ sont des fonctions continues dans l'intervalle J.

Soient remplies les inégalités

$$0 < a(x) \leqslant A(x), \qquad B(x) \leqslant b(x) < 0 \tag{H}$$

dans le sous-intervalle (α, β) de J. Nous avons obtenu les résultats suivants (théorèmes de comparaison): Si les hypothèses (H) et les conditions initiales $y(\beta) = u(\beta)$, $z(\beta) \geqslant v(\beta) \geqslant 0$ sont satisfaites, $y(x) > 0$ dans l'intervalle $x \epsilon (\alpha, \beta)$ et de plus si $\Delta A(x) \leqslant 0$, $\Delta a(x) \geqslant 0$ pour $x \epsilon J$, où $nh \leqslant \beta - \alpha < (n+1)h$, nous avons les inégalités

$$u(\beta - ih) \geqslant y(\beta - ih) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Au contraire, si les inégalités (H), $y(x) > 0$ et les conditions initiales $y(\alpha) = u(\alpha)$, $z(\alpha) \leqslant v(\alpha) \leqslant 0$ sont satisfaites, de plus si $\Delta A(x) \geqslant 0$, $\Delta a(x) \leqslant 0$ pour $x \epsilon (\alpha, \beta)$, où $nh \leqslant \beta - \alpha \leqslant (n+1)h$, nous avons les inégalités

$$u(\alpha + ih) \geqslant y(\alpha + ih) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Biernacki [1] a considéré l'équation aux différences finies

$$\Delta^2 y(x) + h^2 A(x) y(x) = 0, \tag{0.4}$$

où $A(x)$ est une fonction continue et positive dans l'intervalle J.

Nos résultats sont des généralisations de certains théorèms de M. Biernacki. La méthode que nous appliquons pour démontrer nos théorèmes I, III et IV, ne diffère pas de celle employée par cet auteur dans l'article cité sous [1].

On obtient un très simple théorème de comparaison dans le cas de l'équation aux différences finies [2] (pp. 245-246)

$$\Delta^2 y(x) + A(x+1) y(x+1) = 0, \tag{0.5}$$

où $A(x+1) > 0$ dans l'intervalle J.

§ 1. Considérons le système d'équations aux différences finies (0.1). Nous démontrerons un théorème d'oscillation pour ce système, à savoir le

THÉORÈME I. *Si les inégalités*

$$0 < A_1 \leqslant A(x), \quad B(x) \leqslant B_1 < 0 \quad (A_1, B_1 = \text{const}) \tag{H_1}$$

sont satisfaites pour $x \epsilon (x_0, \infty)$, *toute solution* $y(x), z(x)$ *du système* (0.1) *est oscillante dans l'intervalle* $\langle x_0, \infty)$.

Démonstration. Supposons que la fonction $y(x)$ soit positive pour $x_0 < x_1 \leqslant x$ et que l'on ait $\Delta y(x_1) = y(x_1 + h) - y(x_1) \leqslant 0$. D'après (0.1) on aurait $hA(x_1)z(x_1) = \Delta y(x_1) \leqslant 0$ et, par conséquent, $z(x_1) \leqslant 0$. Dans ce cas nous avons aussi

$$\Delta z(x) = hB(x) y(x) < 0 \tag{1.1}$$

pour $x \geqslant x_1$, donc $z(x_1 + nh) < 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Selon (0.1) il vient alors

$$\Delta y(x_1 + nh) = hA(x_1 + nh) z(x_1 + nh) < 0 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.2}$$

Nous posons dans (1.2) successivement $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, N$ et faisons la somme des égalités obtenues. Il résulte donc que la relation suivante est remplie:

$$y[x_1 + (N+1)h] - y(x_1) = h \sum_{n=1}^{N+1} A[x_1 + (n-1)h] z[x_1 + (n-1)h]. \tag{1.3}$$

D'après (1.1) et en vertu de l'hypothèse $0 < A_1 \leqslant A(x)$ nous obtenons l'inégalité

$$(1.4) \qquad y[x_1+(N+1)h]-y(x_1) \leqslant hNA_1 z(x_1+h) \qquad (N = 2, 3, \ldots).$$

De l'inégalité (1.4) on voit immédiatement que $y[x_1+(N+1)h] < 0$ si N est suffisamment grand. Nous aboutissons donc à une contradiction.

