

ZDZISLAW POROSINSKI (Wroclaw)

Optymalne zatrzymanie maksimum ciagu obserwowanego nad statystyką pozycyjną ciagu nieobserwowanego

(Praca wpłynęła do Redakcji 1985.01.15)

0. Wstęp. Niech $X_1, X_2, \dots, X_N, Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ (N – ustalona liczba naturalna) będą niezależnymi zmiennymi losowymi na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ o tym samym rozkładzie danym ciągłą dystrybucją $F(x)$. Niech $f_n, g_n, n = 1, 2, \dots, N$, będą funkcjami określonymi na $\mathbf{R}^n$ o wartościach w $\mathbf{R}$. Definiujemy $\xi_n = f_n(X_1, \dots, X_n), \eta_n = g_n(Y_1, \dots, Y_n)$. Zakładamy, że obserwujemy tylko realizację ciągu ξ_n i celem naszym jest zatrzymanie obserwacji w chwili, gdy z największym prawdopodobieństwem wartość ξ_n przekracza η_n .

Problem tego typu rozpatrywał K. Szajowski w pracy [1] i uzyskał rozwiązanie dla $\xi_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ i $\eta_n = \max(Y_1, \dots, Y_n)$. W niniejszej pracy podano rozwiązanie problemu ogólniejszego: optymalne zatrzymanie maksimum ciągu obserwowanego nad statystyką pozycyjną dowolnego rzędu ciągu nieobserwowanego.

1. Sformułowanie problemu. Niech N będzie ustaloną liczbą naturalną. Załóżmy, że $X_1, X_2, \dots, X_N, Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie danym ciągłą dystrybucją F , określonymi na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Niech $k, 0 \leq k \leq N-1$, będzie ustaloną liczbą. Niech $\xi_n = \max(X_1, \dots, X_n), n = 1, 2, \dots, N$, oraz

$$\eta_n = \begin{cases} \infty, & \text{gdy } 1 \leq n \leq k, \\ Y_{n-k,n}, & \text{gdy } k < n \leq N, \end{cases}$$

gdzie $Y_{n-k,n}$ oznacza statystykę pozycyjną rzędu $n-k$ w próbie $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$.

Obserwujemy tylko realizację ciągu $(\xi_n)_{n=1}^N$. Niech $\mathcal{F}_n$ będzie σ -ciałem generowanym przez zmienne losowe $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ i niech $\mathfrak{M}^N$ będzie zbiorem wszystkich momentów Markowa τ względem $(\mathcal{F}_n)_{n=1}^N, 0 \leq \tau \leq N$.

Rozpatrzmy problem

(S) wyznaczyć $\tau^* \in \mathfrak{M}^N$ takie, że

$$P(\xi_{\tau^*} > \eta_{\tau^*}) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}^N} P(\xi_{\tau} > \eta_{\tau}).$$

2. Redukcja problemu. Przyjmujemy definicję

$$Z_n = P(\xi_n > \eta_n | \mathcal{F}_n), \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Mamy

$$P(\xi_{\tau} > \eta_{\tau}) = EZ_{\tau} \quad \text{dla } \tau \in \mathfrak{M}^N.$$

Jeśli $Z_n = f(n, \xi_n)$ i $\xi = (\xi_n)_{n=0}^N$ jest łańcuchem Markowa względem $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$, to wyjściowy problem sprowadza się do optymalnego zatrzymania łańcucha Markowa ξ z funkcją wypłaty $f(n, \cdot)$ (patrz [2]).

Ponieważ F jest funkcją ciągłą, $F(X_n)$ ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, 1]$ i $P(X_n > Y_n \Leftrightarrow F(X_n) > F(Y_n)) = 1$, dlatego bez utraty ogólności możemy przyjąć dodatkowe założenie:

- (1) zmienne losowe $X_n, Y_n, n = 1, 2, \dots, N$, mają rozkład jednostajny na przedziale $[0, 1]$.

Z powyższego założenia wynika, że dla $n > k$ otrzymamy

$$Z_n = P(Y_{n-k,n} < \xi_n | \mathcal{F}_n) = \int_0^{\xi_n} \frac{n!}{(n-k-1)!k!} y^{n-k-1} (1-y)^k dy,$$

a więc funkcja wypłaty ma postać

$$(2) \quad f(n, x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } n \leq k, \\ \frac{n!}{(n-k-1)!} \sum_{i=0}^k a_i \frac{x^{n-k+i}}{n-k+i}, & \text{gdy } n > k, \end{cases}$$

gdzie dla skrócenia zapisu przyjęliśmy oznaczenie $a_i = \frac{(-1)^i}{i!(k-i)!}$.

