



ZBIGNIEW LEYK

Warszawa

Metoda H^{-1} -kollokacji z użyciem kwadratur rozwiązania zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych zwyczajnych *

(Praca wpłynęła do Redakcji 1987.08.26)

1. Wstęp. W drugiej połowie lat siedemdziesiątych opisano kilka metod hybrydowych, będących połączeniem metody kollokacji z inną metodą numeryczną. Wymagania co do regularności rozwiązania przybliżonego zostały w tych metodach bardzo osłabione. Jedną z takich metod jest metoda, będąca połączeniem metody kollokacji z metodą H^{-1} Galerkina (zob. [9]) opisana w pracach [2] i [3]. Generuje ona rozwiązania przybliżone nieciągłe. Nazwano ją metodą H^{-1} kollokacji Galerkina (w skrócie H^{-1} -kollokacji).

Jeśli zagadnienie nie jest regularne lub wartości pochodnych na pewnych odcinkach są duże, to należy się spodziewać, że błąd globalny (np. w normie $L^2(K)$) metody rozwiązującej to zagadnienie będzie duży. Niemniej jednak błąd lokalny (tj. błąd metody liczony na elemencie w pewnej ustalonej normie) może być mały na elemencie oddalonym od punktów osobliwych lub odcinków, na których rozwiązanie dokładne ma duże wartości pochodnych.

Przykładami metod generujących mało regularne rozwiązania przybliżone, a mianowicie nieciągłe, są: metody H^{-1} Galerkina (zob. [9]) oraz metoda H^{-1} -kollokacji (zob. [2]). Lokalne błędy tych metod (dla niektórych przynajmniej zagadnień) na pewnych elementach mogą być znacznie mniejsze niż błędy globalne w ustalonej normie (najczęściej $L^2(K)$ lub $L^\infty(K)$). Dotyczy to zwykle tych elementów, na których rozwiązanie dokładne jest bardziej regularne, a wartości pochodnych tego rozwiązania są niewielkie. Eksperymenty numeryczne dla metody H^{-1} Galerkina potwierdzające ten fakt podane są w [9].

Metody o takiej własności są szczególnie przydatne do przybliżonego

* CPBP 01.01.04/170.

rozwiązywania zagadnień, dla których błąd globalny metody jest duży (przy umiarkowanej ilości węzłów podziału). Można się spodziewać, że dadzą one dobrą aproksymację rozwiązania dokładnego na tych elementach, na których jest ono bardziej regularne, a jego pochodne mają niewielkie wartości.

Jednak, aby metodę H^{-1} -kollokacji (i nie tylko tę metodę) można było praktycznie stosować, należy używać kwadratur do obliczania występujących w nich całek. W niniejszej pracy odpowiemy na pytanie, jakie kwadratury można stosować, aby zachować stabilność metody H^{-1} -kollokacji i utrzymać rząd zbieżności w normie $L^2(K)$ taki, jaki ma ta metoda bez użycia kwadratur.

Opiszemy teraz krótko zawartość tej pracy. W rozdziale 2 sformułowaliśmy zagadnienie różniczkowe w postaci uogólnionej. Pozwoliło to na osłabienie regularności wymaganej od rozwiązania dokładnego, a co za tym idzie, rozszerzenie klasy rozważanych zagadnień. Ponadto rozdział ten zawiera opis oznaczeń. Definicję metody H^{-1} -kollokacji z użyciem kwadratur podaliśmy w rozdziale 3. Rozwiązanie przybliżone w tej metodzie jest na każdym elemencie wielomianem stopnia $\leq r$ oraz jest nieciągłe w punktach podziału przedziału $[0, l]$. Przyjeliśmy założenie, że kwadratury są dokładne dla wielomianów stopnia $\leq r+1$. Przy tym założeniu pokazaliśmy w rozdziale 4, że metoda H^{-1} -kollokacji jest stabilna, a w rozdziale 5 udowodniliśmy, że błąd metody w normie $L^2(K)$ jest rzędu $O(h^{r+1})$ dla $r \geq 1$, a w normach $H^k(e_i)$, $1 \leq k \leq r$, jest rzędu $O(h^{r+1-k})$.

2. Oznaczenia. Sformułowanie zadania. Podstawowe oznaczenia są zgodne z oznaczeniami używanymi w książce Ciarleta [1]. Niech K oznacza odcinek otwarty. Przestrzeń Sobolewa $W^{m,q}(K)$, $m \geq 0$, $q \in [1, \infty]$, jest zbiorem funkcji f takich, że $D^i f \in L^q(K)$, $i = 0, \dots, m$, gdzie $D^i f = \frac{d^i f}{dx^i}$ jest pochodną dystrybucyjną, m jest liczbą całkowitą. W przestrzeni $W^{m,q}(K)$ jest określona norma

$$\|v\|_{m,q,K} = \left(\int_K \sum_{i=0}^m |D^i v|^q dx \right)^{1/q}$$

dla $q \in [1, \infty)$ oraz

$$\|v\|_{m,\infty,K} = \max_{0 \leq i \leq m} (\text{ess sup}_{x \in K} |D^i v(x)|)$$

dla $q = \infty$.

Dla $v \in W^{m,q}(K)$ możemy również określić seminormę

$$|v|_{m,q,K} = \left(\int_K |D^m v|^q dx \right)^{1/q}$$

dla $q \in [1, \infty)$ oraz

$$|v|_{m,\infty,K} = \text{ess sup}_{x \in K} |D^m v(x)|$$

dla $q = \infty$. W przypadku gdy $q = 2$, będziemy pisać $H^m(K)$ zamiast $W^{m,2}(K)$, $\|\cdot\|_{m,K}$ zamiast $\|\cdot\|_{m,2,K}$ oraz $|\cdot|_{m,K}$ zamiast $|\cdot|_{m,2,K}$. Przyjmujemy, że $H^0(K) = L^2(K)$.

Przestrzeń $H^m(K)$, $m \geq 0$, jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym

$$(u, v)_{m,K} = \int_K \sum_{i=0}^m D^i u D^i v dx.$$

Ponadto określamy przestrzeń $H_0^1(K)$ jako domknięcie w sensie normy $\|\cdot\|_{1,K}$ przestrzeni $C_0^\infty(K)$ funkcji gładkich z nośnikiem zwartym zawartym w K .

Dla $m \geq 0$ i $\alpha \in [0, 1]$ symbol $C^{m,\alpha}(\bar{K})$ oznacza przestrzeń funkcji $f \in C^m(\bar{K})$, których m -te pochodne spełniają warunek Höldera z wykładnikiem α . Przestrzeń ta jest przestrzenią Banacha z normą

$$\|f\|_{C^{m,\alpha}(\bar{K})} = \|f\|_{m,\infty,\bar{K}} + \sup_{\substack{x,y \in \bar{K} \\ x \neq y}} \frac{|f^{(m)}(x) - f^{(m)}(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Przyjmujemy, że $C^{m,0}(\bar{K}) = C^m(\bar{K})$ z normą $\|f\|_{C^m(\bar{K})} = \|f\|_{m,\infty,\bar{K}}$.

Obcięcie funkcji v do zbioru K oznaczamy $v|_K$. Przestrzeń wszystkich wielomianów stopnia nie większego niż r obciętych do zbioru K będzie oznaczana $P_r(K)$.

Rozważamy następujące zagadnienie brzegowe

$$(2.1) \quad \begin{cases} Lu(x) = -(d(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + \\ \quad + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{dla } x \in K = (0, l), \\ u(0) = 0, \quad u(l) = 0, \end{cases}$$

gdzie $u'(x) = \frac{du}{dx}(x)$. Dalej będziemy rozpatrywać zagadnienie (2.1) w sformułowaniu wariacyjnym (uogólnionym):

znaleźć $u \in H_0^1(K)$ takie, że

$$(2.2) \quad \forall v \in H_0^1(K), \quad a(u, v) = l(v),$$

gdzie

$$a(u, v) = \int_K d(x)u'v' + b(x)u'v + c(x)uv dx$$

oraz

$$l(v) = \int_K f(x)v dx = (f, v)_{0,K}.$$

Będziemy również rozważali zagadnienie dualne do (2.2), które formułujemy następująco:

znaleźć $w \in H_0^1(K)$ takie, że

$$(2.3) \quad \forall v \in H_0^1(K), \quad a(v, w) = l(v).$$

Przez L^* będziemy oznaczali operator formalnie sprzężony do L (w sensie iloczynu skalarnego $(\cdot, \cdot)_{0,K}$), tzn.

$$(2.4) \quad L^* v(x) = -(d(x)v'(x))' - (b(x)v(x))' + c(x)v(x).$$

Zakładamy, że istnieją stałe d_0, d_1 takie, że

$$(2.5) \quad 0 < d_0 \leq d(x) \leq d_1 \quad \text{dla prawie wszystkich } x \in \bar{K}.$$

Ponadto zakładamy, że

$$(2.6) \quad d, b \in W^{1,\infty}(K), \quad c \in L^\infty(K), \quad f \in L^2(K)$$

oraz że

$$(2.7) \quad \text{dla } f = 0 \text{ zadania (2.2) i (2.3) mają tylko zerowe rozwiązania.}$$

Założenia (2.5), (2.6) i (2.7) będą obowiązywały w całej pracy.

Z warunków (2.5), (2.6), (2.7) wynika, że rozwiązania u i w zagadnień (2.2) i (2.3) istnieją, są wyznaczone jednoznacznie oraz należą do $H^2(K) \cap H_0^1(K)$.

Uwaga 2.1. Ponieważ $W^{1,\infty}(K) \hookrightarrow C(\bar{K})$, więc funkcje d i b są ciągłe na $\bar{K}$, zob. np. [1]. ■

Jeśli założymy, że

$$(2.8) \quad d \in W^{2,\infty}(K) \cap C^{1,1}(\bar{K}), \quad b \in C^{1,1}(\bar{K}), \quad c \in C^{0,1}(\bar{K}), \quad f \in H^1(K),$$

to rozwiązania u i w zagadnień (2.2) i (2.3) należą do $H^3(K) \cap H_0^1(K)$ oraz

$$(2.9) \quad \|u\|_{3,K} \leq C_3 \|f\|_{1,K}, \quad \|w\|_{3,K} \leq C_4 \|f\|_{1,K},$$

gdzie stałe C_3, C_4 nie zależą od u, w, f , zob. [6, str. 216 oraz str. 204 wraz z uwagą 2.4, str. 220].

Wprowadzimy podział odcinka $[0, l] = \bar{K}$. Dzielimy ten odcinek na mniejsze odcinki (elementy) $e_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, N$, gdzie

$$(2.10) \quad 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = l,$$

oraz przyjmujemy, że $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \dots, N$. Ponadto niech

$$h = \max_{0 \leq i \leq N} h_i, \quad h_{\min} = \min_{0 \leq i \leq N} h_i.$$

Zakładamy, że ciąg podziałów przy $h \rightarrow 0$ jest regularny, tzn.

$$(2.11a) \quad \exists \sigma > 0, \quad \frac{h}{h_{\min}} \leq \sigma \quad \text{przy } h \rightarrow 0,$$

zob. [1]. Ponadto dalej potrzebne nam będzie następujące dodatkowe założenie:

(2.11b) funkcje d' , c , f mają skończoną liczbę punktów nieciągłości. Zakładamy, że punkty te są tak położone, iż istnieje podział przedziału $\bar{K}$ (spełniający warunek (2.11a)), przy którym $d', b', c \in W^{1,\infty}(e_i)$, $f \in C(e_i)$ dla $i = 0, 1, \dots, N$.

Stąd wynika, że funkcje d' , b' , c , f są ciągłe na każdym elemencie e_i , $i = 0, \dots, N$. Ponadto z (2.11b) wynika, że $d, b \in W^{2,\infty}(e_i)$. Symbol C (również z indeksami) będzie oznaczał stałą dodatnią o różnych wartościach w różnych kontekstach. *W całej pracy stałe C nie będą zależały od h , co będziemy czasami krótko zapisywali $C \neq C(h)$.*

W dalszej części pracy będziemy używali następujących przestrzeni elementu skończonego:

$$\mathfrak{M}_r^k = \{v \in C^k(\bar{K}): v|_{e_i} \in P_r(e_i), i = 0, 1, \dots, N\},$$

gdzie $k \geq 0$, $r \geq k+1$,

$$\mathfrak{M}_r^{-1} = \{v \in L^2(K); v|_{e_i} \in P_r(e_i), i = 0, 1, \dots, N\},$$

gdzie $r \geq 0$,

$$\mathfrak{M}_r^k = \{v \in \mathfrak{M}_r^k: v(0) = 0, v(l) = 0\},$$

gdzie $k \geq 0$, $r \geq k+1$.