Supposons maintenant qu'il existe un n_1 $(n_1 = 1, 2, 3, \ldots)$ tel que $\Delta y(x_1+n_1 h) \leqslant 0$. Dans ce cas la démonstration est toute pareille à celle qui a été donnée plus haut.

Il suffit donc de considérer le cas suivant

$$(1.5) \qquad \Delta y(x_1+nh) > 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

D'après (0.1) et (1.5) nous avons

$$A(x_1+nh)z(x_1+nh) > 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

et, par conséquent,

$$z(x_1+nh) > 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

En tenant compte de (0.1) et de l'inégalité $B(x) \leqslant B_1 < 0$ on obtient

$$(1.6) \qquad \Delta z(x_1+nh) = hB(x_1+nh)y(x_1+nh) < 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

La suite $\{z(x_1+nh)\}$ est donc positive et décroissante, et par conséquent, tend vers une limite finie. Alors il vient

$$(1.7) \qquad \lim_{n\to\infty} z(x_1+nh) = z_0 \geqslant 0.$$

En vertu de (1.5) et d'après l'inégalité $B(x) \leqslant B_1 < 0$ on a

$$(1.8) \qquad B(x_1+nh)y(x_1+nh) \leqslant B_1 y(x_1) < 0.$$

Selon (1.6) et (1.8) nous obtenons

$$(1.9) \qquad \lim_{n\to\infty} \Delta z(x_1+nh) \leqslant hB_1 y(x_1) < 0.$$

Les inégalités (1.7) et (1.9) sont contradictoires. Il s'ensuit donc que la fonction $y(x)$ possède une infinité de zéros pour les grandes valeurs de x.

Un raisonnement analogue conduit a la conclusion que la fonction $z(x)$ possède une infinité de zéros pour les grandes valeurs de x. La solution $y(x), z(x)$ est donc oscillante. La théorème I est ainsi démontré.

Dans la suite nous considérons le système (0.1)

$$\Delta y(x) = hA(x)z(x), \qquad \Delta z(x) = hB(x)y(x) \qquad (h > 0)$$

et supposons que la solution $y(x), z(x)$ de ce système est oscillante pour $x_0 \leqslant x$. Désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ $(x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots)$ et $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ $(\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n < \ldots)$ les zéros consécutifs plus grands que x_0 des fonctions $y(x)$ et $z(x)$ respectivement. Soit

$$x_{n+1} - x_n > h, \qquad \xi_{n+1} - \xi_n > h \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{1.10}$$

Nous allons maintenant démontrer le

Théorème II. *Si on a* $A(x) > 0$, $B(x) < 0$ *pour* $x \in \langle x_0, \infty)$ *et si les inégalités* (1.10) *sont satisfaites, les zéros des fonctions* $y(x)$ *et* $z(x)$ *se séparent alternativement et, de plus, nous avons les inégalités* $x_n < \xi_n < x_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *dans l'intervalle* $\langle x_0, \infty)$.

Démonstration. On peut supposer qu'on a

$$y(x_n) = y(x_{n+1}) = y(x_{n+2}) = 0, \qquad \begin{array}{l} y(x) > 0 \text{ pour } x_n < x < x_{n+1}, \\ y(x) < 0 \text{ pour } x_{n+1} < x < x_{n+2}. \end{array}$$

D'après (0.1) et (1.10) il vient

$$\Delta y(x_n) = y(x_n + h) = hA(x_n) z(x_n) > 0$$

et par suite $z(x_n) > 0$. D'autre part, nous avons

$$\Delta y(x_{n+1}) = y(x_{n+1} + h) = hA(x_{n+1}) z(x_{n+1}) < 0,$$

or $z(x_{n+1}) < 0$. La fonction $z(x)$ est continue, il existe donc un point $x = \xi_n$ $(x_n < \xi_n < x_{n+1})$ tel que $z(\xi_n) = 0$.