$\xi = (\xi_n)_{n=0}^N$ jest łańcuchem Markowa względem $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ z przestrzenią stanów $([0, 1], \mathcal{B})$ ($\mathcal{B}$ oznacza σ -ciało zbiorów borelowskich na odcinku $[0, 1]$) i funkcją przejścia:

$$P_x(B) = P(\xi_{n+1} \in B | \xi_n = x) = \begin{cases} x + |B \cap (x, 1]|, & \text{gdy } x \in B, \\ |B \cap (x, 1]|, & \text{gdy } x \notin B, \end{cases}$$

dla $n = 0, 1, \dots, N-1, x \in [0, 1]$ i $B \in \mathcal{B}$, gdzie $|\cdot|$ oznacza miarę Lebesgue'a na odcinku $[0, 1]$. Zakładamy, że w chwili $n = 0$ stan łańcucha wynosi 0 i że w chwili N łańcuch musimy zatrzymać.

Tak więc problem wyjściowy został zredukowany do optymalnego zatrzymania łańcucha Markowa ξ z funkcją wypłaty $f(n, \cdot)$. Należy więc wyznaczyć $v(x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}^N} E_x f(\tau, \xi_{\tau})$, gdzie x jest stanem początkowym, a E_x wartością

oczekiwaną względem miary P_x , oraz znaleźć $\tau^* \in \mathfrak{M}^N$ takie, że $E_x f(\tau^*, \xi_{\tau^*}) = v(x)$.

3. Rozwiązanie problemu. Niech $\mathfrak{M}_n^N = \{\tau \in \mathfrak{M}^N; \tau \geq n\}$. Niech $\xi_n = x$. Definiujemy

$$v(n, x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_n^N} E_x f(\tau, \xi_{\tau}).$$

W rozwiązaniu problemu (S) pomocny będzie następujący lemat:

LEMAT 1 ([2]). Niech ξ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa z przestrzenią stanów E i $f: \{0, 1, \dots, N\} \times E \rightarrow \mathbf{R}$ będzie funkcją nieujemną i ograniczoną. Wówczas funkcja $v(n, x)$ spełnia równanie

$$(3) \quad v(n, x) = \max \{f(n, x), E_x v(n+1, \xi_1)\}$$

oraz moment Markowa

$$(4) \quad \tau_n^* = \min \{n \leq k \leq N; v(k, \xi_k) = f(k, \xi_k)\}$$

jest optymalny w $\mathfrak{M}_n^N$. Optymalną wypłatą jest $v(x) = v(0, x)$. Optymalnym czasem zatrzymania jest τ_0^* .

Wykażemy teraz następujący lemat:

LEMAT 2. Dla $n = k+1, \dots, N-1$ równanie

$$E_x f(n+1, \xi_1) = f(n, x)$$

ma w przedziale $(0, 1)$ jedyny pierwiastek x_n^0 taki, że

$$E_x f(n+1, \xi_1) \leq f(n, x), \quad \text{gdy } x \geq x_n^0$$

oraz $x_n^0 < x_{n+1}^0$.

Dowód. Definiujemy funkcję

$$g(n, x) = E_x f(n+1, \xi_1) - f(n, x),$$

a więc

$$g(n, x) = x f(n+1, x) + \int_x^1 f(n+1, y) dy - f(n, x).$$

Ponieważ $g'(n, x) = \binom{n}{k} x^{n-k-1} (1-x)^k [(n+1)x^2 - (n-k)]$, więc funkcja $g(n, x)$ ma w przedziale $(0, 1)$ dokładnie jedno ekstremum; jest to minimum.

Ponadto $g(n, 0) = \frac{k+1}{n+2}$, $g(n, 1) = 0$. Z powyższych własności wynika, że funkcja $g(n, x)$ ma w przedziale $(0, 1)$ jedyny pierwiastek x_n^0 i że w przedziale $(x_n^0, 1)$ przyjmuje wartości ujemne. Pozostało do wykazania, że $x_n^0 < x_{n+1}^0$. Rozważmy funkcję

$$p(n, x) = \frac{n-k+1}{n+1} g(n+1, x) - xg(n, x).$$

Funkcja $p(n, x)$ ma następujące własności:

- (i) $p(n, 1) = 0$,
- (ii) $p'(n, 1) = 0$, gdyż $p'(n, x) = \binom{n}{k} x^{n-k} (1-x)^k (x^2 - 1) - g(n, x)$,
- (iii) $p''(n, x) > 0$ dla $x \in (0, 1)$, gdyż $p''(n, x) = \binom{n}{k} x^{n-k} (1-x)^k (x+k)$.

