



G. HOBOT

Lublin

Zastosowanie funkcji sklejaných stopnia 3-go do rozwiązywania dwu-punktowego, liniowego zadania brzegowego.

(Praca wpłynęła do Redakcji 25.05.1991)

Streszczenie. W pracy podany jest algorytm, który konstruuje funkcję sklejaną stopnia 3-go będącą rozwiązaniem przybliżonym 2-punktowego, liniowego zadania brzegowego dla równań różniczkowych zwyczajnych. Korzysta on z faktu, że współczynniki poszukiwanej funkcji sklejaney zależą liniowo od parametru t , który jest równy wartości tej funkcji sklejaney w węźle x_0 . Algorytm wymaga $O(N)$ działań arytmetycznych, gdzie N jest liczbą podpodziałów rozważanego przedziału. Oprócz algorytmu przedstawione są wyniki obliczeń, które uzyskano testując algorytm na kilku przykładach.

1. Wstęp W pracy rozpatrywane będzie liniowe zadanie brzegowe rzędu 2-go

$$(1.1) \quad Ly = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), \quad x \in (a, b),$$

$$(1.2) \quad \begin{aligned} l_1 y &= y(a) = \gamma_a, \\ l_2 y &= y(b) = \gamma_b. \end{aligned}$$

Przybliżonego rozwiązania tego zadania będziemy szukać w postaci funkcji sklejaney stopnia 3-go z węzłami $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$, ciągłej wraz z pochodnymi rzędu 1-szego i 2-go.

Założmy, że funkcje $p(x)$, $q(x)$ i $f(x)$ a także rozwiązanie zadania (1.1)-(1.2) są dostatecznie gładkie.

W poprzednich latach ukazało się w literaturze szereg prac, w których rozwiązanie przybliżone zadania (1.1)-(1.2) jest funkcją sklejaną. Omówimy tutaj kilka z tych prac. W publikacji [11] jest opisana metoda kolokacji. Podany algorytm, wyznaczania funkcji sklejaney, sprowadza się do rozwiązania liniowego układu równań, z pełną macierzą, co wymaga wykonania $O(N^3)$ działań arytmetycznych. W [3] i [5] podano podobny algorytm ale

z macierzą Hessenberga, co zmniejszyło ilość działań do $O(N^2)$. Autorzy w pracach [2] i [6] skonstruowali algorytmy, które dawały w efekcie układy równań liniowych o macierzach trójdzielnych. W pracy [1], dla zadań omówionych w [2], podane są schematy ekonomiczne oraz oszacowanie błędu w przypadku funkcji sklepanych stopnia 5-go i 7-go. Ponadto w [4], dla równań różniczkowych rzędu $m \geq 2$, udowodnione są twierdzenia o zbieżności metody kolokacji z zastosowaniem funkcji sklepanych różnych stopni.

Dla zagadnień początkowych można również określać rozwiązanie przybliżone w postaci funkcji sklepanej z tym, że np. w pracach [8], [9] i [10] jest ona wyznaczana kolejno, przedział po przedziale.

W pracy tej będzie podany podobny algorytm do przybliżonego rozwiązywania zadania (1.1)–(1.2). Korzysta on z faktu, że współczynniki poszukiwanej funkcji sklepanej stopnia 3-go zależą liniowo od parametru t , który jest równy wartości pochodnej tej funkcji sklepanej w węźle x_0 . Algorytm wymaga $O(N)$ działań.

Oprócz algorytmu, omówione jest oszacowanie błędu metody oraz przedstawione są wyniki obliczeń numerycznych, które uzyskano testując algorytm na kilku przykładach.

2. Oznaczenia i definicje. W tym paragrafie zostaną podane oznaczenia i definicje dotyczące funkcji sklepanej stopnia 3-go. Niech Δ będzie układem węzłów dzielącym przedział $[a, b]$ na N części tzn.

$$(\Delta) \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b.$$

DEFINICJA 2.1 [7] Funkcję $S : [a, b] \rightarrow R$ o własnościach

$$1^\circ S(x) \in C_{[a,b]}^2,$$

2° w każdym przedziale $[x_k, x_{k+1}]$ $k = 0(1)N - 1$, $S(x)$ jest wielomianem stopnia 3-go,

nazywamy funkcją sklepaną stopnia 3-go na podziale Δ .