Będziemy wykorzystywali pewne podprzestrzenie powyższych przestrzeni elementu skończonego, mianowicie

$$\mathfrak{T}_r^k = \left\{ v \in \mathfrak{M}_r^k: \frac{d^m v}{dx^m}(x_i) = 0, 0 \leq m \leq k, i = 0, \dots, N+1 \right\},$$

gdzie $k \geq 0$, $r \geq k+1$.

Prawdziwa jest następująca równość dla $r \geq 2k+1$

$$(2.12) \quad \mathfrak{M}_r^k = \mathfrak{T}_r^k \oplus \mathfrak{M}_{2k+1}^k,$$

gdzie $k \geq 0$.

Ponadto dla v takich, że $v|_{e_i} \in H^m(e_i)$, $m \geq 0$, $i = 0, \dots, N$, wprowadzamy następujące normy (zob. [1], uwaga 3.2.2, str. 133):

$$(2.13) \quad |||v|||_{m,q} = \left(\sum_{i=0}^N ||v||_{m,q,e_i}^q \right)^{1/q} \quad \text{dla } q \in [1, \infty)$$

oraz

$$|||v|||_{m,\infty} = \sup_{0 \leq i \leq N} ||v||_{m,\infty,e_i} \quad \text{dla } q = \infty.$$

W przypadku gdy $q = 2$, będziemy pisali $|||\cdot|||_m$ zamiast $|||\cdot|||_{m,2}$.

Uwaga 2.2. Zauważmy, że $\|v\|_{0,q} = \|v\|_{0,q,K}$ dla $v \in L^q(K)$, gdzie $q \in [1, \infty]$. ■

Opiszemy teraz oznaczenia, które będziemy używali dla wielomianów ortogonalnych. Przez $J_n^{(\alpha,\beta)}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 0$, oznaczamy wielomiany Jacobiego (przesunięte na przedział $[0, 1]$) dane wzorem (formuła Rodriguesa)

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{x^\alpha (1-x)^\beta} \frac{d^n}{dx^n} [x^{n+\alpha} (1-x)^{n+\beta}],$$

gdzie $\alpha, \beta \in (-1, \infty)$, zob. [10]. Wielomiany powyższe są ortogonalne do wielomianów stopnia $k < n$ z wagą $x^\alpha (1-x)^\beta$, tzn.

$$(2.14) \quad \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta J_n^{(\alpha,\beta)}(x) p_k(x) dx = 0 \quad \forall p_k \in P_k([0, 1]).$$

Wielomiany te są związane z kwadraturami Gaussa–Jacobiego.

Kwadratury Gaussa–Jacobiego $Q_n^{(\alpha,\beta)}$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$, dane są wzorami

$$(2.15) \quad Q_n^{(\alpha,\beta)}(f) = \sum_{j=1}^n w_j f(p_j),$$

gdzie $\{p_j\}_{j=1}^n$ są pierwiastkami wielomianu $J_n^{(\alpha,\beta)}$, a wagi w_j są tak wybrane, aby zachodziło

$$(2.16) \quad Q_n^{(\alpha,\beta)}(f) = \int_0^1 t^\alpha (1-t)^\beta f(t) dt \quad \forall f \in P_{2n-1}([0, 1]).$$

Wagi $\{w_j\}_{j=1}^n$ są wyznaczone jednoznacznie, zob. [10].

W pracy będziemy często korzystali z następującej nierówności, prawdziwej dla $f \in W^{m,\infty}(e_i)$, $v \in W^{m,q}(e_i)$, $m \geq 0$, $q \geq 1$, mianowicie

$$(2.17) \quad |fv|_{m,q,e_i} \leq C \sum_{j=0}^m |v|_{m-j,q,e_i} |f|_{j,\infty,e_i},$$

gdzie stała $C \neq C(h)$, zob. [1, str. 192]. Również będziemy używali następującego oszacowania dla $v \in P_n(e_i)$, $n \geq 0$,

$$(2.18) \quad |v|_{m,q,e_i} \leq Ch^{k-m} h^{(1/q)-(1/l)} |v|_{k,l,e_i},$$

gdzie $q, l \geq 1$, $0 \leq k \leq m$ oraz $C \neq C(h)$, zob. [1, str. 141].

Błąd kwadratury na elemencie e_i oznaczmy przez $E_i(f) = I_i(f) - Q_i(f)$, $i = 0, 1, \dots, N$ oraz na przedziale $[0, 1]$ przez $E(\tilde{f}) = I(\tilde{f}) - Q(\tilde{f})$, gdzie $I_i(f) = \int_{e_i} f(x) dx$, $I(\tilde{f}) = \int_0^1 \tilde{f}(t) dt$, a $Q_i(f)$ i $Q(\tilde{f})$ oznaczają kwadratury funkcji f i $\tilde{f}$ odpowiednio na elemencie e_i oraz na przedziale $[0, 1]$. Spełniają one równość $Q_i(f) = Q(\tilde{f})$, gdzie $\tilde{f}(t) = f(x_i + th_i)$, $t \in [0, 1]$.

Zacniemy od lematu pomocnego w szacowaniu błędu kwadratury.

LEMAT 2.1. Niech $1 \leq s \leq m-n+2$, $j \leq n \leq m+1$ oraz $j = 0, 1, 2$. Niech ciąg podziałów odcinka $\bar{K}$ jest regularny (zob. (2.11a)) oraz kwadratura Q spełnia warunek:

$$(2.19) \quad Q(\tilde{p}) = I(\tilde{p}) \quad \forall \tilde{p} \in P_m([0, 1]),$$

gdzie $m \geq \max(0, j-1)$. Zakładamy, że jeśli $s+j \geq 2$, to $f \in W^{s+j-1,q}(e_i)$ i $q \in (1, \infty]$, a jeśli $s = 1$, $j = 0$, to $f \in C(e_i)$ i $q = \infty$. Wtedy istnieje stała C niezależna od h i f taka, że dla dowolnego $p \in P_n(e_i)$

$$(2.20) \quad |I_i(fp) - Q_i(fp)| \leq Ch^{s+j-(1/2)-(1/q)} \|f\|_{s+j-1,q,e_i} \|p\|_{j,e_i},$$

przy czym dla $j = 0$ w miejscu normy $\|f\|_{s+j-1,q,e_i}$ występuje seminorma $|f|_{s+j-1,q,e_i}$.

Uwaga 2.3. Przez kwadraturę Q będziemy rozumieli kwadraturę Gaussa-Jacobiego. ■

Uwaga 2.4. Jeśli przyjmiemy, że parametr $j = 1$ oraz $n = s = k$, $m = 2k-2$, gdzie $k \geq 1$, to otrzymamy twierdzenie 4.1.5 podane przez Ciarleta w [1]. Tak więc powyższy lemat można traktować jako uogólnienie tego twierdzenia w przypadku jednowymiarowym. Jednak dowód lematu 2.1 podany poniżej różni się od dowodu twierdzenia 4.1.5 w [1] podanego przez Ciarleta. Z jednej strony został on uproszczony przez fakt, że rozpatrywany jest przypadek jednowymiarowy. Z drugiej strony stał się on bardziej złożonym z powodu rozpatrywania przypadku $j \neq 1$ oraz z powodu wprowadzenia parametrów m , s , n . ■

Dowód lematu 2.1. Niech $\tilde{K} = [0, 1]$. Zachodzi wzór

$$I_i(fp) - Q_i(fp) = h_i(I(\tilde{f}\tilde{p}) - Q(\tilde{f}\tilde{p})).$$

Ponadto, ponieważ dla $s+j \geq 2$ i $q \in (1, \infty]$ słuszne jest włożenie $W^{s+j-1,q}(e_i) \hookrightarrow C(e_i)$, więc kwadratura $Q_i(fp)$ jest dobrze określona.

I. Udowodnimy najpierw (2.20) dla $j = 0$.

Niech $G(\tilde{f}) = E(\tilde{f}\tilde{p})$. Funkcjonał $G: W^{s-1,q}(\tilde{K}) \rightarrow \mathbb{R}$ jest liniowy względem $\tilde{f}$ oraz ciągły dla $s \geq 2$ i $q \in (1, \infty]$:

$$|G(\tilde{f})| \leq C \|\tilde{f}\|_{0,\infty,\tilde{K}} \|\tilde{p}\|_{0,\infty,\tilde{K}} \leq C \|\tilde{f}\|_{s-1,q,\tilde{K}} \|\tilde{p}\|_{0,\tilde{K}},$$

a C zależy od wag kwadratury Q . W powyższej nierówności wykorzystaliśmy równoważność norm $\|\cdot\|_{0,\infty,\tilde{K}}$ i $\|\cdot\|_{0,\tilde{K}}$ w przestrzeniach skończenie wymiarowych $P_n(\tilde{K})$ (zob. np. [1]) oraz włożenie $W^{s-1,q}(\tilde{K}) \hookrightarrow L^\infty(\tilde{K})$, jeśli $s \geq 2$ i $q \in (1, \infty]$.

Z warunku (2.19) wynika, że jeśli $2 \leq s \leq m-n+2$ i $0 \leq n \leq m$, to $G(\tilde{f}) = 0$ dla $\tilde{f} \in P_{s-2}(\tilde{K})$, bo $\tilde{f}\tilde{p} \in P_{s-2+n}(\tilde{K}) \subset P_m(\tilde{K})$ dla $s \leq m-n+2$. Z lematu Bramble'a-Hilberta (zob. [1]) otrzymamy, że dla $2 \leq s \leq m-n+2$, $q \in (1, \infty]$ i $0 \leq n \leq m$

$$(2.21) \quad |E(\tilde{f}\tilde{p})| \leq C |\tilde{f}|_{s-1, q, \tilde{K}} \|\tilde{p}\|_{0, \tilde{K}},$$

gdzie C nie zależy od $\tilde{f}$ i $\tilde{p}$.

Zauważmy, że jeśli $q = \infty$ i $s = 1$, to nierówność (2.21) jest również prawdziwa dla dowolnego $n \geq 0$, przy czym nie musimy korzystać z założenia (2.19). Wykorzystując nierówności

$$|\tilde{f}|_{s-1, q, \tilde{K}} \leq Ch^{s-1-(1/q)} |f|_{s-1, q, e_i}$$

oraz

$$\|\tilde{p}\|_{0, \tilde{K}} \leq Ch^{-1/2} \|p\|_{0, e_i},$$

zob. [1], otrzymamy oszacowanie

$$|E_i(fp)| = h_i |E(\tilde{f}\tilde{p})| \leq Ch^{s-(1/2)-(1/q)} |f|_{s-1, q, e_i} \|p\|_{0, e_i},$$

gdzie $1 \leq s \leq m-n+2$ oraz jeśli $s \geq 2$, to $0 \leq n \leq m$ i $q \in (1, \infty]$, a jeśli $s = 1$, to $0 \leq n \leq m+1$ i $q = \infty$. Udowodniliśmy (2.20) dla $j = 0$.

II. Pokażemy teraz (2.20) dla $j = 1$.

Niech $p_i \in P_0(e_i)$ będzie wielomianem interpolacyjnym stopnia 0 wielomianu $p \in P_n(e_i)$ w węźle x_i , tzn. $p_i = p(x_i)$. Zachodzi równość

$$(2.22) \quad E_i(fp) = E_i(fp_i) + E_i(f(p-p_i)).$$

Szacujemy pierwszy składnik powyższej równości. Korzystamy z (2.20) z parametrami $j = 0$, $n = 0$. Otrzymamy, że dla $2 \leq s \leq m+2$, $q > 1$

$$(2.23) \quad |E_i(fp_i)| \leq Ch^{s-(1/2)-(1/q)} |f|_{s-1, q, e_i} \|p\|_{0, e_i}.$$

Wykorzystaliśmy tu następujące oszacowanie:

$$\|p_i\|_{0, e_i} \leq h^{1/2} \|p\|_{0, \infty, e_i} \leq C \|p\|_{0, e_i},$$

używając definicji normy $\|\cdot\|_{0, e_i}$ i nierówności (2.18). Następnie zastępujemy s w nierówności (2.23) $s+1$. Otrzymamy, że dla $1 \leq s \leq m+1$ i $q > 1$

$$(2.24) \quad |E_i(fp_i)| \leq Ch^{s+(1/2)-(1/q)} |f|_{s, q, e_i} \|p\|_{0, e_i}.$$

Zauważmy, że powyższa nierówność jest również prawdziwa dla $1 \leq s \leq m-n+2$, jeśli $1 \leq n \leq m+1$.