Z własności (i)-(iii) wynika, że $p(n, x) > 0$ dla $x \in (0, 1)$. Stąd

$$\frac{n+1}{n-k+1} p(n, x_n^0) = g(n+1, x_n^0) > 0,$$

co z uwagi na własności funkcji $g(n+1, x)$ oznacza, że pierwiastek x_{n+1}^0 równania $g(n+1, x) = 0$ leży na prawo od x_n^0 , czyli $x_{n+1}^0 > x_n^0$. Lemat jest dowiedzony.

Zauważmy ponadto, że ze wzoru (2) dla $x = 1$ otrzymujemy

$$(5) \quad \frac{(k+m)!}{(m-1)!} \sum_{i=0}^k a_i \frac{1}{m+i} = 1, \quad m \in N.$$

Rozwiązanie problemu (S) zawarte jest w twierdzeniu:

Twierdzenie. *Jeśli spełnione są założenia rozdziału 1, to istnieje ciąg liczb $x_{k+1} < \dots < x_{N-1}$, $x_N = 0$, taki, że*

$$(6) \quad \tau^* = \min \{k+1 \leq n \leq N; \xi_n \geq \min \{x; F(x) = x_n\}\},$$

jest optymalnym czasem zatrzymania dla problemu (S).

Optymalna wypłata dana jest przez

$$(7) \quad v = 1 - \frac{(k+1)!(k+1)!}{(2k+2)!} + (k+1)! \sum_{i=0}^k a_i \frac{x_{k+1}^{k+2+i}}{k+2+i} - \frac{N!}{(N-k-1)!} \sum_{i=0}^k a_i \frac{x_{k+1}^{2N-k+i}}{2N-k+i}.$$

Stale x_{N-j} , $j = 1, 2, \dots, N-k-1$, są wyznaczone rekurencyjnie jako jedyne w przedziale $(0, 1)$ pierwiastki równań

$$(8) \quad \frac{N!}{(N-k-1)!} \sum_{i=0}^k a_i \frac{x^{N-k+j+i}}{N-k+j+i} - \frac{(N-j)!}{(N-k-j-1)!} \sum_{i=0}^k a_i \frac{x^{N-k-j+i}}{N-k-j+i} + \varphi_{N-j} = 0,$$

gdzie stałe φ_{N-j} wyznaczone są rekurencyjnie z równań

$$(9) \quad \begin{aligned} \varphi_N &= 0, \\ \varphi_{N-j} &= \frac{k+1}{N-j+2} + \frac{N!}{(N-k-1)!} \sum_{i=0}^k a_i \frac{x_{N-j+1}^{N+j-k+i}}{(N+j-k-1+i)(N+j-k+i)} - \\ &\quad - \frac{(N-j+1)!}{(N-j-k)!} \sum_{i=0}^k a_i \frac{x_{N-j+1}^{N-j-k+2+i}}{(N-j-k+1+i)(N-j-k+2+i)} + x_{N-j+1} \varphi_{N-j+1} \end{aligned}$$

dla $j = 1, 2, \dots, N-k-1$.

Dowód. Przyjmijmy dodatkowo założenie (1). Wówczas z lematów 1 i 2 mamy

$$\begin{aligned} v(N-1, x) &= \max \{f(N-1, x), E_x f(N, \xi_1)\} = \\ &= \begin{cases} f(N-1, x), & \text{gdy } x \geq x_{N-1}, \\ E_x f(N, \xi_1), & \text{gdy } x < x_{N-1}, \end{cases} \end{aligned}$$

gdzie $x_{N-1} = x_{N-1}^0$ (zdefiniowane w lemacie 2). Łatwo widać, że $\frac{k+1}{N+1} = \varphi_{N-1}$, zgodnie ze wzorem (9).