Niech $M_j = S''(x_j)$, $j = 0(1)N$. Wtedy (patrz [12]), w każdym przedziale $[x_k, x_{k+1}]$, $S''(x)$ jest funkcją liniową postaci

$$(2.1) \quad S''(x) = M_k \frac{x_{k+1} - x}{h_{k+1}} + M_{k+1} \frac{x - x_k}{h_{k+1}},$$

gdzie $h_{k+1} = x_{k+1} - x_k$.

Całkując dwukrotnie (2.1) dostajemy

$$(2.2) \quad S'(x) = -M_k \frac{(x_{k+1} - x)^2}{2h_{k+1}} + M_{k+1} \frac{(x - x_k)^2}{2h_{k+1}} + A_k$$

i

$$(2.3) \quad S(x) = M_k \frac{(x_{k+1} - x)^3}{6h_{k+1}} + M_{k+1} \frac{(x - x_k)^3}{6h_{k+1}} + A_k(x - x_k) + B_k,$$

A_k, B_k — stałe.

Z warunków ciągłości $S(x)$ i $S'(x)$ w punktach $x_k, k = 1(1)N - 1$ mamy

$$(2.4) \quad A_k = M_k \frac{h_k + h_{k+1}}{2} + A_{k-1},$$

$$(2.5) \quad B_k = M_k(h_k^2 - h_{k+1}^2)/6 + A_{k-1}h_k + B_{k-1}.$$

3. Algorytm Niech

$$(3.1) \quad \begin{aligned} M_k &= M_k^1 t + M_k^0, \quad k = 0(1)N \\ A_k &= A_k^1 t + A_k^0, \\ B_k &= B_k^1 t + B_k^0, \quad k = 0(1)N - 1. \end{aligned}$$

Funkcję sklejaną $S(x)$ stopnia 3-go, która jest rozwiązaniem przybliżonym (1.1)–(1.2) w przedziale $[x_0, x_1]$ wyznaczymy z warunków

$$(3.2) \quad S''(x_0) = -p_0 S'(x_0) - q_0 S(x_0) + f_0,$$

$$(3.3) \quad S''(x_1) = -p_1 S'(x_1) - q_1 S(x_1) + f_1,$$

gdzie $S(x_0) = \gamma_a, S'(x_0) = t, S(x_1) = M_1 \frac{h_1^2}{6} + A_0 h_1 + B_0, S'(x_1) = M_1 \frac{h_1}{2} + A_0, p_i = p(x_i), q_i = q(x_i), f_i = f(x_i), i = 0, 1$.

Z (3.2) dostajemy

$$(3.4) \quad \begin{aligned} M_0^1 &= -p_0, & M_0^0 &= f_0 - q_0 \gamma_a, \\ A_0^1 &= 1 + M_0^1 \frac{h_1}{2}, & A_0^0 &= M_0^0 \frac{h_1}{2}, \\ B_0^1 &= -M_0^1 \frac{h_1^2}{6}, & B_0^0 &= \gamma_a - M_0^0 \frac{h_1^2}{6}. \end{aligned}$$

Jeśli $m_1 = 1 + 0.5h_1p_1 + q_1h_1^2/6 \neq 0$, to z (3.3)

$$(3.5) \quad \begin{aligned} M_1^1 &= -(p_1 + q_1h_1)A_0^1 - q_1B_0^1/m_1, \\ M_1^0 &= (f_1 - (p_1 + q_1h_1)A_0^0 - q_1B_0^0)/m_1. \end{aligned}$$

Ogólnie, znając funkcję sklejaną w przedziale $[x_{k-1}, x_k]$ tzn. współczynniki $M_{k-1}^1, M_{k-1}^0, A_{k-1}^1, A_{k-1}^0, B_{k-1}^1, B_{k-1}^0$ oraz M_k^1 i M_k^0 określamy ją w $[x_k, x_{k+1}]$ korzystając, po pierwsze, z warunków ciągłości (2.4) i (2.5). Skąd

$$(3.6) \quad \begin{aligned} A_k^i &= M_k^i \left(\frac{h_{k+1}}{2} + \frac{h_k}{2} \right) + A_{k-1}^i, \\ B_k^i &= M_k^i \left(\frac{h_k^2}{6} - \frac{h_{k+1}^2}{6} \right) + A_{k-1}^i h_k + B_{k-1}^i, \\ i &= 0, 1, \quad k = 1(1)N - 1. \end{aligned}$$