Przechodzimy do szacowania drugiego składnika równości (2.22). Najpierw korzystamy z (2.20) z parametrami $j = 0$, $2 \leq s \leq m-n+2$, $q > 1$,

$0 \leq n \leq m$. Mamy zatem (zob. [1])

$$(2.25) \quad \begin{aligned} |E_i(f(p-p_i))| &\leq Ch^{s-(1/2)-(1/q)} |f|_{s-1,q,e_i} \|p-p_i\|_{0,e_i} \leq \\ &\leq Ch^{s+(1/2)-(1/q)} \|f\|_{s-1,q,e_i} \|p\|_{1,e_i}. \end{aligned}$$

Pozostał do rozpatrzenia przypadek $s = 1$, $1 \leq n \leq m+1$ i $q > 1$. Nie wynika on z (2.20) dla $j = 0$, bowiem jeśli $s = 1$, to $q = \infty$, a interesuje nas $q > 1$ (a nie tylko $q = \infty$). Wiadomo, że jeśli $q > 1$, to $W^{1,q}(\tilde{K}) \hookrightarrow L^\infty(\tilde{K})$, tzn.

$$\forall \tilde{f} \in W^{1,q}(\tilde{K}), \quad \|\tilde{f}\|_{0,\infty,\tilde{K}} \leq C \|\tilde{f}\|_{1,q,\tilde{K}},$$

zob. [1]. Stąd wynika, że

$$\begin{aligned} |E_i(f(p-p_i))| &= h_i |E(\tilde{f}(\tilde{p}-\tilde{p}_i))| \leq \\ &\leq Ch \|\tilde{f}\|_{0,\infty,\tilde{K}} \|\tilde{p}-\tilde{p}_i\|_{0,\infty,\tilde{K}} \leq Ch \|\tilde{f}\|_{1,q,\tilde{K}} \|\tilde{p}\|_{1,\tilde{K}}. \end{aligned}$$

Wykorzystaliśmy tu fakt, że normy na przestrzeni $P_n(\tilde{K})$ są równoważne. Biorąc pod uwagę nierówności

$$\|\tilde{f}\|_{1,q,\tilde{K}} \leq Ch^{-1/q} \|f\|_{1,q,e_i} \quad \text{oraz} \quad \|\tilde{p}\|_{1,\tilde{K}} \leq Ch^{1/2} \|p\|_{1,e_i},$$

otrzymamy więc

$$(2.26) \quad |E_i(f(p-p_i))| \leq Ch^{(3/2)-(1/q)} \|f\|_{1,q,e_i} \|p\|_{1,e_i}.$$

Z równości (2.22), nierówności trójkąta i oszacowań (2.24), (2.25) i (2.26) otrzymamy nierówność

$$|E_i(fp)| \leq Ch^{s+(1/2)-(1/q)} \|f\|_{s,q,e_i} \|p\|_{1,e_i},$$

gdzie $1 \leq s \leq m-n+2$, $1 \leq n \leq m+1$, $m \geq 0$ oraz $q \in (1, \infty]$. Udowodniliśmy (2.20) dla $j = 1$.

III. Przechodzimy do dowodu (2.20) dla $j = 2$.

Zakładamy, że $f \in W^{s+1,q}(e_i)$. Niech $p_i \in P_1(e_i)$ będzie interpolacją wielomianu $p \in P_n(e_i)$ w 2 różnych punktach z e_i , tzn. $p_i(x_{ik}) = p(x_{ik})$ dla $k = 0, 1$. Wykorzystamy równość (2.22). Szacujemy pierwszy składnik tej równości. Korzystamy z (2.20) z parametrami $j = 1$, $n = 1$. Otrzymamy, że dla $1 \leq s \leq m+1$, $q > 1$

$$(2.27) \quad |E_i(fp_i)| \leq Ch^{s+(1/2)-(1/q)} \|f\|_{s,q,e_i} \|p\|_{1,e_i}.$$

Wykorzystaliśmy tu następujące oszacowanie:

$$\|p_i\|_{1,e_i} \leq \|p-p_i\|_{1,e_i} + \|p\|_{1,e_i} \leq C \|p\|_{1,e_i}$$

zob. [1]. Następnie w nierówności (2.27) s zastępujemy $s+1$. Otrzymamy, że dla $0 \leq s \leq m$, $q > 1$

$$(2.28) \quad |E_i(f p_i)| \leq C h^{s+(3/2)-(1/q)} \|f\|_{s+1, q, e_i} \|p\|_{1, e_i}.$$

Zauważmy, że powyższa nierówność jest również prawdziwa dla $1 \leq s \leq m-n+2$, jeśli $2 \leq n \leq m+1$ i $m \geq 1$.

Przechodzimy do szacowania drugiego składnika równości (2.22). Korzystamy z (2.20) z parametrami $j = 1$, $1 \leq s \leq m-n+2$, $q > 1$ i $1 \leq n \leq m+1$. Mamy zatem (zob. [1])

$$(2.29) \quad \begin{aligned} E_i(f(p-p_i)) &\leq C h^{s+(1/2)-(1/q)} \|f\|_{s, q, e_i} \|p-p_i\|_{1, e_i} \leq \\ &\leq C h^{s+(3/2)-(1/q)} \|f\|_{s, q, e_i} \|p\|_{2, e_i}. \end{aligned}$$

Z równości (2.22), nierówności trójkąta oraz oszacowań (2.28) i (2.29) otrzymamy nierówność

$$(2.30) \quad |E_i(f p)| \leq C h^{s+(3/2)-(1/q)} \|f\|_{s+1, q, e_i} \|p\|_{2, e_i},$$

gdzie $1 \leq s \leq m-n+2$, $2 \leq n \leq m+1$, $m \geq 1$ i $q \in (1, \infty]$. Oszacowanie (2.30) dowodzi, że nierówność (2.20) jest prawdziwa dla $j = 2$, co kończy dowód. ■

Uwaga 2.5. Powyższy lemat jest prawdziwy również dla $j > 2$. Jednak tego faktu nie wykorzystujemy w dalszej części pracy.

Korzystamy w tej pracy z nierówności Höldera (dla trzech czynników – zob. [5])

$$(2.31) \quad \sum_i |a_i b_i c_i| \leq \left(\sum_i |a_i|^\alpha \right)^{1/\alpha} \left(\sum_i |b_i|^\beta \right)^{1/\beta} \left(\sum_i |c_i|^\gamma \right)^{1/\gamma},$$

gdzie $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$, $\gamma \geq 1$ oraz

$$(1/\alpha) + (1/\beta) + (1/\gamma) = 1.$$

Nierówność (2.31) wynika bezpośrednio z nierówności Höldera dla dwóch czynników.

3. Opis metod H^{-1} -kollokacji. W niniejszym rozdziale podamy definicję metod H^{-1} -kollokacji z użyciem kwadratur do rozwiązywania zagadnień (2.2). Zaczniemy od opisu metod H^{-1} -kollokacji (dalej słowa „z użyciem kwadratur” będziemy pomijali).

DEFINICJA 3.1. Metodami H^{-1} -kollokacji (dla zagadnienia (2.2)) nazywamy następujące metody:

znaleźć $U \in \mathfrak{M}_r^{-1}$ takie, że

$$(3.1) \quad LU(x_{ij}) = f(x_{ij}), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, r-1,$$

$$(3.2) \quad \sum_{i=0}^N R_i(U \cdot L^* V) = \sum_{i=0}^N R_i(f \cdot V) \quad \forall V \in \mathfrak{M}_3^1,$$

gdzie $r \geq 1$, punkty $\{x_{ij}\}_{j=1}^{r-1}$ są afinicznym przekształceniem na e_i punktów Jacobiego, tzn.

$$(3.3) \quad x_{ij} = x_i + h_i p_j,$$

a $\{p_j\}_{j=1}^{r-1}$ są zerami wielomianu $J_{r-1}^{(2,2)}$. Ponadto R_i , $i = 0, 1, \dots, N$, oznaczają następujące kwadratury:

$$(3.4) \quad R_i(f) = h_i R(\tilde{f}),$$

gdzie $\tilde{f}(t) = f(x_i + th_i)$, $t \in [0, 1]$ oraz $R(\tilde{f})$ jest kwadraturą całki $\int_0^1 \tilde{f}(t) dt = I(\tilde{f})$ daną wzorem $R(\tilde{f}) = \sum_{j=1}^n w_j \tilde{f}(t_j)$, $n \geq 2$, o własności:

$$(3.5) \quad R(\tilde{f}) = I(\tilde{f}) \quad \forall \tilde{f} \in P_{r+1}([0, 1]). \quad \blacksquare$$

Uwaga 3.1. Dla $r = 1$ występują tylko równania (3.2). Metoda w tym przypadku sprowadza się do metody H^{-1} Galerkina, zob. [2], [9], przy czym całki na elementach e_i są zastąpione kwadraturami R_i . ■

Z określeń (3.4) i (3.5) wynika, że

$$(3.6) \quad R_i(f) = I_i(f) \quad \forall f \in P_{r+1}(e_i).$$

W praktyce wybieramy kwadraturę R_i tak, aby spełniała warunek (3.6) oraz aby zawierała możliwie małą ilość węzłów. Wiadomo, że najmniejszą ilość węzłów potrzebną do spełnienia (3.6) mają kwadratury Gaussa. Ilość ta wynosi $1+r/2$ dla r parzystego i $2+(r-1)/2$ dla r nieparzystego. Stąd możliwymi do przyjęcia w praktyce są kwadratury $R = Q_{r+1}^{(0,0)}$ lub $R = Q_{r+2}^{(1,1)}$ dla r parzystego, gdzie $\tilde{r} = r/2$, oraz $R = Q_{\tilde{r}+2}^{(1,0)}$, $R = Q_{\tilde{r}+2}^{(0,1)}$ lub $R = Q_{\tilde{r}+2}^{(0,0)}$ dla r nieparzystego, gdzie $\tilde{r} = (r-1)/2$ (zob. rozdz. 2). Stosowanie kwadratur o większej ilości węzłów zwiększa czas obliczania współczynników układu, a więc i czas tworzenia układu równań.

Zapiszemy metody (3.1), (3.2) w postaci wariacyjnej; co ułatwi ich badanie. Przyjmujemy tutaj, że

$$(3.7) \quad Q(\tilde{f}) = \sum_{j=1}^{r-1} \tilde{w}_j \tilde{f}(p_j),$$

gdzie $\{p_j\}_{j=1}^{r-1}$ są zerami wielomianu $J_{r-1}^{(2,2)}$, wagi $\{\tilde{w}_j\}_{j=1}^{r-1}$ spełniają równości

$$\tilde{w}_j = w_j^{(2,2)} / [p_j^2 (1 - p_j)^2],$$

a $\{w_j^{(2,2)}\}_{j=1}^{r-1}$ są wagami kwadratury $Q_{r-1}^{(2,2)}$ (zob. rozdz. 2). Dla $r = 1$ przyjmujemy, że $Q(\tilde{f}) = 0$. Ponadto niech

$$(3.8) \quad Q_i(f) = h_i Q(\tilde{f}), \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

gdzie $\tilde{f}(t) = f(x_i + th_i)$, $t \in [0, 1]$, $r \geq 2$. Zauważmy, że $Q_i(f) = 0$ dla $r = 1$. Pokażemy teraz, że

$$(3.9) \quad Q(\tilde{f}\tilde{p}) = I(\tilde{f}\tilde{p})$$

dla dowolnego $\tilde{f} \in P_{2r-n}([0, 1])$ i $\tilde{p} \in P_n([0, 1])$ takiego, że $\tilde{p}(0) = \tilde{p}'(0) = 0$, $\tilde{p}(1) = \tilde{p}'(1) = 0$, gdzie $r \geq 2$, $4 \leq n \leq 2r$.

Niech $\tilde{q}(t) = \tilde{p}(t)/[t^2(1-t)^2]$. Zauważmy, że $\tilde{q} \in P_{n-4}([0, 1])$. Ponieważ kwadratury $Q_{r-1}^{(2,2)}$ są dokładne dla wielomianów stopnia $\leq 2r-3$ (zob. (2.16)), więc otrzymamy

$$\begin{aligned} I(\tilde{f}\tilde{p}) &= \int_0^1 \tilde{f}(t) \tilde{p}(t) dt = \int_0^1 t^2(1-t)^2 \tilde{f}(t) \tilde{q}(t) dt = \\ &= \sum_{j=1}^{r-1} w_j^{(2,2)} \tilde{f}(p_j) \tilde{q}(p_j) = \sum_{j=1}^{r-1} \frac{w_j^{(2,2)}}{p_j^2(1-p_j)^2} \tilde{f}(p_j) \tilde{p}(p_j) = Q(\tilde{f}\tilde{p}), \end{aligned}$$

bo $\tilde{f}\tilde{q} \in P_{2r-3}([0, 1])$, co kończy dowód równości (3.9). Następnie z (3.9) i (3.8) otrzymamy dla $r \geq 2$ i $n = r+2$

$$(3.10) \quad Q_i(fp) = I_i(fp) \quad \forall f \in P_{r-2}(e_i), p \in \mathfrak{I}_{r+2}^1,$$

gdzie $\mathfrak{I}_{r+2}^1 = \{v \in \mathfrak{M}_{r+2}^1: \frac{d^m v}{dx^m}(x_i) = 0, m = 0, 1, i = 0, \dots, N+1\}$, zob. rozdział 2. Zachodzi równość

$$(3.11) \quad \mathfrak{M}_{r+2}^1 = \mathfrak{I}_{r+2}^1 \oplus \mathfrak{M}_3^1,$$

zob. (2.12). Wykorzystując powyższe oznaczenia, sformułujemy metody (3.1), (3.2) w postaci wariacyjnej.