Wykażemy teraz, że

$$(10) \quad v(N-2, x) = \begin{cases} \frac{(N-2)!}{(N-k-3)!} \sum_{i=0}^k a_i \frac{x^{N-k-2+i}}{N-k-2+i}, & \text{gdy } x \geq x_{N-2}, \\ \frac{N!}{(N-k-1)!} \sum_{i=0}^k a_i \frac{x^{N-k+2+i}}{N-k+2+i} + \varphi_{N-2}, & \text{gdy } x < x_{N-2}, \end{cases}$$

gdzie φ_{N-2} zdefiniowane jest wzorem (9), x_{N-2} — wzorem (8) oraz wykażemy, że $x_{N-2} < x_{N-1}$. Lemat 1 daje

$$v(N-2, x) = \max \{f(N-2, x), E_x v(N-1, \xi_1)\}.$$

Niech $x < x_{N-1}$. Wówczas

$$E_x v(N-1, \xi_1) = x E_x f(N, \xi_1) + \int_x^{x_{N-1}} E_y f(N, \xi_1) dy + \int_{x_{N-1}}^1 f(N-1, y) dy.$$

Wykonując działania oraz korzystając z (5), otrzymamy

$$E_x v(N-1, \xi_1) = \frac{N!}{(N-k-1)!} \sum_{i=0}^k a_i \frac{x^{N-k+2+i}}{N-k+2+i} + \varphi_{N-2},$$

gdzie φ_{N-2} jest zdefiniowane przez (9).

Niech $x \geq x_{N-1}$. Wówczas

$$\begin{aligned} E_x v(N-1, \xi_1) &= x f(N-1, x) + \int_x^1 f(N-1, y) dy = \\ &= \frac{(N-1)!}{(N-k-2)!} \sum_{i=0}^k a_i \frac{x^{N-k+i}}{N-k+i} + \frac{k+1}{N}. \end{aligned}$$

W przedziale $(0, 1)$ definiujemy funkcję

$$h(N-2, x) = E_x v(N-1, \xi_1) - f(N-2, x).$$

Funkcja $h(N-2, x)$ jest ciągła i ponadto:

- (i) $h(N-2, x_{N-1}) < 0$; wynika to z faktu, że dla $x \in (x_{N-1}, 1)$ zachodzi równość $h(N-2, x) = g(N-2, x)$ oraz $g(N-2, x)$ ma w $(0, 1)$ pierwiastek $x_{N-2}^0 < x_{N-1}^0 = x_{N-1}$ i $g(N-2, x) < 0$ dla $x > x_{N-2}^0$ (lemat 2),
- (ii) $h(N-2, x) > g(N-2, x)$ dla $x < x_{N-1}$; wynika to z faktu, że $E_x v(N-1, \xi_1) > E_x f(N-1, \xi_1)$ dla $x < x_{N-1}$,
- (iii) $h(N-2, x)$ ma co najwyżej jedno ekstremum lokalne w przedziale $(0, x_{N-1})$.

Z własności (i)-(iii) wynika, że równanie $h(N-2, x) = 0$ ma w $(0, x_{N-1})$ jedyny pierwiastek x_{N-2} i $x_{N-2}^0 < x_{N-2} < x_{N-1}$. Dowodzi to wzoru (10).

Założmy, że indukcyjnie otrzymaliśmy ciąg $x_{N-1} > \dots > x_{N-j+1} > x_{N-j+1}^0$ i

$$(11) \quad v(N-l, x)$$

$$= \begin{cases} \bar{v}(N-l, x) = \frac{(N-l)!}{(N-k-l-1)!} \sum_{i=0}^k a_i \frac{x^{N-k-l+i}}{N-k-l+i}, & \text{gdy } x \geq x_{N-l}, \\ \underline{v}(N-l, x) = \frac{N!}{(N-k-1)!} \sum_{i=0}^k a_i \frac{x^{N-k+l+i}}{N-k+l+i} + \varphi_{N-l}, & \text{gdy } x < x_{N-l}, \end{cases}$$

dla $l = 1, 2, \dots, j-1$ ($j \leq N-k-1$).