A po drugie, żądając aby

$$(3.7) \quad S''(x_{k+1}) = -p_{k+1}S'(x_{k+1}) - q_{k+1}S(x_{k+1}) + f_{k+1},$$

gdzie $S(x_{k+1}) = M_{k+1} \frac{h_{k+1}^2}{6} + A_k h_{k+1} + B_k$, $S'(x_{k+1}) = M_{k+1} \frac{h_{k+1}}{2} + A_k$,
 $p_{k+1} = p(x_{k+1})$, $q_{k+1} = q(x_{k+1})$, $f_{k+1} = f(x_{k+1})$.

Z (3.7) dostajemy

$$(3.8) \quad \begin{aligned} M_{k+1}^1 &= -(p_{k+1} + q_{k+1} h_{k+1}) A_k^1 - q_{k+1} B_k^1 / m_{k+1}, \\ M_{k+1}^0 &= (f_{k+1} - (p_{k+1} + q_{k+1} h_{k+1}) A_k - q_{k+1} B_k) / m_{k+1}. \end{aligned}$$

$k = 1(1)N - 1$, przy założeniu, że $m_k = 1 + 0, 5p_{k+1}h_{k+1} + q_{k+1}h_{k+1}^2/6 \neq 0$.

Drugi warunek brzegowy we wzorze (1.2) daje równanie na parametr t

$$(3.9) \quad (M_N^1 h_N^2 / 6 + A_{N-1}^1 h_N + B_{N-1}^1) t = \gamma_b - M_N^0 h_N^2 / 6 - A_{N-1}^0 h_N - B_{N-1}^0.$$

Algorytm jest prosty i polega na

- 1° Obliczeniu M_i^1 , M_i^0 $i = 0(1)N$, A_i^1 , A_i^0 oraz B_i^1 , B_i^0 dla $i = 0(1)N - 1$, odpowiednio ze wzorów (3.4)–(3.5) oraz (3.6) i (3.8).
- 2° Obliczeniu parametru t z równania (3.9).
- 3° Obliczeniu współczynników M_i , $i = 0(1)N$, A_i oraz B_i $i = 0(1)N - 1$ ze wzorów (3.1) z parametrem t wyznaczonym w punkcie 2°, które określają funkcję sklejaną, będącą rozwiązaniem przybliżonym zadania (1.1)–(1.2).

4. Oszacowanie błędu Oznaczmy przez $S_i = S(x_i)$ i $y_i = y(x_i)$, odpowiednio, rozwiązanie przybliżone i dokładne w punkcie x_i .

Postępując podobnie jak w [6] mamy

$$(4.1) \quad \begin{aligned} S_i &= S_{i-1} + h_i S'_{i-1} + \frac{h_i^2}{2} S''_{i-1} + \frac{h_i^3}{6} (S'''_{i-1})_+, \\ S'_i &= S'_{i-1} + h_i S''_{i-1} + \frac{h_i^2}{2} (S'''_{i-1})_+, \\ S''_i &= S''_{i-1} + h_i (S'''_{i-1})_+, \quad i = 1(1)N, \end{aligned}$$

gdzie $(S'''_{i-1})_+ = S'''(x_{i-1} + 0) = \frac{M_i - M_{i-1}}{h_i}$

$$(4.2) \quad \begin{aligned} y_i &= y_{i-1} + h_i y'_{i-1} + \frac{h_i^2}{2} y''_{i-1} + \frac{h_i^3}{6} y'''_{i-1} + R_{0i}, \\ y'_i &= y'_{i-1} + h_i y''_{i-1} + \frac{h_i^2}{2} y'''_{i-1} + R_{1i}, \\ y''_i &= y''_{i-1} + h_i y'''_{i-1} + R_{2i}, \quad i = 1(1)N, \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.3) \quad R_{0i} = \frac{h_i^4}{24} y^{IV}(\xi_i), R_{1i} = \frac{h_i^2}{6} y^{IV}(\xi'_i), R_{2i} = \frac{h_i^2}{2} y^{IV}(\xi''_i),$$

gdzie $\xi_i, \xi'_i, \xi''_i \in (x_{i-1}, x_i)$.