TWIERDZENIE 3.1. *Zagadnienie (3.1), (3.2) jest równoważne następującemu: znaleźć $U \in \mathfrak{M}_r^{-1}$ takie, że*

$$(3.12) \quad a_h(U, V) = l_n(V) \quad \forall V \in \mathfrak{M}_{r+2}^1,$$

gdzie

$$a_h(U, V) = \sum_{i=0}^N [Q_i(LUV_1) + R_i(U \cdot L^* V_2)]$$

oraz

$$l_h(V) = \sum_{i=0}^N [Q_i(fV_1) + R_i(fV_2)],$$

a ponadto $V = V_1 + V_2$, $V_1 \in \mathfrak{I}_{r+2}^1$, $V_2 \in \mathfrak{M}_3^1$.

Dowód. Pokażemy, że z równości (3.12) wynika (3.1), (3.2). Biorąc za V funkcje $V_2 \in \mathfrak{M}_3^1$, otrzymamy od razu równość (3.2) (ponieważ $V_1 = 0$).

W przypadku $r = 1$ występuje tylko równość (3.2). Dlatego dalej zakładamy, że $r \geq 2$.

Wybieramy teraz bazę $\mathfrak{T}_{r+2}^1$. Są to funkcje $\phi_{kl} \in \mathfrak{M}_{r+2}^1$, $k = 0, \dots, N$, $l = 1, \dots, r-1$, spełniające warunki:

$$(3.13a) \quad \phi_{kl}^{(m)}(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, N+1, \quad m = 0, 1,$$

$$(3.13b) \quad \phi_{kl}(x_{ij}) = \delta_{ki} \delta_{lj}, \quad j = 1, \dots, r-1, \quad i = 0, \dots, N,$$

gdzie $\{x_{ij}\}$ są określone w (3.3). Warunki (3.13) wyznaczają funkcje $\{\phi_{kl}\}$ jednoznacznie i zapewniają, że $\phi_{kl} \in \mathfrak{T}_{r+2}^1$. Ponadto wynika z nich, że nośnikiem funkcji ϕ_{kl} jest element e_k .

Biorąc za V kolejne funkcje bazowe ϕ_{kl} , otrzymujemy

$$Q_k(LU\phi_{kl}) = Q_k(f\phi_{kl}).$$

Korzystając z (3.13b) oraz z określenia Q_k (zob. (3.7) i (3.8)), otrzymujemy wzór postaci:

$$h_k \tilde{w}_l LU(x_{kl}) = h_k \tilde{w}_l f(x_{kl}),$$

gdzie $\{\tilde{w}_l\}$ są wagami kwadratury Q . Stąd wynika już równość (3.1). Postępowaniem odwrotnym dowodzimy, że z równości (3.1), (3.2) wynika równość (3.12), co kończy dowód. ■

Zauważmy, że prawdziwa jest następująca nierówność dla $V \in \mathfrak{M}_{r+2}^1$:

$$(3.14) \quad \|V\|_{2,K} \leq C|V|_{2,K},$$

gdzie $K = [0, l]$, a stała C nie zależy od V i h (zob. [8], str. 27).

Dalej potrzebny nam będzie lemat dotyczący przestrzeni $\mathfrak{M}_{r+2}^1$ i $\mathfrak{M}_r^{-1}$.

LEMAT 3.1. *Operator $S = -D^2$ przekształca $\mathfrak{M}_{r+2}^1$ na $\mathfrak{M}_r^{-1}$ wzajemnie jednoznacznie (jest izomorfizmem tych przestrzeni).*

Uwaga 3.2. D oznacza pochodną dystrybucyjną.

Dowód. Nietrudno zauważyć, że $-D^2 V \in \mathfrak{M}_r^{-1}$, jeśli $V \in \mathfrak{M}_{r+2}^1$, bowiem V na każdym elemencie e_i jest wielomianem stopnia $\leq r+2$ oraz $V \in C^1(\bar{K})$. Tak więc S przekształca $\mathfrak{M}_{r+2}^1$ w $\mathfrak{M}_r^{-1}$.

Pokażemy teraz, że dla dowolnego $W \in \mathfrak{M}_r^{-1}$ istnieje dokładnie jedno $V \in \mathfrak{M}_{r+2}^1$ spełniające

$$(3.15) \quad -D^2 V = W.$$

Zauważmy, że zachodzi równość

$$(3.16) \quad V(x) = V(0) + xV'(0) + \int_0^x (x-t) D^2 V(t) dt.$$

Z warunków $V(0) = V'(0) = 0$ oraz z (3.15) otrzymujemy

$$(3.17) \quad V(x) = - \int_0^x (x-t) W(t) dt.$$

Ponieważ $(x-t)W(t)$ jest na e_i wielomianem stopnia $\leq r+1$ względem t , więc stąd wynika, że $V(x)$ jest na każdym e_i wielomianem stopnia $\leq r+2$ (wyznaczonym jednoznacznie przez funkcję W), czyli S przekształca $\mathfrak{M}_{r+2}^1$ na $\mathfrak{M}_r^{-1}$ wzajemnie jednoznacznie. ■

Z lematu 3.1 wynika, że istnieje operator odwrotny do S . Oznaczmy go przez T , tzn.

$$(3.18) \quad T = S^{-1} = (-D_{|\mathfrak{M}_{r+2}^1|}^2)^{-1}$$

oraz $T: \mathfrak{M}_r^{-1} \rightarrow \mathfrak{M}_{r+2}^1$ wzajemnie jednoznacznie i „na”.

Będzie nam potrzebny następujący lemat.

LEMAT 3.2. *Niech $1 \leq s \leq 2r-n+2$, $r \geq 2$, $4 \leq n \leq 2r$ oraz $j = 0, 1, 2$. Niech ciąg podziałów odcinka $\bar{K}$ jest regularny (zob. (2.11a)) oraz kwadratura Q spełnia warunek (3.9). Zakładamy, że jeśli $s+j \geq 2$, to $f \in W^{s+j-1,q}(e_i)$ i $q \in (1, \infty]$, a jeśli $j = 0$, $s = 1$, to $f \in C(e_i)$ i $q = \infty$.*

Wtedy istnieje stała C niezależna od h i f taka, że dla dowolnego $p \in \mathfrak{T}_n^1$

$$(3.19) \quad |I_i(fp) - Q_i(fp)| \leq Ch^{s+j-(1/2)-(1/q)} \|f\|_{s+j-1,q,e_i} \|p\|_{j,e_i},$$

przy czym dla $j = 0$ w miejscu normy $\|f\|_{s+j-1,q,e_i}$ występuje seminorma $|f|_{s+j-1,q,e_i}$.

Dowód. Niech $E_i(f) = I_i(f) - Q_i(f)$ oraz $E(\tilde{f}) = I(\tilde{f}) - Q(\tilde{f})$, gdzie $\tilde{f}(t) = f(x_i + th_i)$, $t \in [0, 1]$. Oszacowanie (3.19) dla $j = 0$ wynika bezpośrednio z lematu 2.1 z parametrami $m = 2r$ i $j = 0$, bowiem część I dowodu lematu 2.1 nie ulega zmianie, jeśli zamiast warunku (2.19) wstawimy warunek (3.9).

Przechodzimy do dowodu tego oszacowania dla $j = 1$. Niech $p_i \in P_1(e_i)$ jest wielomianem interpolacyjnym wielomianu p w punktach x_i, x_{i+1} , tzn.

$$(3.20) \quad p_i(x_i) = p(x_i), \quad p_i(x_{i+1}) = p(x_{i+1}).$$

Ponieważ z założenia o wielomianie p wynika, że $p(x_i) = p(x_{i+1}) = 0$, więc $p_i(x) = 0$ dla $x \in e_i$. Otrzymamy

$$(3.21) \quad \|p\|_{0,e_i} = \|p - p_i\|_{0,e_i} \leq Ch \|p\|_{1,e_i}.$$

Korzystamy teraz z oszacowania (3.19) dla $j = 0$ z parametrami $2 \leq s \leq 2r-n+2$, $r \geq 2$, $4 \leq n \leq 2r$ oraz $q \in (1, \infty]$. Mamy

$$(3.22) \quad |E_i(fp)| \leq Ch^{s+(1/2)-(1/q)} \|f\|_{s,q,e_i} |p|_{1,e_i}.$$

Wykorzystaliśmy tu nierówność (3.21). Pozostał do rozpatrzenia przypadek $s = 1$, $4 \leq n \leq 2r$ i $q \in (1, \infty]$. Zauważmy, że nie wynika on z (3.19) dla $j = 0$, bo teraz wymagamy, aby $q \in (1, \infty]$, a nie tylko $q = \infty$. Niech $\tilde{K} = [0, 1]$. Wiadomo, że dla $q > 1$ zachodzi włożenie $W^{1,q}(\tilde{K}) \hookrightarrow L^\infty(\tilde{K})$, tzn.

$$\|\tilde{f}\|_{0,\infty,\tilde{K}} \leq C \|\tilde{f}\|_{1,q,\tilde{K}},$$

zob. [1]. Z powyższej nierówności otrzymamy

$$|E_i(fp)| = h_i |E(\tilde{f}\tilde{p})| \leq Ch \|\tilde{f}\|_{0,\infty,\tilde{K}} \|\tilde{p}\|_{0,\infty,\tilde{K}} \leq Ch \|\tilde{f}\|_{1,q,\tilde{K}} \|\tilde{p}\|_{0,\tilde{K}}.$$

Skorzystaliśmy tu również z równoważności norm w przestrzeniach skończone wymiarowych $P_n(\tilde{K})$.

Biorąc teraz pod uwagę nierówności $\|\tilde{f}\|_{1,q,\tilde{K}} \leq Ch^{-1/q} \|f\|_{1,q,e_i}$ i $\|\tilde{p}\|_{0,\tilde{K}} \leq Ch^{-1/2} \|p\|_{0,e_i}$ oraz oszacowanie (3.21) otrzymamy dla $q > 1$, $s = 1$

$$(3.23) \quad |E_i(fp)| \leq Ch^{(3/2)-(1/q)} \|f\|_{1,q,e_i} |p|_{1,e_i}.$$

Łącząc teraz (3.22) i (3.23), otrzymamy (3.19) z parametrami $j = 1$, $1 \leq s \leq \leq 2r - n + 2$, $r \geq 2$, $4 \leq n \leq 2r$ oraz $q \in (1, \infty]$. Pozostał przypadek $j = 2$. Wynika on bezpośrednio z oszacowania (3.19) dla $j = 1$ oraz z poniższej nierówności

$$\|p\|_{1,e_i} = \|p - p_i\|_{1,e_i} \leq Ch |p|_{2,e_i},$$

gdzie p_i jest określone w (3.20) ($p_i = 0$). ■

4. Analiza metod H^{-1} -kollokacji. W tym rozdziale pokażemy stabilność metod H^{-1} -kollokacji, jeśli spełnione są warunki podane w definicji 3.1. Zaczniemy od oszacowań błędów kwadratur Q_i oraz R_i .

LEMAT 4.1. Niech spełniony jest warunek (2.11b). Wtedy istnieje stała C taka, że dla dowolnych $W \in \mathfrak{M}_r^{-1}$ i $V \in \mathfrak{M}_{r+2}^1$

$$|Q_i(LWV_1) - I_i(LWV_1)| \leq Ch \|W\|_{0,e_i} |V|_{2,e_i},$$

gdzie $V = V_1 + V_2$, $V_1 \in \mathfrak{T}_{r+2}^1$, $V_2 \in \mathfrak{M}_3^1$.

