ANNALES SOCIETATIS MATHEMATICAE POLONAE
Series I: COMMENTATIONES MATHEMATICAE XVII (1973)
ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: PRACE MATEMATYCZNE XVII (1973)

IRA KOŹNIEWSKA (Warszawa)

Méthode algébrique pour la solution de deux équations linéaires, l'une de récurrence et l'autre différentielle

L'analogie assez poussée qui existe entre les méthodes servant à résoudre les équations linéaires différentielles ordinaires et de récurrence, a été souvent signalée (voir p.e. [2], [3]). Brand [1] dans sa monographie poursuit systématiquement la recherche de ces analogies, ce qui le mène à la conclusion qu'il y a correspondance non seulement entre les méthodes de procéder dans les deux domaines, mais encore entre les théorèmes respectifs.

C'est le théorème 2 sur les équations linéaires différentielles qui a été d'abord trouvé par la méthode des opérateurs que Pontriagin [5] utilise avec tant de maîtrise dans son fameux manuel.

Afin de transposer ce résultat aux relations de récurrence il fallut remplacer l'opérateur différentiel D par l'opérateur généralisé de différence $\Delta_z f_n = f_{n+1} - z f_n$ de base z et démontrer les propriétés de cet opérateur, entre autres le lemme énoncé ci-après. On trouvera dans [4] la justification des propriétés utilisées.

La démonstration du théorème 1 se rapportant aux équations linéaires de récurrence n'est qu'une pure transposition de celle fournie pour les équations linéaires différentielles. Le travail présent suit toutefois la voie inverse, qui semble moins banale et qui conduit à travers les équations de récurrence aux équations différentielles.

Il est à remarquer que contre toute attente, les relations matricielles $W = XK^{-1}B$ et $W = X\bar{K}^{-1}B$ servant à donner la solution effective des équations en question tout en étant rapprochées, ne sont pas identiques.

Le travail comporte l'exemple d'une équation différentielle linéaire résolue d'après la méthode proposée.

Avant d'accéder aux théorèmes, il nous faut introduire la notion de l'opérateur de différence Δ_a^s et signaler ses propriétés essentielles.

C'est pour les fonctions réelles f_n définies sur l'ensemble des nombres entiers et zéro qu'on introduit les opérateurs

(1) $$\Delta_a^1 f_n = f_{n+1} - a f_n,$$

(2) $$\Delta_a^s f_n = \Delta_a^1(\Delta_a^{s-1} f_n) \quad \text{pour } s > 1,$$

où a est un nombre complexe arbitraire et s un nombre entier positif. On admet en outre $\Delta_a^0 f_n = f_n$.

L'opérateur Δ_a^s est linéaire, c'est-à-dire pour tous les nombres complexes α, β et les fonctions f_n, g_n arbitraires on a

$$\Delta_a^s(\alpha f_n + \beta g_n) = \alpha \Delta_a^s f_n + \beta \Delta_a^s g_n. \tag{3}$$

Les opérateurs Δ_a^k et Δ_b^s sont en outre commutatifs, c'est-à-dire

$$\Delta_a^k \Delta_b^s f_n = \Delta_b^s \Delta_a^k f_n \tag{4}$$

pour a, b, k, s, f_n arbitraires.

Si l'on désigne par

$$j^{(k)} = j(j-1)\ldots(j-k+1), \qquad k \leqslant j, \tag{5}$$

le lemme suivant peut être facilement démontré par récurrence par rapport à k.

Lemme. *Pour tout nombre complexe a et $j, k, n = 0, 1, \ldots$ on a*

$$\Delta_a^k a^n n^{(j)} = \begin{cases} j^{(k)} n^{(j-k)} a^{n+k} & si\ j \geqslant k, \\ 0 & si\ j < k. \end{cases} \tag{6}$$

Si pour simplifier l'écriture on introduit l'opérateur E défini comme suit

$$Ef_n = \Delta_0^1 f_n = f_{n+1}, \tag{7}$$

on peut écrire $\Delta_a^1 f_n = (E-a) f_n$
et de même

$$\Delta_a^m f_n = (E-a)^m f_n \quad \text{pour } m = 0, 1, \ldots \tag{8}$$

Dans cette dernière relation on élève formellement $(E-a)$ à la m-ième puissance et on applique le résultat à la fonction f_n.