Niech $h = \max_i h_i$, $M = \max_x |y^{IV}(x)|$, wtedy

$$(4.4) \quad |R_{0i}| \leq \frac{h^4}{24} M, \quad |R_{1i}| \leq \frac{h^3}{6} M, \quad |R_{2i}| \leq \frac{h^2}{2} M.$$

Dla błędów $\varepsilon_i = S_i - y_i$, $\varepsilon'_i = S'_i - y'_i$, $\varepsilon''_i = S''_i - y''_i$ i $(\varepsilon'''_i)_+ = (S'''_i)_+ - y'''_i$ otrzymujemy, odejmując od (4.1) wzory (4.2), zależności

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \varepsilon_{i-1} + h_i \varepsilon'_{i-1} + \frac{h_i^2}{2} \varepsilon''_{i-1} + \frac{h_i^3}{6} (\varepsilon'''_{i-1})_+ - R_{0i}, \\ \varepsilon'_i &= \varepsilon'_{i-1} + h_i \varepsilon''_{i-1} + \frac{h_i^2}{2} (\varepsilon'''_{i-1})_+ - R_{1i}, \\ \varepsilon''_i &= \varepsilon''_{i-1} + h_i (\varepsilon'''_{i-1})_+ - R_{2i}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Odejmując od (3.7) równanie (1.1) w punkcie x_i dostajemy

$$\varepsilon''_i + p_i \varepsilon'_i + q_i \varepsilon_i = 0, \quad i = 0(1)N. \quad (4.6)$$

Wyznaczając z ostatniego równania we wzorze (4.5)

$$(\varepsilon'''_{i-1})_+ = \frac{\varepsilon''_i - \varepsilon''_{i-1}}{h_i} + \frac{R_{2i}}{h_i}$$

i podstawiając do niego ε''_i oraz ε''_{i-1} ze wzoru (4.6) dostajemy

$$(\varepsilon'''_{i-1})_+ = \frac{-p_i \varepsilon'_i - q_i \varepsilon_i + p_{i-1} \varepsilon'_{i-1} + q_{i-1} \varepsilon_{i-1}}{h_i} + \frac{R_{2i}}{h_i}. \quad (4.7)$$

Wstawiając (4.7) do dwóch pierwszych wzorów w (4.5) i porządkując otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned} (1 + p_i \frac{h_i}{2}) \varepsilon'_i + \frac{h_i}{2} q_i \varepsilon_i &= \\ &= (1 - \frac{h_i}{2} p_{i-1}) \varepsilon'_{i-1} - \frac{h_i}{2} q_{i-1} \varepsilon_{i-1} + \frac{h_i}{2} R_{2i} - R_{1i}, \\ p_i \frac{h_i^2}{6} \varepsilon'_i + (1 + q_i \frac{h_i^2}{6}) \varepsilon_i &= \\ &= (1 - \frac{h_i}{3} p_{i-1}) h_i \varepsilon'_{i-1} + (1 - \frac{h_i^2}{3} q_i) \varepsilon_{i-1} + \frac{h_i^2}{6} R_{2i} - R_{0i}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Skąd

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= C_i^1 \varepsilon_{i-1} + h_i C_i^2 \varepsilon'_{i-1} + C_i^3, \\ \varepsilon'_i &= D_i^1 \varepsilon_{i-1} + D_i^2 \varepsilon'_{i-1} + D_i^3, \end{aligned} \quad (4.9)$$

gdzie

$$\begin{aligned} C_i^1 &= ((1 - \frac{h_i^2}{3} q_{i-1})(1 + \frac{h_i}{2} p_i) + \frac{h_i^2}{12} p_i) / m_i, \\ C_i^2 &= ((1 - \frac{h_i}{3} p_{i-1})(1 + \frac{h_i}{2} p_i) - \frac{h_i^2}{6} p_i (1 - \frac{h_i}{2} p_{i-1})) / m_i, \\ C_i^3 &= (-R_{0i}(1 + \frac{h_i}{2} p_i) + \frac{h_i^2}{6} p_i R_{1i} + \frac{h_i^2}{6} R_{1i} + \frac{h_i^2}{6} R_{2i}) / m_i, \\ D_i^1 &= h_i (-\frac{1}{2} q_{i-1} (1 + \frac{h_i^2}{6} q_i) - \frac{1}{2} q_i (1 - \frac{h_i^2}{3} q_{i-1})) / m_i, \end{aligned}$$