Dowód. Niech $E_i(f) = Q_i(f) - I_i(f)$ oraz $d_i = d(x_i)$. Otrzymamy

$$(4.1) \quad \|d - d_i\|_{0,\infty,e_i} \leq Ch |d|_{1,\infty,e_i}.$$

Funkcję $V_2 \in \mathfrak{M}_3^1$ można traktować jako interpolację funkcji $V \in \mathfrak{M}_{r+2}^1$ i jej pochodnej w węzłach $\{x_i\}$, bowiem $V_1(x_i) = V'_1(x_i) = 0$. Tak więc

$$(4.2) \quad \|V_1\|_{j,e_i} = \|V - V_2\|_{j,e_i} \leq Ch^{2-j} \|V\|_{2,e_i}$$

dla $j = 0, 1, 2$. Z własności (3.10) otrzymujemy

$$(4.3) \quad Q_i(d_i W'' V_1) = I_i(d_i W'' V_1).$$

Zauważmy, że $LWV_1 = -dW'' V_1 + (-d' + b) W' V_1 + cWV_1$. Stąd

$$(4.4) \quad E_i(LWV_1) = -E_i(dW'' V_1) + E_i((-d' + b) W' V_1) + E_i(cWV_1).$$

Będziemy szacowali każdy składnik prawej strony powyższej równości po kolei. Z (4.3) wynika, że

$$(4.5) \quad E_i(dW'' V_1) = E_i((d - d_i) W'' V_1).$$

Z lematu 3.2 z parametrami $r \geq 2$, $j = 0$, $s = 2$, $n = r + 2$, $q = \infty$ oraz z (2.17), (2.18), (4.2) i (4.1) otrzymamy

$$\begin{aligned} |E_i((d - d_i) W'' V_1)| &\leq Ch^{3/2} |(d - d_i) W''|_{1, \infty, e_i} \|V_1\|_{0, e_i} \leq \\ &\leq Ch^{3/2} [|d - d_i|_{0, \infty, e_i} |W|_{3, \infty, e_i} + |d - d_i|_{1, \infty, e_i} |W|_{2, \infty, e_i}] \times \\ &\quad \times Ch^2 \|V\|_{2, e_i} \leq Ch^{7/2} [Ch |d|_{1, \infty, e_i} Ch^{-3} |W|_{0, \infty, e_i} + \\ &\quad + |d|_{1, \infty, e_i} Ch^{-2} |W|_{0, \infty, e_i}] \|V\|_{2, e_i} \\ &\leq Ch |d|_{1, \infty, e_i} |W|_{0, \infty, e_i} \|V\|_{2, e_i}. \end{aligned}$$

Zatem

$$(4.6) \quad |E_i(dW'' V_1)| \leq Ch \|W\|_{0, e_i} \|V\|_{2, e_i},$$

gdzie C zależy od $|d|_{1, \infty, e_i}$.

Następnie szacujemy drugi składnik prawej strony (4.4). Korzystamy z (2.17), (2.18), (4.2) oraz z lematu 3.2 z parametrami $j = 0$, $s = 1$, $n = r + 2$, $q = \infty$ i otrzymamy

$$\begin{aligned} |E_i((-d' + b) W' V_1)| &\leq Ch^{1/2} |(-d' + b) W'|_{0, \infty, e_i} \|V_1\|_{0, e_i} \leq \\ &\leq Ch^{1/2} (|d|_{1, \infty, e_i} + |b|_{0, \infty, e_i}) |W|_{1, \infty, e_i} Ch^2 \|V\|_{2, e_i} \leq \\ &\leq Ch (|d|_{1, \infty, e_i} + |b|_{0, \infty, e_i}) |W|_{0, e_i} \|V\|_{2, e_i}, \end{aligned}$$

czyli

$$(4.7) \quad |E_i((-d' + b) W' V_1)| \leq Ch \|W\|_{0, e_i} \|V\|_{2, e_i},$$

gdzie stała C zależy od $(|d|_{1, \infty, e_i} + |b|_{0, \infty, e_i})$.

Pozostał do oszacowania trzeci składnik prawej strony (4.4). Korzystamy z (2.17), (2.18), (4.2) oraz z lematu 3.2 z parametrami $j = 0$, $s = 1$, $n = r + 2$, $q = \infty$. Otrzymamy

$$|E_i(cWV_1)| \leq Ch^{1/2} |cW|_{0, \infty, e_i} \|V_1\|_{0, e_i} \leq Ch^2 |c|_{0, \infty, e_i} |W|_{0, e_i} \|V\|_{2, e_i},$$

czyli

$$(4.8) \quad |E_i(cWV_1)| \leq Ch \|W\|_{0, e_i} \|V\|_{2, e_i},$$

gdzie stała C zależy od $|c|_{0, \infty, e_i}$.

Z oszacowań (4.6), (4.7) i (4.8), z równości (4.4) oraz oszacowania (3.14) wynika, że

$$|E_i(LWV_1)| \leq Ch \|W\|_{0,e_i} |V|_{2,e_i}. \quad \blacksquare$$

LEMAT 4.2. *Niech spełniony będzie warunek (2.11b). Wtedy istnieje stała C taka, że dla dowolnych $W \in \mathfrak{M}_r^{-1}$ i $V \in \mathfrak{M}_{r+2}^1$*

$$|R_i(W \cdot L^* V_2) - I_i(W L^* V_2)| \leq Ch \|W\|_{0,e_i} |V|_{2,e_i},$$

gdzie $V = V_1 + V_2$, $V_1 \in \mathfrak{T}_{r+2}^1$, $V_2 \in \mathfrak{M}_3^1$.

Dowód. Oznaczmy $E_i(f) = R_i(f) - I_i(f)$. Korzystając z oszacowania (4.2), otrzymamy

$$(4.9) \quad \|V_2\|_{j,e_i} \leq \|V - V_2\|_{j,e_i} + \|V\|_{j,e_i} \leq C \|V\|_{2,e_i}$$

dla $j = 0, 1, 2$. Niech $d_i = d(x_i)$. Z własności (3.6) wynika, że

$$(4.10) \quad R_i(d_i W V_2'') = I_i(d_i W V_2'').$$

Zauważmy, że

$$W \cdot L^* V_2 = -d W V_2'' - (d' + b) W V_2' + (c - b') W V_2.$$

Stąd

$$(4.11) \quad E_i(W \cdot L^* V_2) = -E_i(d W V_2'') - E_i((d' + b) W V_2') + E_i((c - b') W V_2).$$

Szacujemy po kolei każdy składnik prawej strony (4.11). Na mocy (4.10)

$$E_i(d W V_2'') = E_i((d - d_i) W V_2'').$$

Ponieważ zachodzi równość (3.5), więc możemy skorzystać z lematu 2.1 z parametrami $m = r + 1$, $j = 0$, $s = 2$, $n = r$, $q = \infty$. Korzystając ponadto z (2.17), (2.18), (4.1) i (4.9), otrzymamy

$$\begin{aligned} |E_i((d - d_i) W V_2'')| &\leq Ch^{3/2} |(d - d_i) V_2''|_{1, \infty, e_i} \|W\|_{0, e_i} \leq \\ &\leq Ch^{3/2} [|d - d_i|_{0, \infty, e_i} |V_2|_{3, \infty, e_i} + |d - d_i|_{1, \infty, e_i} |V_2|_{2, \infty, e_i}] \times \\ &\quad \times \|W\|_{0, e_i} \leq Ch^{3/2} [Ch |d|_{1, \infty, e_i} Ch^{-1} |V_2|_{2, \infty, e_i} + \\ &\quad + |d|_{1, \infty, e_i} |V_2|_{2, \infty, e_i}] C \|W\|_{0, e_i} \leq \\ &\leq Ch |d|_{1, \infty, e_i} \|V\|_{2, e_i} \|W\|_{0, e_i}. \end{aligned}$$

Zatem

$$(4.12) \quad |E_i(d W V_2'')| \leq Ch \|W\|_{0, e_i} \|V\|_{2, e_i},$$

gdzie stała C zależy od $|d|_{1, \infty, e_i}$.

Szacujemy drugi składnik prawej strony (4.11) analogicznie do pierwsze-

go. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} |E_i((d' + b) W V_2')| &\leq Ch^{3/2} |(d' + b) V_2'|_{1, \infty, e_i} \|W\|_{0, e_i} \leq \\ &\leq Ch(\|d\|_{2, \infty, e_i} + \|b\|_{1, \infty, e_i}) \|V\|_{2, e_i} \|W\|_{0, e_i}, \end{aligned}$$

czyli

$$(4.13) \quad |E_i((d' + b) W V_2')| \leq Ch \|V\|_{2, e_i} \|W\|_{0, e_i},$$

gdzie stała C zależy od $(\|d\|_{2, \infty, e_i} + \|b\|_{1, \infty, e_i})$.

Przechodzimy do szacowania trzeciego składnika prawej strony (4.11). Szacujemy analogicznie do pierwszego składnika i otrzymujemy

$$\begin{aligned} |E_i((c - b') W V_2)| &\leq Ch^{3/2} |(c - b') V_2|_{1, \infty, e_i} \|W\|_{0, e_i} \leq \\ &\leq Ch(\|c\|_{1, \infty, e_i} + \|b\|_{2, \infty, e_i}) \|V\|_{2, e_i} \|W\|_{0, e_i}. \end{aligned}$$

Zatem

$$(4.14) \quad |E_i((c - b') W V_2)| \leq Ch \|V\|_{2, e_i} \|W\|_{0, e_i},$$

gdzie stała C zależy od $(\|c\|_{1, \infty, e_i} + \|b\|_{2, \infty, e_i})$.

Z oszacowań (4.12), (4.13) i (4.14), z równości (4.11) i nierówności trójkąta oraz z oszacowania (3.14) wynika, że

$$|E_i(W \cdot L^* V_2)| \leq Ch \|W\|_{0, e_i} \|V\|_{2, e_i}. \quad \blacksquare$$

Do pokazania stabilności metod (3.1), (3.2) potrzebny będzie dowód, że forma a_h i funkcjonal l_h określone w twierdzeniu 3.1 spełniają pewne warunki. Sformułujemy odpowiednie twierdzenie.

TWIERDZENIE 4.1. *Niech spełnione będą założenia (2.5), (2.7), (2.8) i (2.11). Wtedy spełniony jest następujący warunek dla dostatecznie małych h : dla dowolnego $U \in \mathring{\mathfrak{M}}_r^{-1}$ istnieje $V \in \mathring{\mathfrak{M}}_{r+2}^1$ taka, że*

$$(4.15) \quad |a_h(U, V)| \geq C_1 \|U\|_{0, K}^2,$$

$$(4.16) \quad |V|_{2, K} \leq C_2 \|U\|_{0, K},$$

gdzie stałe C_1, C_2 nie zależą od U, V, h .

Dowód.

I. Pokażemy najpierw, że forma $(-D^2 W, L^* V)_{0, K}$ dla $W, V \in \mathring{\mathfrak{M}}_{r+2}^1$, spełnia następujące warunki:

dla dowolnego $W \in \mathring{\mathfrak{M}}_{r+2}^1$ istnieje $V \in \mathring{\mathfrak{M}}_{r+2}^1$ taka, że

$$(4.17) \quad (-D^2 W, L^* V)_{0, K} \geq C_3 |W|_{2, K}^2$$

oraz

$$(4.18) \quad |V|_{2, K} \leq C_4 |W|_{2, K},$$

gdzie stałe C_3, C_4 nie zależą od V, W, h .

Ustalmy $W \in \mathfrak{M}_{r+2}^1$. Wprowadzimy oznaczenie

$$\tilde{L}^* W = L^* W + dW'' = -d' W' - bW' - b' W + cW.$$

Zauważmy, że przy podanych założeniach o współczynnikach d, b, c , funkcja $\tilde{L}^* W \in H^1(K)$ dla $W \in \mathfrak{M}_{r+2}^1$ (bo $W \in H^2(K)$).

Rozważamy zagadnienie (2.3) z prawą stroną $l(v) = (-\tilde{L}^* W, v)_{0,K}$, gdzie $v \in H_0^1(K)$. Z założeń (2.8) i (2.9) (tu $f = -\tilde{L}^* W \in H^1(K)$) wynika, że rozwiązanie $w \in H^3(K) \cap H_0^1(K)$ oraz

$$\|w\|_{3,K} \leq C \|\tilde{L}^* W\|_{1,K}.$$

Korzystając teraz z nierówności trójkąta oraz z (2.17), otrzymamy

$$\|\tilde{L}^* W\|_{1,e_i} \leq C(\|d\|_{2,\infty,e_i} + \|b\|_{2,\infty,e_i} + \|c\|_{1,\infty,e_i}) \|W\|_{2,e_i}.$$

Następnie, stosując sumowanie po i (po podniesieniu do kwadratu) i uwzględniając (3.14), otrzymamy

$$\|\tilde{L}^* W\|_{1,K} \leq C |W|_{2,K},$$

gdzie stała C zależy od $\max_i (\|d\|_{2,\infty,e_i} + \|b\|_{2,\infty,e_i} + \|c\|_{1,\infty,e_i})$. Łącząc powyższe nierówności, znajdujemy, że

$$(4.19) \quad \|w\|_{3,K} \leq C |W|_{2,K},$$

gdzie $C \neq C(h)$.