Określmy teraz x_{N-j} i $v(N-j, x)$. Niech $x < x_{N-j+1}$. Wówczas

$$\begin{aligned} E_x v(N-j+1, \xi_1) &= x \underline{v}(N-j+1, x) + \\ &+ \int_x^{x_{N-j+1}} \underline{v}(N-j+1, y) dy + \int_{x_{N-j+1}}^1 \bar{v}(N-j+1, y) dy. \end{aligned}$$

Po wykorzystaniu wzorów (5) i (9), otrzymamy

$$E_x v(N-j+1, \xi_1) = \frac{N!}{(N-k-1)!} \sum_{i=0}^k a_i \frac{x^{N-k+j+i}}{N-k+j+i} + \varphi_{N-j}.$$

Niech $x \geq x_{N-j+1}$. Wówczas

$$\begin{aligned} E_x v(N-j+1, \xi_1) &= x f(N-j+1, x) + \int_x^1 f(N-j+1, y) dy = \\ &= \frac{(N-j+1)!}{(N-k-j)!} \sum_{i=0}^k a_i \frac{x^{N-k-j+2+i}}{N-k-j+2+i} + \frac{k+1}{N-j+2}. \end{aligned}$$

W przedziale $(0, 1)$ definiujemy funkcję

$$h(N-j, x) = E_x v(N-j+1, \xi_1) - f(N-j, x).$$

Funkcja $h(N-j, x)$ jest ciągła i ponadto:

- (i) $h(N-j, x) < 0$ dla $x \geq x_{N-j+1}$; wynika to z faktu, że dla $x \geq x_{N-j+1}$ $h(N-j, x) = g(N-j, x) < 0$, gdyż $g(N-j+1, x_{N-j+1}^0) = 0$, a $x_{N-j+1}^0 < x_{N-j+1}$, $g(N-j, x_{N-j}^0) = 0$ i $x_{N-j}^0 < x_{N-j+1}^0$ (lemat 2),
 - (ii) $h(N-j, x) > g(N-j, x)$ dla $x < x_{N-j+1}$; wynika to z faktu, że $E_x v(N-j+1, \xi_1) > E_x f(N-j+1, \xi_1)$ dla $x < x_{N-j+1}$,
 - (iii) $h(N-j, x)$ ma co najwyżej jedno ekstremum w przedziale $(0, x_{N-j+1})$.
- Fakty (i)-(iii) implikują istnienie jedynego rozwiązania x_{N-j} równania $h(N-j, x) = 0$ w $(0, 1)$ i $x_{N-j}^0 < x_{N-j} < x_{N-j+1}$.

W ten sposób wykazaliśmy prawdziwość wzoru (11) dla $l = 1, 2, \dots, N-k-1$ oraz istnienie ciągu $(x_n)_{n=k+1}^N$.

Wykażemy teraz, że dla $j = N-k, \dots, N-1$

$$\begin{aligned} (12) \quad v(N-j, x) &= \bar{v}(N-j, x) = \\ &= (k+1)! \sum_{i=0}^k a_i \frac{x^{-N+j+k+2+i}}{-N+j+k+2+i} + 1 - \frac{(-N+j+k+1)! (k+1)!}{(-N+j+2k+2)!}, \end{aligned}$$

gdy $x \geq x_{k+1}$,

$$\begin{aligned} (13) \quad v(N-j, x) &= \underline{v}(N-j, x) = \\ &= \frac{N!}{(N-k-1)!} \sum_{i=0}^k a_i \frac{x^{N-k+j+i}}{N-k+j+i} + \varphi_{N-j}, \end{aligned}$$

gdy $x < x_{k+1}$,

gdzie stałą φ_{N-j} wylicza się z równań rekurencyjnych

$$\begin{aligned} (14) \quad \varphi_{N-j} &= \frac{N!}{(N-k-1)!} \sum_{i=0}^k a_i \frac{x_{k+1}^{N-k+j+i}}{(N-k+j-1+i)(N-k+j+i)} - \\ &- (k+1)! \sum_{i=0}^k a_i \frac{x_{k+1}^{-N+k+j+2+i}}{(-N+k+j+1+i)(-N+k+j+2+i)} + \\ &+ \left[\frac{(-N+k+j)! (k+1)!}{(-N+2k+j+1)!} + \varphi_{N-j+1} - 1 \right] x_{k+1} + 1 - \frac{(-N+k+j+1)! (k+1)!}{(-N+2k+j+2)!}, \end{aligned}$$

w których φ_{k+1} określona jest przez (9).

Z określenia funkcji wypłaty (2) oraz lematu 1 otrzymujemy dla $j \geq N-k$

$$v(N-j, x) = \max \{E_x v(N-j+1, \xi_1), f(N-j, x)\} = E_x v(N-j+1, \xi_1).$$

Niech $x \geq x_{k+1}$.