On déduit de l'équation $\Delta z(x) = hB(x)y(x)$ que $\Delta z(x) < 0$ pour $x_n < x < x_{n+1}$ et, par conséquent, que la fonction $z(x)$ possède un zéro, et un seul, dans l'intervalle (x_n, x_{n+1}). Un raisonnement analogue conduit à la conclusion que la fonction $y(x)$ possède un zéro, et un seul, dans l'intervalle (ξ_n, ξ_{n+1}). Le théorème II est donc démontré.

§ 2. Nous considérons les deux systèmes d'équations aux différences finies

$$\begin{aligned} \Delta y(x) &= hA(x) z(x) \\ \Delta z(x) &= hB(x) y(x) \end{aligned} \qquad (h > 0); \tag{2.1}$$

et

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= ha(x) v(x) \\ \Delta v(x) &= hb(x) u(x) \end{aligned} \qquad (h > 0); \tag{2.2}$$

où *les coefficients* $A(x), B(x), a(x), b(x)$ *sont des fonctions continues dans un intervalle* J.

Nous allons démontrer une formule fondamentale pour la démonstration des théorèmes de comparaison III et IV.

Nous avons le

LEMME. *Si y, z et u, v sont des solutions du système* (2.1) *et* (2.2) *respectivement, définies dans l'intervalle J, nous avons la formule suivante*

$$\text{(F)}\qquad h^{-2}\Delta(u\Delta y-y\Delta u)=h^{-1}[(u+\Delta u)(z+\Delta z)\Delta A-\\ -(v+\Delta v)(y+\Delta y)\Delta a]+(AB-ab)y(u+\Delta u)-ab(u\Delta y-y\Delta u)$$

dans J.

Démonstration. En effet, on obtient la formule générale

$$\text{(2.3)}\qquad h^{-1}\Delta(u\Delta y-y\Delta u)=h^{-1}(u\Delta^2y-y\Delta^2u+\Delta^2y\Delta u-\Delta^2u\Delta y)\\ =h^{-1}[\Delta^2y(u+\Delta u)-\Delta^2u(y+\Delta y)].$$

En tenant compte des équations (2.1) et (2.2), il vient

$$\text{(2.4)}\qquad \Delta^2y=h\Delta(Az)=h(z\Delta A+A\Delta z+\Delta A\,\Delta z)\\ =h[(z+\Delta z)\Delta A+A\Delta z],$$

et

$$\text{(2.5)}\qquad \Delta^2u=h\Delta(az)=h(v\Delta a+a\Delta v+\Delta a\,\Delta v)\\ =h[(v+\Delta v)\Delta a+a\Delta v].$$

En posant (2.4) et (2.5) dans (2.3) on obtient donc

$$\text{(2.6)}\qquad h^{-1}\Delta(u\Delta y-y\Delta u)=(u+\Delta u)(z+\Delta z)\Delta A-\\ -(v+\Delta v)(y+\Delta y)\Delta a+A\Delta z(u+\Delta u)-a\Delta v(y+\Delta y).$$

D'après les équations (2.1) et (2.2) on a

$$\text{(2.7)}\qquad A\Delta z(u+\Delta u)-a\Delta v(y+\Delta y)=h[ABy(u+\Delta u)-abu(y+\Delta y)]\\ =h[(AB-ab)y(u+\Delta u)-ab(u\Delta y-y\Delta u)].$$

En substituent (2.7) dans (2.6) on obtient la formule (F)

$$h^{-2}\Delta(u\Delta y-y\Delta u)=h^{-1}[(u+\Delta u)(z+\Delta z)\Delta A-(v+\Delta v)(y+\Delta y)\Delta a]+\\ +(AB-ab)y(u+\Delta u)-ab(u\Delta y-y\Delta u).$$

Le lemme est donc démontré.