Niech $W_I \in \mathfrak{M}_{r+2}^1$ interpoluje funkcję w , tzn.

$$W_I(x_{ij}) = w(x_{ij}), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, r-1,$$

$$W_I(x_i) = w(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N+1,$$

$$W_I'(x_i) = w'(x_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

gdzie $\{x_{ij}\}$ są określone w (3.3). Warunki powyższe określają W_I jednoznacznie. Ponadto zachodzi oszacowanie (zob. [1])

$$(4.20) \quad \|w - W_I\|_{j,e_i} \leq Ch^{3-j} \|w\|_{3,e_i}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Sumując nierówności (4.20) po $i = 0, 1, \dots, N$ (po podniesieniu do kwadratu) oraz łącząc z (4.19), uzyskujemy

$$(4.21) \quad \|w - W_I\|_{j,K} \leq Ch^{3-j} |W|_{2,K}, \quad j = 0, 1, 2.$$

Oszacujemy teraz $(W'', L^*(W_I - w))_{0,K}$. Z nierówności trójkąta i oszacowania (2.17) wynika, że

$$\|L^*(W_I - w)\|_{0,e_i} \leq C(\|d\|_{1,\infty,e_i} + \|b\|_{1,\infty,e_i} + \|c\|_{0,\infty,e_i}) \|W_I - w\|_{2,e_i}.$$

A stąd

$$\|L^*(W_I - w)\|_{0,K} \leq C \|W_I - w\|_{2,K},$$

gdzie stała C zależy od $\max_i (\|d\|_{1,\infty,e_i} + \|b\|_{1,\infty,e_i} + \|c\|_{0,\infty,e_i})$. Wykorzystując tę nierówność oraz (4.21), możemy napisać

$$(4.22) \quad \begin{aligned} |(W'', L^*(W_I - w))_{0,K}| &\leq \|W''\|_{0,K} \|L^*(W_I - w)\|_{0,K} \leq \\ &\leq |W|_{2,K} C \|W_I - w\|_{2,K} \leq C |W|_{2,K} Ch |W|_{2,K} \leq \\ &\leq C_0 h |W|_{2,K}^2. \end{aligned}$$

Przechodzimy do dowodu nierówności (4.17). Ponieważ $w \in H^3(K) \cap H_0^1(K)$, więc dla $v \in H_0^1(K)$ (po użyciu całkowania przez części oraz na mocy (2.3)) zachodzi równość

$$(4.23) \quad (v, L^* w)_{0,K} = a(v, w) = (-\tilde{L}^* W, v)_{0,K}.$$

Ponieważ $H_0^1(K)$ jest gęsta w $L^2(K)$, zob. [7], więc z równości (4.23) wynika, że

$$(4.24) \quad (v, L^* w)_{0,K} = (-\tilde{L}^* W, v)_{0,K} \quad \forall v \in L^2(K).$$

Niech $V = W + W_I$. Oczywiście $V \in \mathfrak{M}_{r+2}^1$. Korzystając teraz z faktu, że $d(x) \geq d_0 > 0$ (zob. (2.5)) oraz z równości (4.24) i oszacowania (4.22), otrzymamy

$$\begin{aligned} (-W'', L^* V)_{0,K} &= (-W'', -dW'')_{0,K} + (-W'', \tilde{L}^* W)_{0,K} + (-W'', L^* W_I)_{0,K} = \\ &= (dW'', W'')_{0,K} - (W'', L^*(W_I - w))_{0,K} \geq \\ &\geq d_0 |W|_{2,K}^2 - C_0 h |W|_{2,K}^2. \end{aligned}$$

Biorąc teraz $h \leq \mathfrak{H}_4$, gdzie $\mathfrak{H}_4 = d_0/2C_0$, otrzymamy

$$(-W'', L^* V)_{0,K} \geq 0.5d_0 |W|_{2,K}^2,$$

co dowodzi (4.17).

Pokażemy teraz (4.18). Zauważmy, że

$$(4.25) \quad \begin{aligned} |W_I|_{2,K} &\leq |W_I - w|_{2,K} + |w|_{2,K} \leq \\ &\leq Ch \|w\|_{3,K} + \|w\|_{3,K} \leq C_1 \|w\|_{3,K} \leq C_2 |W|_{2,K}. \end{aligned}$$

Wykorzystaliśmy tu oszacowanie (4.20) i (4.19). Na mocy (4.25) uzyskamy

$$|V|_{2,K} \leq |W|_{2,K} + |W_I|_{2,K} \leq |W|_{2,K} + C_2 |W|_{2,K} \leq C_4 |W|_{2,K},$$

co dowodzi (4.18).

II. Na mocy lematu 3.1 istnieje izomorfizm S między $\mathfrak{M}_{r+2}^1$ i $\mathfrak{M}_r^{-1}$. Przyjmując $W = TU$, gdzie $T = S^{-1}$ (zob. (3.18)), otrzymamy, że $SW = -D^2 W = U$. Wstawiamy teraz U zamiast $-D^2 W$ do (4.17) i (4.18). Otrzy-

mamy, że dla dowolnego $U \in \mathfrak{M}_r^{-1}$ istnieje $V \in \mathfrak{M}_{r+2}^1$ taka, że dla $h \leq \mathfrak{H}_4$

$$(4.26) \quad (U, L^* V)_{0,K} \geq \tilde{C}_3 \|U\|_{0,K}^2$$

oraz

$$(4.27) \quad |V|_{2,K} \leq \tilde{C}_4 \|U\|_{0,K},$$

bo $|W|_{2,K} = \|-D^2 W\|_{0,K} = \|U\|_{0,K}$.

III. Formę $a_h(U, V)$ określoną w twierdzeniu 3.1 można zapisać następująco:

$$(4.28) \quad a_h(U, V) = \sum_{i=0}^N [Q_i(LU \cdot V_1) - I_i(LU \cdot V_1)] + \\ + \sum_{i=0}^N [R_i(UL^* V_2) - I_i(U \cdot L^* V_2)] + (U, L^* V)_{0,K},$$

gdzie $V = V_1 + V_2$, $V_1 \in \mathfrak{T}_{r+2}^1$, $V_2 \in \mathfrak{M}_3^1$. Wykorzystaliśmy tu równość

$$I_i(LU \cdot V_1) = I_i(U \cdot L^* V_1),$$

prawdziwą dla $V_1 \in \mathfrak{T}_{r+2}^1$, $i = 0, 1, \dots, N$, oraz fakt, że

$$(U, L^* V)_{0,K} = \sum_{i=0}^N [I_i(U \cdot L^* V_1) + I_i(U \cdot L^* V_2)].$$

Z lematu 4.1 wynika oszacowanie (przy czym dla $r = 1$, stałe $C_i = 0$, $\tilde{C}_0 = 0$)

$$(4.29) \quad \left| \sum_{i=0}^N [Q_i(LU \cdot V_1) - I_i(LU \cdot V_1)] \right| \leq \\ \leq \sum_{i=0}^N C_i h \|U\|_{0,e_i} |V|_{2,e_i} \leq \tilde{C}_0 h \|U\|_{0,K} |V|_{2,K},$$

a z lematu 4.2 otrzymamy

$$(4.30) \quad \left| \sum_{i=0}^N [R_i(U \cdot L^* V_2) - I_i(U \cdot L^* V_2)] \right| \leq \\ \leq \sum_{i=0}^N C_i h \|U\|_{0,e_i} |V|_{2,e_i} \leq \tilde{C}_1 h \|U\|_{0,K} |V|_{2,K}.$$

Następnie dla ustalonego $U \in \mathfrak{M}_r^{-1}$ wybieramy $V \in \mathfrak{M}_{r+2}^1$ spełniające warunki (4.26) i (4.27). Korzystając z oszacowań (4.29) i (4.30) oraz z nierówności

(4.26), (4.27) i z równości (4.28), otrzymamy dla $h \leq \mathfrak{H}_5$

$$\begin{aligned} a_h(U, V) &\geq -\tilde{C}_0 h \|U\|_{0,K} \|V\|_{2,K} - \tilde{C}_1 h \|U\|_{0,K} \|V\|_{2,K} + \tilde{C}_3 \|U\|_{0,K}^2 \geq \\ &\geq -\tilde{C}_0 \tilde{C}_4 h \|U\|_{0,K}^2 - \tilde{C}_1 \tilde{C}_4 h \|U\|_{0,K}^2 + \tilde{C}_3 \|U\|_{0,K}^2 \geq \\ &\geq 0.5 \tilde{C}_3 \|U\|_{0,K}^2, \end{aligned}$$

gdzie $\mathfrak{H}_5 = \min(\tilde{C}_3/2(\tilde{C}_0 \tilde{C}_4 + \tilde{C}_1 \tilde{C}_4), \mathfrak{H}_4)$. Uzyskaliśmy nierówność (4.15), oszacowanie (4.16) wynika zaś z (4.27). ■

Pokażemy, że z twierdzenia 4.1 wynika, że rozwiązanie U metody H^{-1} -kollokacji istnieje; jest wyznaczone jednoznacznie oraz jest stabilne.

Twierdzenie 4.2. *Niech będą spełnione założenia (2.5), (2.7), (2.8) i (2.11). Wtedy istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia (3.1), (3.2) dla dostatecznie małych h . Ponadto*

$$\|U\|_{0,K} \leq C \|f\|_{0,\infty,K},$$

gdzie C nie zależy od U, f, h .

Dowód. Pokażemy jednoznaczność rozwiązania U . Niech U_1, U_2 będą rozwiązaniami zagadnienia (3.12). Wtedy

$$a_h(U_1 - U_2, V) = 0 \quad \forall V \in \mathfrak{M}_{r+2}^1.$$

Z warunku (4.15) wynika, że dla $W = U_1 - U_2$, istnieje $\tilde{V} \in \mathfrak{M}_{r+2}^1$ takie, że

$$|a_h(W, \tilde{V})| \geq C \|W\|_{0,K}^2.$$

Ponieważ $a_h(W, \tilde{V}) = 0$, więc $W = 0$ i $U_1 = U_2$, co kończy dowód jednoznaczności.

Przestrzeń $\mathfrak{M}_r^{-1}$ jest skończenie wymiarowa, więc z jednoznaczności wynika istnienie rozwiązania $U \in \mathfrak{M}_r^{-1}$ zagadnienia (3.12), a więc i (3.1), (3.2).

Oszacujmy teraz $l_h(V)$. Z oszacowań (4.2), (4.9), (3.14) oraz z określenia $l_h(V)$ podanego w twierdzeniu 3.1 wynika, że

$$\begin{aligned} (4.31) \quad |l_h(V)| &\leq \sum_{i=0}^N |Q_i(fV_1)| + |R_i(fV_2)| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^N (C_i h_i \|f\|_{0,\infty,e_i} \|V_1\|_{0,\infty,e_i} + C_i h_i \|f\|_{0,\infty,e_i} \|V_2\|_{0,\infty,e_i}) \leq \\ &\leq C \|f\|_{0,\infty,K} \left(\sum_{i=0}^N h_i^{1/2} (\|V_1\|_{0,e_i} + \|V_2\|_{0,e_i}) \right) \leq \\ &\leq C \|f\|_{0,\infty,K} \left(\sum_{i=0}^N \|V\|_{2,e_i}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=0}^N h_i \right)^{1/2} \leq \\ &\leq C \|f\|_{0,\infty,K} \|V\|_{2,K} \leq C_0 \|f\|_{0,\infty,K} \|V\|_{2,K}. \end{aligned}$$

Wykorzystaliśmy tu również nierówność (2.17) i nierówność Cauchy'ego. Na mocy równości (3.12) oraz nierówności (4.15), (4.16) i (4.31) dla rozwiązania $U \in \mathfrak{M}_r^{-1}$ istnieje $V \in \mathfrak{M}_{r+2}^1$ spełniające

$$C_2 \|U\|_{0,K}^2 \leq |a_h(U, V)| = |l_h(V)| \leq C_3 \|f\|_{0,\infty,K} \|V\|_{2,K} \leq C_4 \|f\|_{0,\infty,K} \|U\|_{0,K},$$

co kończy dowód. ■

5. Oszacowanie błędu w normie przestrzeni $L^2(K)$. W tym rozdziale podamy oszacowanie błędu metod H^{-1} -kollokacji w normach przestrzeni $L^2(K)$ oraz $H^k(e_i)$, $1 \leq k \leq r$. Do tego celu potrzebne nam będzie uogólnienie pierwszego lematu Stranga (zob. [1]).