$$D_i^2 = ((1 + \frac{h_i^2}{6})(1 - \frac{h_i}{2}p_{i-1}) - \frac{h_i^2}{2}q_i(1 - \frac{h_i}{3}p_{i-1}))/m_i,$$

$$D_i^3 = (\frac{h_i}{2}q_i R_{0i} - (1 + \frac{h_i^2}{6}q_i)R_{1i} + \frac{h_i}{2}R_{2i})/m_i,$$

przy założeniu, że $m_i = 1 + 0.5h_i p_i + h_i^2 q_i/6 \neq 0$ dla $i = 1(1)N$.

Ponieważ $\varepsilon_0 = 0$ więc (4.9) możemy zapisać w postaci

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \varepsilon_i &= E_i^1 \varepsilon'_0 + E_i^2, \\ \varepsilon'_i &= F_i^1 \varepsilon'_0 + F_i^2, \quad i = 1(1)N, \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.11) \quad \begin{aligned} E_0^1 &= 0, \quad E_0^2 = 0, \quad F_0^1 = 1, \quad F_0^2 = 0, \\ E_i^1 &= C_i^1 E_{i-1}^1 + h_i^2 C_i^2 F_{i-1}^1, \\ E_i^2 &= C_i^1 E_{i-1}^2 + h_i C_i^2 F_{i-1}^2 + C_i^3, \\ F_i^1 &= D_i^1 E_{i-1}^1 + D_i^2 F_{i-1}^1 \\ F_i^2 &= D_i^1 E_{i-1}^2 + D_i^2 F_{i-1}^2 + D_i^3, \quad i = 1(1)N. \end{aligned}$$

Z (4.4) oraz (4.11) otrzymujemy oszacowania

$$(4.12) \quad \begin{aligned} |E_i^1| &\leq \mu^1 h, \quad |E_i^2| \leq \mu^2 \frac{Mh^4}{24}, \\ |F_i^1| &\leq \sigma^1, \quad |F_i^2| \leq \sigma^2 \frac{Mh^3}{24}, \end{aligned}$$

gdzie $\mu^j = \max_i \mu_i^j$, $\sigma^j = \max_i \sigma_i^j$, $j = 1, 2$

$$\begin{aligned} \text{oraz} \quad \mu_0^1 &= 0, \quad \mu_0^2 = 0, \quad \sigma_0^1 = 1, \quad \sigma_0^2 = 0, \\ \mu_i^1 &= C_0^1 \mu_{i-1}^1 + C_0^1 \sigma_{i-1}^1, \\ \mu_i^2 &= C_0^1 \mu_{i-1}^2 + C_0^2 \sigma_{i-1}^2 + C_0^3, \\ \sigma_i^1 &= D_0^1 \mu_{i-1}^1 + D_0^2 \sigma_{i-1}^1, \\ \sigma_i^2 &= D_0^1 \mu_{i-1}^2 + D_0^2 \sigma_{i-1}^2 + D_0^3, \quad i = 1(1)N, \\ C_0^j &= \max_i |C_i^j|, \quad D_0^j = \max_i |D_i^j|, \quad j = 1, 2 \\ |C_i^3| &\leq \frac{Mh^4}{24} C_0^3, \quad |D_i^3| \leq \frac{Mh^3}{24} D_0^3, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} C_0^3 &= \max_i \frac{(|1 + \frac{h_i}{2}p_i| + \frac{3}{2}|h_i p_i| + 2)}{|m_i|}, \\ D_0^3 &= \max_i \frac{(|\frac{1}{2}h_i^2 q_i| + 4|1 + \frac{h_i^2}{6}| + 6)}{|m_i|}. \end{aligned}$$

Ponieważ $0 = \varepsilon_N = E_N^1 \varepsilon'_0 + E_N^2$ więc

$$(4.13) \quad |\varepsilon'_0| = \frac{|E_N^2|}{|E_N^1|} \leq \frac{\mu^2 \frac{Mh^4}{24}}{h \min_i \mu_i^1} = Nh^3.$$

Jeśli podział Δ jest taki, że

$$m_k = 1 + \frac{1}{2}h_k p_k + \frac{h_k^2}{6} \neq 0, \forall_k$$

oraz

$$M_N \frac{h_N^2}{6} + A_{N-1} h_N + B_{N-1} \neq 0 \text{ i } E_N^1 \neq 0,$$

to algorytm podany w paragrafie 3 jest dobrze zdefiniowany.