Dans ce qui suit, nous considérons les deux systèmes d'équations (2.1) et (2.2). En appliquant le lemme démontré ci-dessus nous obtenons deux théorèmes III et IV, qui permettent de comparer les solutions des équations données.

THÉORÈME III. *Supposons qu'on a $0<a(x)\leqslant A(x)$, $B(x)\leqslant b(x)<0$, $\Delta A(x)\leqslant 0$ et $0\leqslant\Delta a(x)$ dans un intervalle (α,β) contenu dans J. Soient*

$y(x)$, $z(x)$, et $u(x)$, $v(x)$ des solutions du système (2.1) et (2.2) respectivement, définies dans (a, β). Soit $y(x) > 0$ pour $a < x \leqslant \beta$, où $nh \leqslant \beta - a < (n+1)h$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Supposons enfin remplies les conditions initiales

$$(\mathrm{W}) \qquad y(\beta) = u(\beta), \qquad z(\beta) \geqslant v(\beta) \geqslant 0.$$

Dans ces hypothèses nous avons les inégalités

$$u(\beta - ih) \geqslant y(\beta - ih) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

D é m o n s t r a t i o n. D'après les équations (2.1) et (2.2) on a[1]

$$(2.8) \qquad \begin{aligned} y(\beta) &= y(\beta - h) + h(Az)_{\beta-h}, \\ z(\beta) &= z(\beta - h) + h(By)_{\beta-h}; \end{aligned}$$

et

$$(2.9) \qquad \begin{aligned} u(\beta) &= u(\beta - h) + h(av)_{\beta-h}, \\ v(\beta) &= v(\beta - h) + h(bu)_{\beta-h}; \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$(2.10) \qquad \begin{aligned} (y-u)_\beta &= (y-u)_{\beta-h} + h(Az - av)_{\beta-h}, \\ (z-v)_\beta &= (z-v)_{\beta-h} + h(By - bu)_{\beta-h}. \end{aligned}$$

Nous allons d'abord démontrer l'inégalité $(y-u)_{\beta-h} \leqslant 0$.

Selon l'hypothèse (W) nous avons $(y-u)_\beta = 0$. Supposons qu'on ait $(y-u)_{\beta-h} > 0$. De la première relation de (2.10) on déduit que

$$(2.11) \qquad (Az - av)_{\beta-h} < 0.$$

D'après les inégalités $B < 0$, $z(\beta) > 0$ et (2.8) on obtient $z(\beta - h) > z(\beta) \geqslant 0$. L'inégalité $v(\beta - h) \leqslant 0$ conduit à une contradiction avec (2.11). Il suffit alors de considérer le cas $v(\beta - h) > 0$. Selon les hypothèses du théorème III nous avons $B \leqslant b < 0$ et $y > 0$ dans l'intervalle (a, β); il vient donc

$$(2.12) \qquad (By - bu)_{\beta-h} \leqslant (by - bu)_{\beta-h} = [b(y-u)]_{\beta-h} < 0.$$

En tenant compte de l'hypothèse (W) et (2.12) nous obtenons, d'après (2.10), que $(z-v)_{\beta-h} > 0$. Or, dans ce cas on a

$$(2.13) \qquad (Az - av)_{\beta-h} \geqslant (az - av)_{\beta-h} = [a(z-v)]_{\beta-h} > 0.$$

Les inégalités (2.11) et (2.13) sont contradictoires. Il en résulte que

$$(2.14) \qquad (y-u)_{\beta-h} \leqslant 0.$$

---

[1] Nous posons: $\varphi_\gamma \equiv \varphi(\gamma)$.