LEMAT 5.1. *Niech są spełnione założenia (2.5), (2.7), (2.8) i (2.11). Wtedy istnieje stała C taka, że dla dostatecznie małych h*

$$(5.1) \quad \|u - U\|_{0,K} \leq C \left(\inf_{W \in \mathfrak{M}_r^{-1}} \{ \|u - W\|_{0,K} + \right. \\ \left. + \sup_{V \in \mathfrak{M}_{r+2}^1} \{ |(W, L^* V)_{0,K} - a_h(W, V)| / \|V\|_{2,K} \} + \right. \\ \left. + \sup_{V \in \mathfrak{M}_{r+2}^1} \{ |(f, V)_{0,K} - l_h(V)| / \|V\|_{2,K} \} \right),$$

gdzie u jest rozwiązaniem zagadnienia (2.2), a U rozwiązaniem zagadnienia (3.1), (3.2).

Dowód. Niech W jest dowolnym elementem z $\mathfrak{M}_r^{-1}$. Z nierówności trójkąta mamy

$$(5.2) \quad \|u - U\|_{0,K} \leq \|u - W\|_{0,K} + \|W - U\|_{0,K}.$$

Z twierdzenia 4.1 wynika, że forma a_h spełnia warunki (4.15), (4.16), tzn. dla $W - U$ istnieje $V \in \mathfrak{M}_{r+2}^1$ takie, że dla dostatecznie małych h

$$(5.3) \quad C \|V\|_{2,K} \|W - U\|_{0,K} \leq |a_h(W - U, V)|,$$

gdzie $C > 0$, $C \neq C(h)$. Skorzystaliśmy tu z (3.14).

Z równości (2.2) wynika, że

$$(5.4) \quad a(u, V) = (f, V)_{0,K} \quad \forall V \in \mathfrak{M}_{r+2}^1,$$

bo $\mathfrak{M}_{r+2}^1 \subset H_0^1(K)$. Następnie, korzystając z faktu, że $u(0) = 0 = u(l)$, otrzymamy (po scałkowaniu przez części)

$$(5.5) \quad a(u, V) = (u, L^* V)_{0,K} \quad \forall V \in \mathfrak{M}_{r+2}^1,$$

czyli z (5.4) i (5.5) mamy

$$(5.6) \quad (u, L^* V)_{0,K} = (f, V)_{0,K} \quad \forall V \in \mathfrak{M}_{r+2}^1.$$

Możemy teraz napisać równość

$$(5.7) \quad a_h(U - W, V) = \\ = (u - W, L^* V)_{0,K} + \{(W, L^* V)_{0,K} - a_h(W, V)\} + \{l_h(V) - (f, V)_{0,K}\}.$$

Skorzystaliśmy tu z równości (5.6) i (3.12).

Wykażemy teraz, że forma $(u - W, L^* V)_{0,K}$ jest ograniczona. Bezpośrednio pokazujemy, że

$$\|L^* V\|_{0,K} \leq C \|V\|_{2,K},$$

gdzie stała C zależy od $\max_i \{ \|d\|_{1,\infty,e_i} + \|b\|_{1,\infty,e_i} + \|c\|_{0,\infty,e_i} \}$. Stąd dla $W \in \mathfrak{M}_r^{-1}$ i $V \in \mathfrak{M}_{r+2}^1$ otrzymamy

$$(5.8) \quad |(u - W, L^* V)_{0,K}| \leq \|u - W\|_{0,K} \|L^* V\|_{0,K} \leq C \|u - W\|_{0,K} \|V\|_{2,K},$$

następnie z (5.3), (5.7), nierówności trójkąta i (5.8) wynika, że

$$C_1 \|V\|_{2,K} \|W - U\|_{0,K} \leq |a_h(W - U, V)| \leq \\ \leq C_2 \|u - W\|_{0,K} \|V\|_{2,K} + |(W, L^* V)_{0,K} - a_h(W, V)| + \\ + |l_h(V) - (f, V)_{0,K}|.$$

Dzielimy obie strony powyższej nierówności przez $C_1 \|V\|_{2,K}$, a następnie szacujemy przez supremum po $V \in \mathfrak{M}_{r+2}^1$, tzn.

$$(5.9) \quad \|W - U\|_{0,K} \leq C_3 (\|u - W\|_{0,K} + \\ + \sup_{V \in \mathfrak{M}_{r+2}^1} |(W, L^* V)_{0,K} - a_h(W, V)| / \|V\|_{2,K} + \\ + \sup_{V \in \mathfrak{M}_{r+2}^1} |l_h(V) - (f, V)_{0,K}| / \|V\|_{2,K}).$$

Łącząc powyższe oszacowanie z (5.2) oraz biorąc infimum po $W \in \mathfrak{M}_r^{-1}$, otrzymamy (5.1). ■

Poniższy lemat będzie pomocny w szacowaniu drugiego składnika prawej strony (5.1).

LEMAT 5.2. Niech $d, b \in W^{s+2,\infty}(e_i)$, $c \in W^{s+1,\infty}(e_i)$ dla $i = 0, 1, \dots, N$, gdzie $1 \leq s \leq r$, $r \geq 1$. Wtedy dla $W \in \mathfrak{M}_r^{-1}$ i $V \in \mathfrak{M}_{r+2}^1$

$$(5.10) \quad |(W, L^* V)_{0,K} - a_h(W, V)| \leq C h^{s+1} \|W\|_{\tilde{s}} \|V\|_{2,K},$$

gdzie stała C nie zależy od W, V i h oraz $\tilde{s} = \min(s+3, r)$.

Dowód. Mamy $V = V_1 + V_2$, $V_1 \in \mathfrak{T}_{r+2}^1$, $V_2 \in \mathfrak{M}_3^1$. Zauważmy, że

$$(5.11) \quad (W, L^* V)_{0,K} - a_h(W, V) = \sum_{i=0}^N [I_i(LW \cdot V_1) - Q_i(LW \cdot V_1)] + \\ + \sum_{i=0}^N [I_i(W \cdot L^* V_2) - R_i(W \cdot L^* V_2)],$$

bo $I_i(W \cdot L^* V_1) = I_i(LW \cdot V_1)$ dla $V_1 \in \mathfrak{T}_{r+2}^1$. Szacujemy każdy składnik prawej strony (5.11) po kolei.

I. Zaczniemy od $|I_i(LW \cdot V_1) - Q_i(LW \cdot V_1)|$. Niech $E_i(f) = I_i(f) - Q_i(f)$. Zachodzi równość

$$LW \cdot V_1 = -dW'' V_1 + (-d' + b) W' V_1 + cW V_1.$$

Stąd

$$(5.12) \quad E_i(LW V_1) = -E_i(dW'' V_1) + E_i((-d' + b) W' V_1) + E_i(cW V_1).$$

Szacujemy pierwszy składnik prawej strony powyższej równości. Ponieważ zachodzi równość (3.9), więc możemy skorzystać z lematu 3.2 z parametrami $j = 2$, $n = r + 2$, $1 \leq s \leq r$, $q = \infty$. Bierzemy pod uwagę również oszacowania (2.17), (2.18) i (4.2). Otrzymamy

$$|E_i(dW'' V_1)| \leq Ch^{s+(3/2)} \|dW''\|_{s+1, \infty, e_i} \|V_1\|_{2, e_i} \leq \\ \leq Ch^{s+1} \|d\|_{s+1, \infty, e_i} \|W\|_{s+3, e_i} \|V\|_{2, e_i}.$$

Stąd

$$(5.13) \quad |E_i(dW'' V_1)| \leq Ch^{s+1} \|W\|_{s+3, e_i} \|V\|_{2, e_i},$$

gdzie stała C zależy od $\|d\|_{s+1, \infty, e_i}$.

Analogicznie szacujemy drugi składnik prawej strony (5.12)

$$|E_i((-d' + b) W' V_1)| \leq Ch^{s+(3/2)} \|(-d' + b) W'\|_{s+1, \infty, e_i} \|V_1\|_{2, e_i} \leq \\ \leq Ch^{s+1} (\|d\|_{s+2, \infty, e_i} + \|b\|_{s+1, \infty, e_i}) \|W\|_{s+2, e_i} \|V\|_{2, e_i}.$$

Stąd

$$(5.14) \quad |E_i((-d' + b) W' V_1)| \leq Ch^{s+1} \|W\|_{s+2, e_i} \|V\|_{2, e_i},$$

gdzie stała C zależy od $(\|d\|_{s+2, \infty, e_i} + \|b\|_{s+1, \infty, e_i})$.

Tak samo szacujemy trzeci składnik prawej strony (5.12), co daje

$$|E_i(cW V_1)| \leq Ch^{s+(3/2)} \|cW\|_{s+1, \infty, e_i} \|V_1\|_{2, e_i} \leq \\ \leq Ch^{s+1} \|c\|_{s+1, \infty, e_i} \|W\|_{s+1, e_i} \|V\|_{2, e_i},$$

czyli

$$(5.15) \quad |E_i(cW V_1)| \leq Ch^{s+1} \|W\|_{s+1, e_i} \|V\|_{2, e_i},$$

gdzie stała C zależy od $\|c\|_{s+1, \infty, e_i}$.

Biorąc teraz pod uwagę oszacowania (5.13), (5.14) i (5.15) oraz równość (5.12), otrzymamy

$$(5.16) \quad |I_i(LW \cdot V_1) - Q_i(LW \cdot V_1)| \leq Ch^{s+1} \|W\|_{s+3, e_i} \|V\|_{2, e_i}.$$

II. Szacujemy $|I_i(W \cdot L^* V_2) - R_i(W \cdot L^* V_2)|$. Niech $E_i(f) = I_i(f) - R_i(f)$. Zachodzi równość

$$W \cdot L^* V_2 = -dWV_2'' - (d' + b)WV_2' + (c - b')WV_2.$$

Stąd

$$(5.17) \quad E_i(W \cdot L^* V_2) = -E_i(dWV_2'') - E_i((d' + b)WV_2') + E_i((c - b')WV_2).$$

Szacujemy każdy składnik prawej strony powyższej równości po kolei. Zaczynamy od pierwszego składnika. Ponieważ zachodzi równość (3.5), stosujemy lemat 2.1 z parametrami $m = r + 1$, $j = 0$, $n = 1$, $q = \infty$, przy czym zamiast s wstawiamy $s + 2$, tak więc $1 \leq s \leq r$. Ponadto korzystamy z oszacowań (2.17) i (4.9). Zatem

$$\begin{aligned} |E_i(dWV_2'')| &\leq Ch^{s+(3/2)} |dW|_{s+1, \infty, e_i} \|V_2''\|_{0, e_i} \leq \\ &\leq Ch^{s+1} \|d\|_{s+1, \infty, e_i} \|W\|_{s+1, e_i} \|V\|_{2, e_i}. \end{aligned}$$

Stąd

$$(5.18) \quad |E_i(dWV_2'')| \leq Ch^{s+1} \|W\|_{s+1, e_i} \|V\|_{2, e_i},$$

gdzie stała C zależy od $\|d\|_{s+1, \infty, e_i}$.

Szacujemy drugi składnik prawej strony (5.17). Stosujemy lemat 2.1 z parametrami $m = r + 1$, $j = 1$, $n = 2$, $q = \infty$, przy czym zamiast s wstawiamy $s + 1$, tak więc $1 \leq s \leq r$. Ponadto korzystamy z oszacowań (2.17) i (4.9). Mamy

$$\begin{aligned} |E_i((-d' + b)WV_2')| &\leq Ch^{s+(3/2)} \|(-d' + b)W\|_{s+1, \infty, e_i} \|V_2'\|_{1, e_i} \leq \\ &\leq Ch^{s+1} (\|d\|_{s+2, \infty, e_i} + \|b\|_{s+1, \infty, e_i}) \|W\|_{s+1, e_i} \|V\|_{2, e_i}, \end{aligned}$$

czyli

$$(5.19) \quad |E_i((-d' + b)WV_2')| \leq Ch^{s+1} \|W\|_{s+1, e_i} \|V\|_{2, e_i},$$

gdzie stała C zależy od $(\|d\|_{s+2, \infty, e_i} + \|b\|_{s+1, \infty, e_i})$.

Pozostał do oszacowania trzeci składnik prawej strony (5.17). Stosujemy lemat 2.1 z parametrami $m = r + 1$, $j = 2$, $n = 3$, $1 \leq s \leq r$, $q = \infty$. Poza tym korzystamy z oszacowań (2.17) i (4.9). Zatem

$$\begin{aligned} |E_i((c - b')WV_2)| &\leq Ch^{s+(3/2)} \|(c - b')W\|_{s+1, \infty, e_i} \|V_2\|_{2, e_i} \leq \\ &\leq Ch^{s+1} (\|c\|_{s+1, \infty, e_i} + \|b\|_{s+2, \infty, e_i}) \|W\|_{s+1, e_i} \|V\|_{2, e_i}, \end{aligned}$$

czyli

$$(5.20) \quad \|E_i((c-b') W V_2)\| \leq C h^{s+1} \|W\|_{s+1, e_i} \|V\|_{2, e_i},$$

gdzie stała C zależy od $(\|c\|_{s+1, \infty, e_i} + \|b\|_{s+2, \infty, e_i})$.