Łącząc nierówności otrzymane w paragrafie 4 dostajemy

TWIERDZENIE 4.1. *Jeżeli rozwiązanie zadania (1.1)–(1.2) tzn. funkcja $y(x) \in C_{[a,b]}^4$ i $h = x_{i+1} - x_i$, dla $i = 0(1)N - 1$, to w punktach podziału Δ zachodzą oszacowania*

$$(4.14) \quad \begin{aligned} \max_i |\varepsilon_i| &\leq N_1 h^4, & \max_i |\varepsilon'_i| &\leq N_2 h^3, \\ \max_i |\varepsilon''_i| &\leq N_3 h^3, & \max_i |(\varepsilon'''_i)_+| &\leq N_4 h, \end{aligned} \quad i = 0(1)N - 1,$$

gdzie stałe N_j dla $j = 1(1)4$ nie zależą od h .

Dowód. Z (4.10) i (4.12) oraz (4.13)

$$|\varepsilon_i| \leq |E_i^1| |\varepsilon'_0| + |E_i^2| \leq \mu^1 N h^4 + \mu^2 \frac{M h^4}{24} = N_1 h^4.$$

Analogicznie

$$|\varepsilon'_i| \leq |F_i^1| |\varepsilon'_0| + |F_i^2| \leq \sigma^1 N h^3 + \sigma^2 \frac{M h^3}{24} = N_2 h^3.$$

$$\text{Z (4.6) } |\varepsilon''_i| \leq \max_i |p_i| |\varepsilon'_i| + \max_i |q_i| |\varepsilon_i| \leq N_3 h^3.$$

Natomiast

$$h |(\varepsilon'''_i)_+| \leq |\varepsilon''_{i+1}| + |\varepsilon''_i| + |R_{2i+1}| \leq 2N_3 h^3 + \frac{1}{2} M h^2.$$

Skąd $|(\varepsilon'''_i)_+| \leq N_4 h$.

Na podstawie tego twierdzenia można wykazać

TWIERDZENIE 4.2. *Założmy, że spełnione są założenia twierdzenia 4.1, wtedy dla $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0(1)N - 1$ mamy*

$$(4.15) \quad |S^j(x) - y^j(x)| \leq K_j h^{4-j} \quad j = 0(1)2,$$

gdzie K_j stałe, które nie zależą od h .

Dowód. Dla $x \in [x_i, x_{i+1}]$, korzystając ze wzoru Taylora, możemy napisać

$$S(x) - y(x) = \varepsilon_i + \varepsilon'_i(x - x_i) + \frac{1}{2}\varepsilon''_i(x - x_i)^2 + \\ + \frac{1}{6}(\varepsilon'''_i)_+(x - x_i)^3 + \frac{1}{24}y^{IV}(\xi_i)(x - x_i)^4,$$

gdzie $\xi_i \in (x_i, x)$.

Stąd

$$|s(x) - y(x)| \leq |\varepsilon_i| + |\varepsilon'_i|h + \frac{1}{2}|\varepsilon''_i|h^2 + \frac{1}{6}|(\varepsilon'''_i)_+|h^3 + \frac{1}{24}Mh^4.$$

Korzystając z poprzedniego twierdzenia (wzory (4.14)), dostajemy ostatecznie

$$|S(x) - y(x)| \leq K_0h^4.$$

Podobnie

$$|S'(x) - y'(x)| \leq |\varepsilon'_i| + |\varepsilon''_i|h + \frac{1}{2}|(\varepsilon'''_i)_+|h^2 + \frac{1}{6}Mh^3 \leq K_1h^3$$

i

$$|S''(x) - y''(x)| \leq |\varepsilon''_i| + |(\varepsilon'''_i)_+|h + \frac{1}{2}Mh^2 \leq K_2h^2.$$

