



R. SIKORSKI (Warszawa)

## O operacji ucinania funkcji

Niech  $X$  będzie przestrzenią metryczną,  $Y$  zaś — przestrzenią metryczną ograniczoną. Oznaczmy przez  $Y^X$  przestrzeń wszystkich odwzorowań ciągłych przestrzeni  $X$  w przestrzeń  $Y$  ze zwykłą definicją odległości  $\varrho(f, g) = \sup_{x \in X} \varrho(f(x), g(x))$ ,  $(f, g \in Y^X)$ .

Niech  $\varepsilon > 0$ . Mówimy, że dwa odwzorowania  $f, g \in Y^X$  są  $\varepsilon$ -homotopijne, co zapisujemy symbolicznie  $f \sim_\varepsilon g$ , jeśli istnieje taka funkcja ciągła  $\alpha \in Y^{X \times I}$ , gdzie  $I$  jest przedziałem  $0 \leq t \leq 1$ , że dla każdego  $x \in X$

$$\alpha(x, 0) = f(x), \quad \alpha(x, 1) = g(x), \quad \sup_{t, \tau \in I} \varrho(\alpha(x, t), \alpha(x, \tau)) < \varepsilon.$$

Niech  $F$  będzie podzbiorem domkniętym przestrzeni  $X$ . Dla każdej funkcji  $f \in Y^X$  niech  $f^* = f|_F$  oznacza funkcję  $f$  zredukowaną do zbioru  $F$ , czyli  $f^* \in Y^F$ ,  $f^*(x) = f(x)$  dla  $x \in F$ .

Wzór

$$\Phi(f) = f^* \quad \text{dla} \quad f \in Y^X$$

definiuje ciągle odwzorowanie  $\Phi$  przestrzeni  $Y^X$  w przestrzeń  $Y^F$ , gdyż  $\varrho(f^*, g^*) \leq \varrho(f, g)$ .

**TWIERDZENIE** <sup>1)</sup>. *Jeśli  $Y$  jest zwartym, absolutnym retraktem otoczeniowym* <sup>2)</sup>, *to odwzorowanie  $\Phi$  jest wewnętrzne, tzn. dla każdego zbioru otwartego  $U \subset Y^X$  zbiór  $\Phi(U)$  jest otwarty w przestrzeni  $Y^F$ .*

<sup>1)</sup> Twierdzenie to jest pozytywną odpowiedzią na problemat postawiony przez K. Kuratowskiego na posiedzeniu Grupy Topologii Państwowego Instytutu Matematycznego w grudniu 1949 r. Podany dowód twierdzenia został przedstawiony na posiedzeniu Grupy Topologii w grudniu 1949 r. Inny dowód podał równocześnie K. Borsuk.

<sup>2)</sup> Zbiór zwarty  $Y$  jest *absolutnym retraktem otoczeniowym*, jeśli dla każdej przestrzeni metrycznej  $Y_0$  zawierającej  $Y$  istnieje taki zbiór otwarty  $V \supset Y_0$  i taka funkcja  $r \in Y^V$ , że  $Y \subset V$ ,  $r(y) = y$  dla  $y \in Y$ .

Inna równoważna definicja: Zbiór zwarty  $Y$  jest *absolutnym retraktem otoczeniowym*, jeśli dla dowolnego podzbioru domkniętego  $O$  dowolnej przestrzeni metrycznej  $Z$  i dla dowolnej funkcji  $\beta \in Y^O$  istnieje zbiór otwarty  $H \subset Z$  i funkcja  $\gamma \in Y^H$  będąca przedłużeniem funkcji  $\beta$ . Por. Borsuk, [1], str. 222 oraz Kuratowski [3], str. 259.

Dowód twierdzenia opiera się na następujących dwu lematach:

Lemat I. *Jeśli  $f \in Y^X$  i  $h \in Y^F$ ,  $f \sim_e h$ , to istnieje taka funkcja  $g \in Y^X$ , że  $h = g^*$  oraz  $f \sim_e g$ .*

Lemat I jest nieco ostrzejszym sformułowaniem podstawowego twierdzenia Borsuka o rozszerzaniu odwzorowań homotopijnych. Dowód lematu I jest taki sam, jak dowód twierdzenia Borsuka<sup>3)</sup>.