Łącząc oszacowania (5.18), (5.19) i (5.20) z równością (5.17), otrzymamy

$$(5.21) \quad |I_i(W \cdot L^* V_2) - R_i(W \cdot L^* V_2)| \leq C h^{s+1} \|W\|_{s+1, e_i} \|V\|_{2, e_i}.$$

III. Biorąc pod uwagę równość (5.11) oraz oszacowania (5.16) i (5.21), otrzymamy

$$\begin{aligned} |(W, L^* V)_{0,K} - a_h(W, V)| &\leq \sum_{i=0}^N C_i h^{s+1} \|W\|_{s+3, e_i} \|V\|_{2, e_i} \leq \\ &\leq C h^{s+1} \|W\|_{s+3} \|V\|_{2,K}. \end{aligned}$$

Skorzystaliśmy tu z nierówności Cauchy'ego. Ponieważ $\|W\|_{k, e_i} = 0$, jeśli $k > r$, więc zamiast $\|W\|_{s+3}$ bierzemy $\|W\|_{\tilde{s}}$, gdzie $\tilde{s} = \min(s+3, r)$. ■

Poniższy lemat będzie pomocny w szacowaniu trzeciego składnika prawej strony (5.1).

LEMAT 5.3. Niech $f|_{e_i} \in W^{s+1, q}(e_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$, gdzie $1 \leq s \leq r$, $q \in [2, \infty]$, $r \geq 1$. Wtedy dla $V \in \mathfrak{M}_{r+2}^1$

$$|(f, V)_{0,K} - l_h(V)| \leq C h^{s+1} \|f\|_{s+1, q} \|V\|_{2,K},$$

gdzie stała C nie zależy od f, V, h .

Dowód. Mamy $V = V_1 + V_2$, $V_1 \in \mathfrak{T}_{r+2}^1$, $V_2 \in \mathfrak{M}_3^1$. Zachodzi równość

$$(5.22) \quad (f, V)_{0,K} - l_h(V) = \sum_{i=0}^N [I_i(f V_1) - Q_i(f V_1)] + \sum_{i=0}^N [I_i(f V_2) - R_i(f V_2)].$$

Szacujemy każdy składnik prawej strony powyższej równości. Zaczniemy od $|I_i(f V_1) - Q_i(f V_1)|$. Ponieważ zachodzi równość (3.9), więc możemy skorzystać z lematu 3.2 z parametrami $j = 2$, $n = r + 2$, $1 \leq s \leq r$, $q \in [2, \infty]$. Bierzemy pod uwagę nierówności (2.17) i (4.2). Otrzymamy

$$(5.23) \quad |I_i(f V_1) - Q_i(f V_1)| \leq C h^{s+(3/2)-(1/q)} \|f\|_{s+1, q, e_i} \|V\|_{2, e_i}.$$

Następnie szacujemy $|I_i(f V_2) - R_i(f V_2)|$. Korzystamy z nierówności (2.17) i (4.9) oraz z lematu 2.1 z parametrami $m = r + 1$, $j = 2$, $n = 3$, $1 \leq s \leq r$, $q \in [2, \infty]$ (zob. równość (3.5)). Mamy

$$(5.24) \quad |I_i(f V_2) - R_i(f V_2)| \leq C h^{s+(3/2)-(1/q)} \|f\|_{s+1, q, e_i} \|V\|_{2, e_i}.$$

Biorąc pod uwagę równość (5.22) oraz korzystając z oszacowań (5.23) i (5.24),

otrzymamy

$$\begin{aligned}
 |(f, V)_{0,K} - I_h(V)| &\leq \sum_{i=0}^N C_i h^{s+(3/2)-(1/q)} \|f\|_{s+1,q,e_i} \|V\|_{2,e_i} \leq \\
 &\leq Ch^{s+1} \left(\sum_{i=0}^N h \right)^{(1/2)-(1/q)} \left(\sum_{i=0}^N \|f\|_{s+1,q,e_i}^q \right)^{1/q} \left(\sum_{i=0}^N \|V\|_{2,e_i}^2 \right)^{1/2} \leq \\
 &\leq Ch^{s+1} \|f\|_{s+1,q} \|V\|_{2,K},
 \end{aligned}$$

gdzie $1 \leq s \leq r$, $q \in [2, \infty]$. Skorzystaliśmy tu z nierówności Höldera (zob. (2.31)) z parametrami $\alpha = (1/2 - 1/q)^{-1}$, $\beta = q$, $\gamma = 2$. Warunek $\alpha \geq 1$ jest spełniony dla $q \geq 2$. ■

Podamy teraz szacowanie błędu metod H^{-1} -kolokacji w normie przestrzeni $L^2(K)$.

Twierdzenie 5.1. Niech $d_{|e_i} \in W^{s+2,\infty}(e_i)$, $b_{|e_i} \in W^{s+2,\infty}(e_i)$, $c_{|e_i} \in W^{s+1,\infty}(e_i)$, $f_{|e_i} \in W^{s+1,q}(e_i)$ dla $i = 0, 1, \dots, N$, gdzie $1 \leq s \leq r$, $q \in [2, \infty]$. Ponadto niech $u \in H_0^1(K)$ oraz $u_{|e_i} \in H^p(e_i)$ dla $i = 0, 1, \dots, N$, gdzie $\tilde{p} = \max(s+1, \min(s+3, r))$. Niech będą również spełnione założenia (2.5), (2.7), (2.8) i (2.11). Wtedy istnieje stała C taka, że dla dostatecznie małych h

$$\|u - U\|_{0,K} \leq Ch^{s+1} (\|u\|_{\tilde{p}} + \|f\|_{s+1,q}).$$

gdzie u jest rozwiązaniem zagadnienia (2.2), U jest rozwiązaniem zagadnienia (3.1), (3.2), a f występuje po prawej stronie (2.1).

Dowód. Niech $U_I \in \mathcal{M}_r^{-1}$ oznacza interpolację funkcji u na każdym elemencie e_i w $r+1$ węzłach $y_{ij} \in (x_i, x_{i+1})$, $j = 1, \dots, r+1$, $i = 0, 1, \dots, N$. Nie nakładamy na węzły $\{y_{ij}\}$ żadnych ograniczeń poza tym, żeby były różne i aby nie były równe x_k , $k = 0, 1, \dots, N+1$. Mamy

$$(5.25) \quad \|u - U_I\|_{0,K} \leq Ch^{s+1} \|u\|_{s+1},$$

gdzie $1 \leq s \leq r$, przy założeniu, że $u_{|e_i} \in H^{s+1}(e_i)$, $i = 0, \dots, N$.

Oszacujemy teraz $\|U_I\|_{\tilde{s},K}$, gdzie $\tilde{s} = \min(s+3, r)$, $1 \leq s \leq r$, następująco (zob. [1]):

$$\|U_I\|_{\tilde{s},e_i} \leq \|u - U_I\|_{\tilde{s},e_i} + \|u\|_{\tilde{s},e_i} \leq C \|u\|_{\tilde{s},e_i} + \|u\|_{\tilde{s},e_i} \leq C \|u\|_{\tilde{s},e_i}$$

dla $u_{|e_i} \in H^{\tilde{s}}(e_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$. Z (5.10) oraz z powyższej nierówności otrzymamy

$$\begin{aligned}
 (5.26) \quad \sup_{V \in \mathfrak{M}_{r+2}^1} |(U_I, L^* V)_{0,K} - a_h(U_I, V)| / \|V\|_{2,K} &\leq C_1 h^{s+1} \|U_I\|_{\tilde{s}} \leq \\
 &\leq Ch^{s+1} \|u\|_{\tilde{s}},
 \end{aligned}$$

gdzie $\tilde{s} = \min(s+3, r)$, $1 \leq s \leq r$. Następnie w (5.1) zamiast W wstawiamy U_I . Z oszacowań (5.25), (5.26) oraz z lematu 5.3 w połączeniu z nierównością (5.1) wynika oszacowanie błędu $\|u - U\|_{0,K}$, co kończy dowód. ■

Z praktycznego punktu widzenia może nas interesować, jaki jest błąd metody H^{-1} -kollokacji dla pochodnych rozwiązania dokładnego u . Niestety, nie można podać globalnego błędu metody H^{-1} -kollokacji w normach przestrzeni $H^k(K)$, $k = 1, \dots, r$, bowiem rozwiązanie przybliżone U nie jest ciągle. Ale możemy podać oszacowania błędu lokalnie, na każdym elemencie e_i oddzielnie, bo na e_i funkcja U jest wielomianem. Tak więc z twierdzenia 5.1 wynika następujący wniosek.

WNIOSEK 5.1. *Niech będą spełnione założenia twierdzenia 5.1, przy czym $k \leq s \leq r$, gdzie $k = 1, \dots, r$. Wtedy istnieją stałe C_k takie, że dla dostatecznie małych h*

$$\|u - U\|_k \leq C_k h^{s-k+1} (\|u\|_{\tilde{p}} + \|f\|_{s+1,q}),$$

gdzie u jest rozwiązaniem zagadnienia (2.2), U jest rozwiązaniem zagadnienia (3.1), (3.2), f występuje po prawej stronie (2.1) i (2.2), a $\tilde{p} = \max(s+1, \min(s+3, r))$.

Dowód. Niech $U_I \in \mathcal{M}_r^{-1}$ będzie interpolacją funkcji u w węzłach y_{ij} , $i = 0, 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, r+1$, różnych i nierównych x_k , $k = 0, 1, \dots, N$. Z nierówności trójkąta wynika, że dla $k = 1, \dots, r$

$$(5.27) \quad \|u - U\|_k \leq \|u - U_I\|_k + \|U_I - U\|_k.$$

Zachodzi następujące oszacowanie (zob. [1])

$$(5.28) \quad \|u - U_I\|_k \leq Ch^{s-k+1} \|u\|_{s+1},$$

jeśli $u|_{e_i} \in H^{s+1}(e_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$. Z oszacowania (2.18) mamy

$$\|U_I - U\|_{k,e_i} \leq Ch^{-k} \|U_I - U\|_{0,e},$$

a stąd

$$(5.29) \quad \|U_I - U\|_k \leq Ch^{-k} \|U_I - U\|_{0,K}.$$

Z nierówności trójkąta wynika, że

$$(5.30) \quad \|U_I - U\|_{0,K} \leq \|U_I - u\|_{0,K} + \|u - U\|_{0,K}.$$

Zaś z twierdzenia 5.1 otrzymamy

$$(5.31) \quad \|U - u\|_{0,K} \leq Ch^{s+1} (\|u\|_{\tilde{p}} + \|f\|_{s+1,q}),$$

gdzie $\tilde{p} = \max(s+1, \min(s+3, r))$. Tak więc z oszacowań (5.29), (5.30), (5.25)

i (5.31) wynika, że

$$(5.32) \quad |||U_I - U|||_k \leq Ch^{s-k+1} (|||u|||_{\bar{p}} + |||f|||_{s+1,q}).$$

Następnie z oszacowań (5.28) i (5.32) oraz z nierówności (5.27) otrzymamy

$$|||u - U|||_k \leq Ch^{s-k+1} (|||u|||_{\bar{p}} + |||f|||_{s+1,q}),$$

co kończy dowód. ■

Prace cytowane

- [1] P. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, Amsterdam 1978.
- [2] R. J. Dunn, Jr., M. F. Wheeler, *Some collocation-Galerkin methods for two point boundary value problems*, SIAM J. Numer. Anal. 13 (1976), 720-733.
- [3] G. Fairweather, P. Keast, J. C. Diaz, *On the H^{-1} -Galerkin method for second-order linear two-point boundary value problems*, SIAM J. Numer. Anal. 21 (1984), 314-326.
- [4] O. A. Ladyženskaja, *Kraevye zadači matematičeskoj fiziki*, Nauka, Moskva 1973.
- [5] O. A. Ladyženskaja, N. N. Ural'ceva, *Linejnye i kwazilinejnye uravnenija élliptičeskogo tipa*, Nauka, Moskva 1964.
- [6] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson et C^{ie}, Paris; Academia, Praga 1967.
- [7] J. T. Oden, J. N. Reddy, *An introduction to the mathematical theory of finite elements*, Wiley-Interscience, New York 1976.
- [8] L. A. Oganesjan, L. A. Ruchovet, *Variacionno-raznostnye metody rešenija élliptičeskich uravnenij*, Izdatel'stvo AN ASSR, Erevan 1979.
- [9] H. H. Rachford, M. F. Wheeler, *An H^{-1} -Galerkin procedure for the two point boundary value problem*, w: *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations* (ed. C. de Boor), Academic Press, New York 1974.
- [10] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, AMS Colloquium Publications vol. XXIII, New York 1939.