Supposons qu'il existe un entier k $(2 \leqslant k \leqslant n)$ tel que l'on ait

$$(2.15)\qquad \begin{aligned} &u(\beta-ih) \geqslant y(\beta-ih) > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1),\\ &u(\beta-kh) < y(\beta-kh). \end{aligned}$$

D'après l'inégalité (2.14) et la condition initiale (W) $y(\beta) = u(\beta)$ nous avons

$$(2.16)\qquad (u\Delta y - y\Delta u)_{\beta-h} = (u-y)_{\beta-h}\, y(\beta) \geqslant 0.$$

En tenant compte des inégalités (2.15) on obtient la relation

$$(2.17)\qquad (u\Delta y - y\Delta u)_{\beta-kh}$$
$$= u(\beta-kh)y[\beta-(k-1)h] - y(\beta-kh)u[\beta-(k-1)h] < 0,$$

et aussi

$$\left.\begin{aligned} \Delta z(\beta-ih) &= hB(\beta-ih)y(\beta-ih) < 0\\ \Delta v(\beta-ih) &= hb(\beta-ih)u(\beta-ih) < 0 \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1);$$

d'où il vient

$$(2.18)\qquad \left.\begin{aligned} z(\beta-ih) > z[\beta-(i-1)h] > z(\beta) \geqslant 0\\ v(\beta-ih) > v[\beta-(i-1)h] > v(\beta) \geqslant 0 \end{aligned}\right. \qquad (i = 2, 3, \ldots, k-1).$$

D'après (2.16) et (2.17) on voit qu'il existe un entier s $(1 \leqslant s \leqslant k-1)$ tel que l'on a

$$(2.19)\qquad \begin{aligned} &u\Delta y - y\Delta u \geqslant 0 \qquad \text{pour } x = \beta - sh,\\ &u\Delta y - y\Delta u < 0 \qquad \text{pour } x = \beta - ih \ (i = s+1, \ldots, k). \end{aligned}$$

En remplaçant dans la formule (F) du lemme successivement x par $\beta-(s+1)h, \ldots, \beta-kh$ et en faisant la somme des égalités obtenues, nous obtenons la relation suivante:

$$(2.20)\qquad h^{-2}[\Phi(\beta-sh) - \Phi(\beta-kh)]$$
$$= -\sum_{i=s+1}^{k} (ab\Phi)_{x=\beta-ih} + \sum_{i=s+1}^{k} [(AB-ab)y(u+\Delta u)]_{x=\beta-ih} +$$
$$+ h^{-1}\sum_{i=s+1}^{k} [(u+\Delta u)(z+\Delta z)\Delta A - (v+\Delta v)(y+\Delta y)\Delta a]_{x=\beta-ih},$$

où nous avons posé $\Phi(x) \equiv u(x)\Delta y(x) - y(x)\Delta u(x)$.

Selon (2.19) le premier membre de l'égalité (2.20) est positif. Cependant le second membre de l'égalité (2.20) est négatif, parce que:

1° $a(\beta-ih)>0$, $b(\beta-ih)<0$, $\Phi(\beta-ih)<0$ $(i=s+1,\dots,k)$ et par conséquent la première somme est négative,

2° $(AB-ab)\geqslant 0$, $y>0$, $u+\Delta u>0$ pour $x=\beta-ih$ $(i=s+1,\dots$ $\dots,k)$, et alors la deuxième somme est non positive,

3° $u+\Delta u>0$, $z+\Delta z>0$, $\Delta A\leqslant 0$, $v+\Delta v>0$, $y+\Delta y>0$, $\Delta a\geqslant 0$ pour $x=\beta-ih$ $(i=s+1,\dots,k)$, il s'ensuit donc que la troisième somme est aussi non positive.

Cette contradiction montre que l'entier k en question n'existe pas. Nous avons donc $u(\beta-ih)\geqslant y(\beta-ih)$ $(i=1,2,\dots,n)$.

Le théorème III est ainsi démontré.