Soit à présent donnée une équation linéaire de récurrence dont la partie non homogène est un polynôme généralisé

$$\sum_{i=0}^{k} a_i f_{n+k-i} = a^{n+\alpha} \sum_{j=0}^{m} b_j n^{(j)}. \tag{9}$$

Ecrivons le membre de gauche de l'équation (9) à l'aide des opérateurs introduits. On a

$$\sum_{i=0}^{k} a_i f_{n+k-i} = \sum_{i=0}^{k} a_i E^{k-i} f_n = \left(\sum_{i=0}^{k} a_i E^{k-i}\right) f_n = p(E) f_n \tag{10}$$

où on a posé

$$p(z) = \sum_{i=0}^{k} a_i z^{k-i}.$$

Admettons

$$p(z) = (z-a)^{\alpha}\varphi(z) \tag{11}$$

avec $\varphi(a) \neq 0$, a désigne ici un nombre complexe, α est égal à zéro ou à un nombre entier positif.

Ainsi l'équation (9) prend la forme

$$p(E)f_n = a^{n+\alpha}\sum_{j=0}^{m} b_j n^{(j)} \tag{12}$$

où

$$p(E)f_n = (E-a)^{\alpha}\varphi(E)f_n. \tag{13}$$

Passons maintenant à l'énoncé du théorème et sa démonstration.

THÉORÈME 1. *C'est*

$$f_n = g_n + a^n \sum_{j=0}^{m} w_{j+\alpha} n^{(j+\alpha)} \tag{14}$$

qui est la solution générale de l'équation (12).

Dans la formulae (14) *on a désigné par:*
a le nombre complexe qui intervient dans l'équation (12),
α le nombre entier positif ou zéro de l'équation (12)
g_n la solution générale de l'équation homogène $p(E)f_n = 0$,
$w_{j+\alpha}$, $j = 0, 1, \ldots, m$, les composantes du vecteur vertical W de dimension $(m+1)$,
b_j, $j = 0, 1, \ldots, m$, les composantes du vecteur vertical B de dimension $(m+1)$,

Ces deux derniers vecteurs sont liés par la relation matricielle

$$W = X\cdot K^{-1}\cdot B \tag{15}$$

où

$$\begin{gathered} X = \{x_{sj}\} \quad \text{avec} \quad x_{sj} = \begin{cases} \dfrac{s!}{(\alpha+s)!} & \text{si } s = j, \\ 0 & \text{si } s \neq j, \end{cases} \\ K = \{k_{js}\} \quad \text{avec} \quad k_{js} = \begin{cases} a^{s-j}\binom{s}{j}\varphi^{(s-j)}(a) & \text{si } s \geqslant j, \\ 0 & \text{si } s < j, \end{cases} \\ s, j = 0, 1, \ldots, m. \end{gathered} \tag{16}$$

Démonstration. Il sera prouvé que f_n défini par la formule (14) est la solution de l'équation (12).

Etant donné que g_n est la solution de l'équation $p(E)f_n = 0$, on a

$$p(E)f_n = p(E)\left[g_n + a^n \sum_{j=0}^{m} w_{j+a} n^{(j+a)}\right]$$

$$= p(E) a^n \sum_{j=a}^{m+a} w_j n^{(j)}.$$

Si l'on tient compte de ce que $p(E) = \Delta_a^a \varphi(E)$ et l'on utilise le lemme, on trouve

$$p(E) a^n \sum_{j=a}^{m+a} w_j n^{(j)} = \varphi(E) \Delta_a^a a^n \sum_{j=a}^{m+a} w_j n^{(j)} = \varphi(E) \sum_{j=a}^{m+a} w_j \Delta_a^a a^n n^{(j)}$$