Niech  $\alpha \in Y^{F \times I}$  spełnia następujące warunki

$$\alpha(x, 0) = f(x), \quad \alpha(x, 1) = h(x), \quad \sup_{t, \tau \in I} \varrho(\alpha(x, t), \alpha(x, \tau)) < \varepsilon$$

dla każdego  $x \in F$ . Niech  $\beta$  będzie odwzorowaniem zbioru domkniętego

$$C = X \times (0) + F \times ICX \times I$$

w przestrzeń  $Y$  zdefiniowanym wzorami

$$\beta(x, 0) = f(x) \quad \text{dla } x \in X,$$

$$\beta(x, t) = \alpha(x, t) \quad \text{dla } x \in F, t \in I.$$

Ponieważ  $Y$  jest absolutnym retraktem otoczeniowym<sup>2)</sup>, więc odwzorowanie  $\beta$  można przedłużyć na pewien zbiór otwarty  $G$ ,  $CCGCX \times I$ . Niech  $\gamma \in Y^G$  oznacza to przedłużenie funkcji  $\beta$ . Niech  $H_0$  będzie takim podzbiorem otwartym przestrzeni  $X$ , że  $F \subset H_0$  i  $H_0 \times ICG$ <sup>3)</sup>, oraz niech  $H$  będzie zbiorem takich  $x \in H_0$ , że

$$\sup_{t, \tau \in I} \varrho(\gamma(x, t), \gamma(x, \tau)) < \varepsilon.$$

Zbiór  $H$  jest podzbiorem otwartym przestrzeni  $X$  oraz  $F \subset H$ . Niech

$$p(x) = \frac{\varrho(x, X - H)}{\varrho(x, X - H) + \varrho(x, F)} \quad \text{dla } x \in H,$$

w szczególności

$$p(x) = 0 \quad \text{dla } x \in X - H,$$

$$p(x) = 1 \quad \text{dla } x \in F.$$

Niech  $\alpha'(x, t) = \gamma(x, tp(x))$  dla  $x \in X$ ,  $t \in I$ . Oczywiście  $\alpha' \in Y^{X \times I}$  oraz

$$\alpha'(x, 0) = \gamma(x, 0) = \beta(x, 0) = f(x) \quad \text{dla } x \in X,$$

$$\alpha'(x, 1) = \gamma(x, 1) = \beta(x, 1) = \alpha(x, 1) = h(x) \quad \text{dla } x \in F,$$

<sup>3)</sup> Por. Hurewicz i Wallman [4], str. 86.

$$\begin{aligned} & \sup_{t, \tau \in I} \varrho(\alpha'(x, t), \alpha'(x, \tau)) = \\ & = \sup_{t, \tau \in I} \varrho(\gamma(x, tp(x)), \gamma(x, \tau p(x))) \left\{ \begin{aligned} &= 0, \quad \text{gdy } x \in X - H, \\ &\leq \sup_{t, \tau \in I} \varrho(\gamma(x, t), \gamma(x, \tau)) < \varepsilon, \quad \text{gdy } x \in H, \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

więc

$$\sup_{t, \tau \in I} \varrho(\alpha'(x, t), \alpha'(x, \tau)) < \varepsilon \quad \text{dla każdego } x \in X.$$

Funkcja  $g \in Y^X$

$$g(x) = \alpha'(x, 1) \quad \text{dla } x \in X$$

ma obydwie własności wymienione w tezie lematu I.

**Lemat II.** Dla każdej liczby  $\varepsilon > 0$  istnieje taka liczba  $\delta > 0$ , że dla dowolnych  $h, k \in Y^F$  nierówność  $\varrho(k, h) < \delta$  pociąga za sobą  $k \sim_\varepsilon h$ .

Można założyć, że przestrzeń  $Y$  jest izometrycznie zanurzona w pewnej liniowej przestrzeni Banacha  $Y_0$  (np. w przestrzeni funkcji rzeczywistych, ciągłych, ograniczonych, określonych na  $Y^4$ ). Ponieważ  $Y$  jest zwartym retraktem otoczeniowym<sup>2</sup>), więc istnieje zbiór otwarty  $V_0 \subset Y_0$  oraz funkcja ciągła  $r \in Y^{V_0}$  o tej własności, że  $Y \subset V_0$  oraz  $r(y) = y$  dla  $y \in Y$ .

Niech  $V$  będzie zbiorem takich  $y \in V_0$ , że  $\varrho(y, r(y)) < \varepsilon/4$ . Zbiór  $V$  jest otwarty i  $Y \subset V$ . Niech  $\delta > 0$  będzie taką liczbą, że nierówność  $\varrho(y_1, y_2) < \delta$  ( $y_1, y_2 \in Y$ ) pociąga za sobą zawsze, że  $ty_1 + (1-t)y_2 \in V$  dla każdego  $t \in I$ .

Możemy założyć, że  $\delta < \varepsilon/4$ .