Remarque. Supposons maintenant que l'on a

$$By-bu\leqslant 0 \quad \text{pour } x=\beta-ih \ (i=1,2,\dots,n). \tag{2.21}$$

Dans ce cas nous avons les inégalités

$$v(\beta-ih)\leqslant z(\beta-ih) \quad (i=1,2,\dots,n). \tag{2.22}$$

En effet, d'après les équations (2.1) et (2.2) nous obtenons la relation

$$\Delta(z-v)=h(By-bu). \tag{2.23}$$

En posant dans (2.23) successivement pour x les valeurs

$$\beta-h,\ \beta-2h,\ \dots,\ \beta-kh \quad (1\leqslant k\leqslant n)$$

et en faisant la somme des équalités obtenues on a

$$(z-v)_\beta=(z-v)_{\beta-kh}+h\sum_{i=1}^{k}(By-bu)_{\beta-ih}. \tag{2.24}$$

Selon l'hypothèse (2.21) et d'après la condition initiale (W) $z(\beta)\geqslant v(\beta)$, on déduit de la relation (2.24) qu'on a $(z-v)_{\beta-kh}\geqslant 0$ pour tout k $(1\leqslant k\leqslant n)$.

Les inégalités (2.22) sont donc vérifiés.

Dans la suite nous allons démontrer un deuxième théorème de comparaison, à savoir le

Théorème IV. *Supposons que les inégalités suivantes sont remplies:* $0<a(x)\leqslant A(x)$, $B(x)\leqslant b(x)<0$, $\Delta A(x)\geqslant 0$, $\Delta a(x)\leqslant 0$ *dans un intervalle* (α,β), *contenu dans* J. *Soient* $y(x), z(x)$ *et* $u(x), v(x)$ *des solutions du système* (2.1) *et* (2.2) *respectivement, définies dans* (α,β), *de plus soit* $y(\beta)\geqslant 0$, $y(x)>0$ *pour* $\alpha\leqslant x<\beta$. *Etant donné un entier positif* n *tel que* $nh\leqslant\beta-\alpha\leqslant(n+1)h$.

Supposons enfin remplies les conditions initiales:

$$y(\alpha)=u(\alpha), \quad z(\alpha)\leqslant v(\alpha)\leqslant 0. \tag{W$_1$}$$

Dans ces conditions nous avons les inégalités

$$y(a+ih) \leqslant u(a+ih) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Démonstration. Nous démontrerons ce théorème en appliquant une méthode analogue à celle du théorème III.

D'après les équations (2.1) et (2.2) on a

$$(2.25)\qquad \begin{aligned}(y-u)_{a+h} &= (y-u)_a + h(Az-av)_a,\\ (z-v)_{a+h} &= (z-v)_a + h(By-bu)_a.\end{aligned}$$

En tenant compte de l'inégalité $0 < a(x) \leqslant A(x)$ et en vertu des conditions initiales (W_1), il vient

$$(y-u)_{a+h} = h(Az-av)_a \leqslant 0,$$

c'est-à-dire

$$y(a+h) \leqslant u(a+h).$$

En posant $\Phi(x) \equiv (u\Delta y - y\Delta u)_x$, on a pour $x = a$

$$(2.26)\qquad \begin{aligned}\Phi(a) &= u(a)y(a+h) - y(a)u(a+h)\\ &= [y(a+h)-u(a+h)]y(a) \leqslant 0.\end{aligned}$$

Supposons qu'il existe un entier k $(2 \leqslant k \leqslant n)$ tel que l'on ait

$$(2.27)\qquad \begin{aligned}&y(a+ih) \leqslant u(a+ih) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1),\\ &y(a+kh) > u(a+kh).\end{aligned}$$

D'après (2.27) on obtient

$$(2.28)\qquad \begin{aligned}&\Phi[a+(k-1)h]\\ &\quad = u[a+(k-1)h]y(a+kh) - y[a+(k-1)h]u(a+kh) > 0.\end{aligned}$$