$$= \varphi(E) \sum_{j=0}^{m} w_{j+a} (j+a)^{(a)} a^{n+a} n^{(j)}.$$

Développons en série de Taylor le polynôme $\varphi(z)$

$$\varphi(z) = \sum_{s=0}^{q} \frac{\varphi^{(s)}(a)}{s!} (z-a)^s$$

où q est le dégré du polynôme $\varphi(z)$. On a alors

$$p(E)f_n = \sum_{s=0}^{q} \frac{\varphi^{(s)}(a)}{s!} \Delta_a^s \sum_{j=0}^{m} w_{j+a} (j+a)^{(a)} a^{n+a} n^{(j)}$$

$$= \sum_{s=0}^{q} \frac{\varphi^{(s)}(a)}{s!} \sum_{j=0}^{m} w_{j+a} (j+a)^{(a)} \Delta_a^s a^{n+a} n^{(j)}.$$

Si l'on admet la convention $\sum_{j}^{m} = 0$ pour $j > m$, on déduit d'après le lemme

$$p(E)f_n = \sum_{s=0}^{q} \varphi^{(s)}(a) \sum_{j=s}^{m} w_{j+a} \frac{(j+a)^{(a)}}{s!} j^{(s)} a^{n+a+s} n^{(j-s)}$$

$$= a^{n+a} \sum_{s=0}^{q} \varphi^{(s)}(a) \sum_{j=0}^{m-s} w_{j+a+s} \frac{(j+s+a)^{(a)}}{s!} (j+s)^{(s)} a^s n^{(j)}.$$

Ainsi on parvient à la formule

$$(17) \qquad p(E)f_n = a^{n+a} \sum_{s=0}^{q} \varphi^{(s)}(a) \sum_{j=0}^{m-s} w_{j+a+s} \frac{(j+a+s)!}{(j+s)!} \binom{j+s}{s} a^s n^{(j)}.$$

A présent il convient de distinguer deux cas suivant que q est supérieur à m ou ne l'est pas.

1° Si $q > m$ on voit d'après la convention que la seconde somme de la formule (17) s'annule pour $s > m$. Par conséquent dans la première somme s ne devrait parcourir que les valeurs de 0 à m. On a donc

$$(18)\qquad p(E)f_n = a^{n+a}\sum_{s=0}^{m}\varphi^{(s)}(a)\sum_{j=0}^{m-s} w_{j+a+s}\frac{(j+a+s)!}{(j+s)!}\binom{j+s}{s}a^s n^{(j)}.$$

2° Si $q \leqslant m$ on a pour $s > q$ $\varphi^{(s)}(z) = 0$. Il en résulte que dans la première somme de la formule (17) on peut faire prendre à s les valeurs de 0 à m sans changer l'expression.

La formule (18) est donc valable dans les deux cas et peut s'écrire sous la forme

$$(19)\qquad p(E)f_n = a^{n+a}\sum_{j=0}^{m} n^{(j)}\sum_{s=j}^{m} a^{s-j}\varphi^{(s-j)}(a)w_{s+a}\frac{(s+a)!}{s!}\binom{s}{j}.$$

D'autre part la condition (15) entraîne

$$KX^{-1}W = B$$

ce qui pour tout $j = 0, 1, \ldots, m$ équivaut à

$$(20)\qquad b_j = \sum_{s=0}^{m} k_{js}\frac{w_{s+a}}{x_{ss}} = \sum_{s=j}^{m} k_{js}\frac{w_{s+a}}{x_{ss}} = \sum_{s=j}^{m} a^{s-j}\binom{s}{j}\varphi^{(s-j)}(a)w_{s+a}\frac{(s+a)!}{s!}:$$

En rapprochant les deux dernières formules on voit aisément que

$$p(E)f_n = a^{n+a}\sum_{j=0}^{m} b_j n^{(j)}$$

et c'est précisement ce qu'il fallait démontrer.

Conclusions.

1° Pour tout $m, a = 0, 1, \ldots$ le dernier coefficient w_{m+a} de la solution se présente sous la forme

$$(21)\qquad w_{m+a} = \frac{b_m m!}{\varphi(a)(m+a)!}.$$

Ceci découle de la formule (20) lorsqu'on y pose $j = s = m$.

