



TOMASZ BOJDECKI (Warszawa)

Metoda maksymalizacji prawdopodobieństwa w zagadnieniach analizy sekwencyjnej*

(Praca wpłynęła do Redakcji 14.04.1980)

0. Wstęp. Przypuśćmy, że z pewnym doświadczeniem losowym jest związany proces stochastyczny $\xi = (\xi_t)_{t \in T}$. Obserwując przebieg doświadczenia, zamierzamy przerwać eksperyment, gdy tylko realizacja procesu osiągnie pewną, pożądaną przez nas wartość. Rzecz w tym, że w momencie podejmowania decyzji o przerwaniu nie jesteśmy pewni czy proces osiągnął właśnie tę wartość, bowiem zbiór takich wartości jest losowy; może zależeć np. od przyszłych wyników doświadczenia. W tej sytuacji szukamy takiej metody postępowania („reguły stopu”), która maksymalizowałaby prawdopodobieństwo, że w momencie zatrzymania realizacja procesu należy do „dobrego” zbioru.

Tak oto, oczywiście całkiem nieściśle, można postawić problem, któremu poświęcona jest niniejsza praca. (Ścisłe sformułowanie znajduje się w rozdziale I.) Chyba najważniejszy i najciekawszy jest przypadek, gdy dla ξ o wartościach rzeczywistych, interesującym nas zbiorem jest $\{\sup_i \xi_i\}$ (lub ogólniej zadane otoczenie punktu $\sup_i \xi_i$); obserwując ewolucję procesu chcemy zatrzymać go w chwili, gdy trajektoria osiągnie wartość maksymalną spośród wszystkich wartości przeszłych i przyszłych. Otrzymujemy w ten sposób nowe podejście do zagadnień optymalnego stopowania. Przypomnijmy, że klasyczny problem optymalnego stopowania polega na znalezieniu reguły stopu maksymalizującej $E(\xi_\tau)$, (por. np. [5], [7], [13]); obecnie szukamy τ , dla którego $P(\xi_\tau = \sup_i \xi_i)$ jest największe.

Zalety proponowanego podejścia można rozpatrywać z różnych punktów widzenia:

- 1) pozwala ono wybrać lepszą spośród kilku (lub wielu) reguł stopu optymalnych dla sformułowania klasycznego, np. gdy proces jest martyngałem,
- 2) nie wymaga założeń o całkowalności ξ_t ,
- 3) czasem jest ono po prostu naturalniejsze, np. gdy doświadczenie przeprowadzone jest tylko raz.

* Praca częściowo subwencionowana w ramach problemu M-111.

Przykład pewnego konkretnego zagadnienia optymalnego stopowania sformułowanego w tym duchu znajduje się już w pracy Gilberta i Mostellera [10] (patrz komentarz niżej).

Praca niniejsza stanowi zebranie i omówienie wyników przedstawionych w publikacjach [1], [2], [3], [4].

Rozdział I zawiera ogólne sformułowanie problemu dla procesu z czasem dyskretnym oraz twierdzenie dające warunek konieczny i dostateczny na to, by istniało rozwiązanie tego problemu. Z twierdzenia tego wynika również postać rozwiązania. Zastosowany jest tu aparat teorii martyngałów z wykorzystaniem klasycznych metod Snella ([15], por. także [5], [12], [13]). Podane są też przykłady.

W rozdziale II są rozwiązywane (explicité) konkretne problemy dotyczące wykrywania z maksymalnym prawdopodobieństwem maksimum procesu stochastycznego. Rozpatrzone są następujące procesy:

1) Skończony ciąg niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Właśnie ten problem badali Gilbert i Mosteller w [10], uzyskując metodą heurystyczną wynik identyczny z tym, który jest udowodniony w niniejszej pracy.

2) Nieskończony ciąg niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie z „opłatą za eksperyment”, tzn. $\xi_n = \zeta_n - cn$ albo $\xi_n = \max(\zeta_1, \dots, \zeta_n) - cn$, gdzie $c > 0$, $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ — niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie.