Il existe donc un entier s $(1 \leqslant s \leqslant k-1)$ tel que l'on a

$$(2.29)\qquad \begin{aligned}&\Phi(a+ih) \leqslant 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, s-1)\\ &\Phi(a+sh) > 0.\end{aligned}$$

Remplaçons maintenant x dans la formule (F) du lemme successivement par les valeurs $a, a+h, \ldots, a+(s-1)h$; en faisant la somme des égalités obtenues on obient l'équation suivante:

$$(2.30)\qquad \begin{aligned}&h^{-2}[\Phi(a+sh)-\Phi(a)]\\ &= -\sum_{i=0}^{s-1}(ab\Phi)_{a+ih} + \sum_{i=0}^{s-1}(AB-ab)_{a+ih}\,y(a+ih)u[a+(i+1)h] +\\ &\quad + h^{-1}\sum_{i=0}^{s-1}[(uz)_{a+(i+1)h}\,\Delta A(a+ih) - (vy)_{a+(i+1)h}\,\Delta a(a+ih)].\end{aligned}$$

D'après les inégalités (2.29) on voit que le premier membre de l'équation (2.30) est positif. Cependant, en vertu des hypothèses du théorème IV et de (2.29) on a

$$-\sum_{i=0}^{s-1}(ab\Phi)_{a+ih}\leqslant 0.$$

Selon (2.27) et l'hypothèse $0<a(x)\leqslant A(x)$, $B(x)\leqslant b(x)<0$ on obtient

$$\sum_{i=0}^{s-1}(AB-ab)_{a+ih}y(a+ih)u[a+(i+1)h]\leqslant 0.$$

D'après les équations (2.1) et (2.2) nous avons

$$\begin{aligned}\Delta z(a+ih) &= h(By)_{a+ih}<0\\ \Delta v(a+ih) &= h(bu)_{a+ih}<0\end{aligned}\qquad (i=0,1,2,\ldots,k-1),$$

et en vertu de (W_1) on obtient $z(a+ih)\leqslant 0, v(a+ih)\leqslant 0$ $(i=0,1,\ldots$ $\ldots,k)$. Alors on a

$$h^{-1}\sum_{i=0}^{s-1}[(uz)_{a+(i+1)h}\Delta A(a+ih)-(vy)_{a+(i+1)h}\Delta a(a+ih)]\leqslant 0,$$

car $\Delta A(a+ih)\geqslant 0$, $\Delta a(a+ih)\leqslant 0$ $(i=0,1,\ldots,s-1)$. Il résulte donc que les trois sommes du second membre de la relation (2.30) sont non positives. Nous aboutissons à une contradiction. L'entier k n'existe donc pas.

Le théorème IV est ainsi démontré.

Remarque. Si les inégalités $(By-bu)_{a+ih}\leqslant 0$ $(i=0,1,2,\ldots,n)$ sont remplies, nous avons

$$z(a+kh)\leqslant v(a+kh)\qquad (k=1,2,\ldots,n). \tag{2.31}$$

En effet, d'après les équations (2.1) et (2.2) on obtient

$$\Delta(z-v)_x=h(By-bu)_x. \tag{2.32}$$

En posant dans (2.32) successivement pour x les valeurs $a, a+h,\ldots$ $\ldots,a+(k-1)h$ $(2\leqslant k\leqslant n)$ et en faisant la somme des égalités obtenues, on a la relation suivante

$$(z-v)_{a+kh}=(z-v)_a+\sum_{i=0}^{k-1}(By-bu)_{a+ih}.$$

De cette relation on voit immédiatement que $(z-v)_{a+kh}\leqslant 0$. L'inégalité (2.31) est donc démontrée.

Travaux cités

[1] M. Biernacki, *Sur l'équation $h^{-2}\Delta^2y(x)+A(x)y(x)=0$*, Prace Matematyczno-Fizyczne, t. 47, pp. 49-53, Warszawa 1949.

[2] H. Levy i F. Lessman, *Równania różnicowe skończone*, Warszawa 1966.