2° L'équation

$$(22)\qquad (E-a)^a\varphi(E)f_n = b_0 a^{n+a}$$

a comme solution générale

$$f_n = g_n + \frac{a^n n^{(\alpha)} b_0}{\varphi(a)\,\alpha!} \tag{23}$$

où g_n est la solution générale de l'équation homogène respective.

En particulier l'équation

$$(E-1)^{\alpha}\varphi(E) f_n = b_0 \tag{24}$$

a comme solution générale

$$f_n = g_n + \frac{n^{(\alpha)} b_0}{\varphi(1)\,\alpha!}, \tag{25}$$

g_n étant comme précédemment la solution générale de l'équation homogène.

Passons à l'équation différentielle ordinaire du type

$$(D-a)^{\alpha}\varphi(D) y = e^{az}\sum_{j=0}^{m} b_j z^j \tag{26}$$

où l'on a adopté les notations suivantes: D symbole de la dérivée, a nombre complexe, α nombre positif entier ou zéro, $\varphi(z)$ polynôme en z de degré q à coefficients réels satisfaisant à la condition $\varphi(a) \neq 0$, b_j $(j = 0, 1, \ldots, m)$ coefficients réels formant les composantes du vecteur vertical B de dimension $(m+1)$.

Le théorème suivant peut être établi par une méthode analogue à celle de la démonstration du théorème 1.

Théorème 2.

$$y(z) = g(z) + e^{az}\sum_{j=0}^{m} w_{j+\alpha} z^{j+\alpha} \tag{27}$$

est la solution générale de l'équation (26).

Dans cette solution $g(z)$ est la solution générale de l'équation homogène $(D-a)^{\alpha}\varphi(D)y = 0$, et $w_{j+\alpha}$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$ désigne la composante de vecteur vertical W de dimension $(m+1)$ défini par la relation matricielle

$$W = X\bar{K}^{-1}B$$

où $X = \{x_{sj}\}$ est la matrice carrée de dimension $(m+1)$ définie dans les relations (16). $\bar{K} = \{\bar{k}_{js}\}$ est une matrice triangulaire de même dimension dont les éléments sont

$$\bar{k}_{js} = \begin{cases} \binom{s}{j}\varphi^{(s-j)}(a) & \text{pour } s \geqslant j, \\ 0 & \text{pour } s < j, \end{cases} \qquad j, s = 0, \ldots, m.$$

Cas particuliers.

1° L'équation

$$(D-a)^\alpha \varphi(D) y = b_0 e^{az} \tag{28}$$

a comme solution générale

$$y(z) = g(z) + e^{az} \frac{b_0 z^\alpha}{\varphi(a)\alpha!} \text{ (}^1\text{)} \tag{29}$$

où $g(z)$ est solution générale de l'équation homogène $(D-a)^\alpha \varphi(D) y = 0$.

2° L'équation

$$(D-a) y = e^{az} b_m z^m \tag{30}$$

a comme solution générale

$$y(z) = e^{az}\left(C + b_m \frac{z^{m+1}}{m+1}\right) \tag{31}$$

où C est une constante arbitraire.

Exemple de la résolution d'une équation différentielle d'après le théorème 2.

Soit donnée l'équation différentielle ordinaire

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2z}(1+6z).$$

Dans ce cas

$$p(z) = (z-1)(z-2), \quad \varphi(z) = z-1, \quad a = 2, \quad \alpha = 1,$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \bar{K} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{K}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

On trouve

$$W = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

et par conséquent

$$y(z) = C_1 e^z + e^{2z}(C_2 - 5z + 3z^2)$$

où C_1, C_2 sont des constantes arbitraires.

Travaux cités

[1] L. Brand, *Differential and difference equations*, New York 1966.
[2] F. Chorlton, *Ordinary differential and difference equations*, London 1965.
[3] А. О. Гельфанд, *Исчисление конечных расностей*, Москва 1967.
[4] I. Koźniewska, *Równania rekurencyjne*, Warszawa 1972.
[5] L. S. Pontriagin, *Równania różniczkowe zwyczajne*, traduction du russe, Warszawa 1964.

(1) Cette relation est conforme au résultat de Chorlton [2] obtenu pour le cas de l'équation (28) avec $\alpha = 0$.