1° Dla $j = N-k$ otrzymujemy po skorzystaniu ze wzoru (5) oraz z (11) dla $l = N-k-1$:

$$\begin{aligned} v(k, x) &= E_x v(k+1, \xi_1) = x \bar{v}(k+1, x) + \int_x^1 \bar{v}(k+1, y) dy = \\ &= (k+1)! \sum_{i=0}^k a_i \frac{x^{2+i}}{2+i} + 1 - \frac{1! (k+1)!}{(k+2)!}, \end{aligned}$$

co oznacza prawdziwość wzoru (12) dla $j = N-k$.

2° Załóżmy, że wykazaliśmy prawdziwość wzoru (12) dla $j = N-k, \dots, N-l+1$. Wówczas

$$v(N-l, x) = E_x v(N-l+1, \xi_1) = x \bar{v}(N-l+1, x) + \int_x^1 \bar{v}(N-l+1, y) dy$$

i po skorzystaniu z (5)

$$v(N-l, x) = (k+1)! \sum_{i=0}^k a_i \frac{x^{-N+l+k+2+i}}{-N+l+k+2+i} + 1 - \frac{(-N+l+k+1)! (k+1)!}{(-N+l+2k+2)!}.$$

W ten sposób wzór (12) jest dowiedziony.

Niech $x < x_{k+1}$.

1° Dla $j = N-k$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} v(k, x) &= E_x v(k+1, \xi_1) = x \bar{v}(k+1, x) + \int_x^{x_{k+1}} \bar{v}(k+1, y) dy + \\ &+ \int_{x_{k+1}}^1 \bar{v}(k+1, y) dy = \frac{N!}{(N-k-1)!} \sum_{i=0}^k a_i \frac{x^{2N-2k+i}}{2N-2k+i} + \varphi_k \end{aligned}$$

po wykorzystaniu (5) i postaci φ_k zgodnej ze wzorem (14).

2° Załóżmy, że wykazaliśmy prawdziwość (13) dla $j = N-k, \dots, N-l+1$. Obliczmy $v(N-l, x)$:

$$v(N-l, x) = x \bar{v}(N-l+1, x) + \int_x^{x_{k+1}} \bar{v}(N-l+1, y) dy + \int_{x_{k+1}}^1 \bar{v}(N-l+1, y) dy,$$

co po wykorzystaniu wzorów (5) i (14) można napisać w postaci

$$v(N-l, x) = \frac{N!}{(N-k-1)!} \sum_{i=0}^k a_i \frac{x^{N-k+l+i}}{N-k+l+i} + \varphi_{N-l}.$$

W ten sposób dowiedliśmy indukcyjnie (13) dla $j = N-k, \dots, N-1$.

Korzystając z założenia $P(\xi_0 = 0) = 1$, możemy obliczyć optymalną wypłatę

$$\begin{aligned} v &= v(0, x)|_{x=0} = E_x v(1, \xi_1)|_{x=0} = \\ &= \frac{N!}{(N-k-1)!} \sum_{i=0}^k a_i \frac{x_{k+1}^{2N-k+i}}{(2N-k-1+i)(2N-k+i)} - \\ &\quad - (k+1)! \sum_{i=0}^k a_i \frac{x_{k+1}^{k+2+i}}{(k+1+i)(k+2+i)} - \\ &\quad - \left[1 - \frac{k!(k+1)!}{(2k+1)!} - \varphi_1 \right] x_{k+1} + 1 - \frac{(k+1)!(k+1)!}{(2k+2)!}. \end{aligned}$$

Wobec ciągłości $v(1, x)$ w punkcie x_{k+1} z (12) i (13) mamy

$$1 - \frac{k!(k+1)!}{(2k+1)!} - \varphi_1 = \frac{N!}{(N-k-1)!} \sum_{i=0}^k a_i \frac{x_{k+1}^{2N-k-1+i}}{2N-k-1+i} - (k+1)! \sum_{i=0}^k a_i \frac{x_{k+1}^{k+1+i}}{k+1+i}$$

i łatwo otrzymujemy postać (7) optymalnej wypłaty v .

Optymalnym czasem zatrzymania w rozważanym problemie przy dodatkowym założeniu (1) jest więc

$$\tau^* = \min \{k+1 \leq n \leq N; \xi_n \geq x_n\}.$$

Oznacza to prawdziwość (6), gdy (1) nie zakładamy.

Prace cytowane

- [1] K. Szajowski, *Optimal stopping of a sequence of maxima over an unobservable sequence of maxima*, Zastos. Matem. 18 (1984), 359-374.
- [2] A. N. Širjaev, *Statističeskij posledovatel'nyj analiz*, Nauka, Moskva 1969.