Niech  $h, k \in Y^F$  i  $\varrho(k, h) < \delta$ . Niech

$$\alpha(x, t) = r(th(x) + (1-t)k(x)) \quad \text{dla } x \in F, t \in I.$$

Oczywiście  $\alpha \in Y^{F \times I}$  oraz  $\alpha(x, 0) = k(x)$ ,  $\alpha(x, 1) = h(x)$  dla  $x \in F$ . Oznaczając dla skrótu

$$y_1 = th(x) + (1-t)k(x), \quad y_2 = \tau h(x) + (1-\tau)k(x),$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \varrho(\alpha(x, t), \alpha(x, \tau)) &= \varrho(r(y_1), r(y_2)) \leq \\ &\leq \varrho(r(y_1), y_1) + \varrho(y_1, y_2) + \varrho(y_2, r(y_2)) < \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \varrho(k(x), h(x)) + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2} + \delta < \frac{3}{4} \varepsilon. \end{aligned}$$

<sup>4</sup>) Por. Kuratowski [2], str. 112.

Стąd

$$\sup_{t, \tau \in I} \varrho(a(x, t), a(x, \tau)) < \varepsilon \quad \text{для каждого } x \in F,$$

co dowodzi, że  $k \sim_{\varepsilon} h$ . Dowód лемату II został więc zakończony.

Niech teraz  $U$  będzie dowolnym podzbiorem otwartym przestrzeni  $Y^X$  i niech  $k \in \Phi(U)$ , czyli  $k = f^*$ , gdzie  $f \in U$ . Niech  $\varepsilon > 0$  będzie taką liczbą, że nierówność  $\varrho(f, g) \leq \varepsilon$  ( $g \in Y^X$ ) pociąga за собой, że  $g \in U$ . Obierzmy taką liczbę  $\delta > 0$ , by była spełniona teza лемату II. Niech  $h \in Y^F$ ,  $\varrho(k, h) < \delta$ . Z лемату II wynika, że  $k \sim_{\delta} h$ , czyli  $f^* \sim_{\delta} h$ . Na mocy лемату I istnieje takie  $g \in Y^X$ , że  $h = g^*$  i  $f \sim_{\varepsilon} g$ . Z ostatniego warunku wynika, że  $\varrho(f, g) \leq \varepsilon$ , а więc  $g \in U$ , czyli  $h = g^* = \Phi(g) \in \Phi(U)$ . Punkt  $k$  jest więc punktem wewnętrznym zbioru  $\Phi(U)$ , gdyż кула о promieniu  $\delta$  i о środkу  $k$  zawiera się w zbiorze  $\Phi(U)$ . Wobec dowolności  $k$  wniosкуjemy stąd, że zbiór  $\Phi(U)$  jest otwarty w przestrzeni  $Y^F$ .

#### Prace cytowane

- [1] K. Borsuk, *Über eine Klasse von lokal zusammenhängenden Räumen*, Fund. Math. 19 (1932), str. 220-242.
- [2] C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne 20, Warszawa-Wrocław 1948.
- [3] — *Topologie II*, Monografie Matematyczne 21, Warszawa-Wrocław 1950.
- [4] W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton 1948.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Р. СИКОРСКИЙ (Варшава)

#### ОБ ОПЕРАЦИИ СРЕЗЫВАНИЯ ФУНКЦИЙ

#### РЕЗЮМЕ

Если  $X$  — метрическое пространство, а  $Y$  — метрическое ограниченное пространство, то  $Y^X$  обозначает пространство всех непрерывных отображений пространства  $X$  в пространство  $Y$  с обыкновенной топологией.

Если  $F \subset X$  и  $f \in Y^X$ , то  $f|F$  обозначает отображение индуцируемое функцией  $f$  на множестве  $F$ . Очевидно  $f|F \in Y^F$ .

ТЕОРЕМА. Если  $F$  замкнутое подмножество пространства  $X$ , а  $Y$  — абсолютный ретракт окрестностей, то отображение  $\Phi(f) = f|F$  для  $f \in Y^X$  пространства  $Y^X$  в пространстве  $Y^F$  — внутреннее, т. е. множество  $\Phi(U)$  открыто в пространстве  $Y^F$  для каждого открытого множества  $U \subset Y^X$ .

R. SIKORSKI (Warszawa)

# ON THE OPERATION OF CUTTING OFF MAPPINGS

## S U M M A R Y

If  $X$  is a metric space, and  $Y$  — a bounded metric space, then  $Y^X$  denotes the space of all continuous mappings of  $X$  into  $Y$  with the usual topology.

If  $F \subset X$  and  $f \in Y^X$ , then  $f|F$  denotes the mapping  $f$  reduced to the set  $F$ . Obviously  $f|F \in Y^F$ .

**THEOREM.** *If  $F$  is a closed subset of  $X$  and  $Y$  is an absolute neighbourhood retract, then the mapping  $\Phi(f) = f|F$  for  $f \in Y^X$  of  $Y^X$  into  $Y^F$  is interior, i. e.  $\Phi(U)$  is open in  $Y^F$  for each open set  $U \subset Y^X$ .*