5. Przykłady numeryczne Niech błąd $= \max_i |S(x_i) - y(x_i)|$, gdzie $S(x_i)$ — wartość funkcji sklepanej, będącej rozwiązaniem przybliżonym a $y(x_i)$ — wartość rozwiązania dokładnego zadania (1.1)–(1.2) w węźle x_i . Metoda opisana w paragrafie 3 została wytestowana na następujących przykładach

- A. $y'' + xy' - y = xe^x - |x|(6 - 12x^2 - 3x^3)$, $-1 < x < 1$, $y(-1) = e^{-1} - 2$, $y(1) = e$,
rozwiązanie dokładne $y(x) = e^x - |x|(x^2 - x^3)$.
- B. $y'' + y = 0$, $0 < x < \pi/2$, $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 1$,
rozwiązanie dokładne $y(x) = \sin(x)$.
- C. $y'' = 6x$, $0 < x < 1$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$,
rozwiązanie dokładne $y(x) = x^3$.

W obliczeniach podział Δ przyjęto równomierny tzn. $x = a + ih$, $i = 0(1)N$, $Nh = b - a$. Wyniki obliczeń, dla różnych wartości N , zostały wykonane na emc R-32 i są przedstawione w 3-ch tabelach poniżej:

Tabela 5.1 (przykład A)

N	parametr t	błąd
10	7.3979	$9.8 \cdot 10^{-3}$
20	7.3754	$2.5 \cdot 10^{-3}$
40	7.3698	$6.1 \cdot 10^{-4}$

Tabela 5.2 (przykład B)

N	parametr t	błąd
10	0.99897	$5.7 \cdot 10^{-4}$
20	0.99974	$1.4 \cdot 10^{-4}$
40	0.99993	$3.6 \cdot 10^{-5}$

Tabela 5.3 (przykład C)

N	parametr t	błąd
10	$1.81799 \cdot 10^{-15}$	$1.1 \cdot 10^{-15}$
20	$4.99600 \cdot 10^{-16}$	$6.7 \cdot 10^{-16}$

Prace cytowane

- [1] J. Ahlberg, T. Ito, *A Collocation Method for Two-point Boundary Value Problems*, Math. Comput. 29 (1975), 761–776.
- [2] E. Albasiny, W. Hoskins, *Cubic Spline Solutions to Two-point Boundary Value Problems*, Comput. J. 12 (1969), 151–153.
- [3] W.G. Bickley, *Piecewise Cubic Integration and Two-point Boundary Problems*, Comput. J. 11 (1968), 206–208.
- [4] C. De Boor, B. Swartz, *Collocation of Gaussian Points*, SIAM J. Numer. Analysis 10 (1973), 582–606.
- [5] D.J. Fyfe, *The Use of Cubic Spline Solutions to Two-point Boundary Value Problems*, Comput. J. 12 (1969), 188–192.
- [6] Ш.П. Илин, *О сплайновых Решениях Обыкновенных Дифференциальных Уравнений*; Ж. Шыч. Мат. и Мат. Физ. 3 (1978), 620–627.
- [7] J.M. Jankowsky, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych, część 1*, WNT, Warszawa 1981.
- [8] F.R. Loscalzo, T.D. Talbot, *Spline Function Approximation for Solutions of Ordinary Differential Equations*, SIAM J. Numer. Analysis, 4 (1967), 433–445.
- [9] H.N. Mülthei, *Splineapproximationen von Beliebigen Defekt zur Numerischen Lösung Gewöhnlicher Differentialgleichungen, teil I*, Numer. Math. 32 (1979), 147–157.
- [10] F. Patricio, *Cubic Spline Functions and Initial Value Problems*, BIT 18 (1978), 342–347.
- [11] И. Петерсон, *О Кусочно Полиномиальной Аппроксимации*. Изш. А.Н. Ент СССР, Сер. Физ. Матем. Н., 1 (1962), 24–32.
- [12] J. Stoer, *Wstęp do metod numerycznych, tom 1* PWN, Warszawa 1979.

Summary**The Use of Cubic Spline Functions
to Two-point Boundary Value Problems**

In this paper we consider an algorithm for cubic spline function approximation of the solution of two-point boundary value problem for second order linear ordinary differential equation. This algorithm requires $O(N)$ arithmetical operations, where N is the number of subdivisions of considered interval. Error bounds for the solution are derived and numerical examples are given.