3) Skończony ciąg sum niezależnych, symetrycznych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Otrzymany tutaj wynik jest odpowiedzią na pytanie postawione przez J. Zabczyka. Omówiona jest istotność założenia o symetryczności rozkładów.

Okazuje się, że we wszystkich tych przypadkach problem można sprowadzić do optymalnego stopowania pewnego łańcucha Markowa z pewną funkcją wypłaty (patrz [9], [13], [16]).

W rozdziale III znajduje się kolejny przykład zagadnienia stanowiącego szczególny przypadek ogólnego problemu sformułowanego w rozdziale I, a mianowicie tzw. „zagadnienia rozregulowania” (ang. disorder problem, ros. zadacza o razładkie). Obserwujemy kolejne realizacje niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie: $\eta_1, \eta_2, \dots$. W pewnej losowej chwili θ rozkład η zmienia się na inny i od tego momentu zmienne losowe mają już ten nowy rozkład. Chcemy, tylko na podstawie znajomości przeszłych wartości η , zatrzymać proces w „momencie rozregulowania” θ lub co najmniej, dostatecznie „blisko” chwili θ . Zagadnienie to zostało postawione przez Kołmogorowa a rozwiązane przez Szirijewa w [17], [16] dla przypadku, gdy minimalizowało się, z grubsza mówiąc, średnią „odległość” momentu zatrzymania od momentu θ . W tej pracy zajmujemy się nową wersją tego problemu: maksymalizujemy prawdopodobieństwo, że chwila zatrzymania będzie się znajdować w zadanym otoczeniu chwili θ . W rozdziale III podane jest rozwiązanie tego problemu wraz z wartością maksymalnego prawdopodobieństwa odpowiadającego optymalnej regule stopu. Ciekawe, że rozwiązanie ma tu postać prostszą i bardziej jawną od tej, którą uzyskał Szirijew w [17], [16] dla rozwiązanego przez

siebie zagadnienia. Dla przykładu, przeprowadzone są rachunki, gdy $\eta_1, \eta_2, \dots$ mają rozkłady wykładnicze. Otrzymany w tym przypadku wynik można traktować jako rozwiązanie nieco — i w naturalny sposób — uproszczonego problemu postawionego przez M. H. A. Davisa w [8] a dotyczącego najszybszego wykrycia „rozregulowania się” procesu Poissona (uproszczenie polega na tym, że zakładamy tu, iż moment rozregulowania nie może nastąpić pomiędzy kolejnymi sygnałami).

W rozdziale IV omówiona jest pewna ciągła wersja problemu rozważanego w rozdziale II. Wartości niezależnych, jednakowo rozłożonych zmiennych losowych pojawiają się zgodnie z danym procesem odnowy. Istnieje pewien losowy horyzont czasowy T i naszym zadaniem jest zatrzymać proces przed chwilą T , tak aby wartość zmiennej losowej w momencie zatrzymania była z maksymalnym prawdopodobieństwem największa spośród wszystkich, które pojawiły się i pojawią się do momentu T . Problem takiego typu został sformułowany po raz pierwszy przez Cowana i Zabczyka w [6] w związku z zagadnieniem wyboru najlepszego obiektu, czyli tzw. „zagadnieniem sekretarek”. W rozdziale IV przedyskutowana jest postać rozwiązania tego problemu w sformułowaniu ogólnym, zaś rozwiązanie *explicité* zostało podane dla przypadku, gdy proces odnowy jest procesem Poissona, a T ma rozkład albo jednopunktowy, albo wykładniczy. W tym ostatnim przypadku można też obliczyć maksymalne prawdopodobieństwo prawidłowego zatrzymania; jest ciekawe i chyba raczej nieoczekiwane, że we wszystkich „naturalnych” (patrz tw. 4.5) sytuacjach prawdopodobieństwo to jest stałe, równe e^{-1} .

I. Problem ogólny. Niech $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ będzie ustaloną przestrzenią probabilistyczną. Załóżmy ponadto, że określony jest wstępujący ciąg $(\mathfrak{F}_n)_{n \in N}$ σ -ciał zawartych w $\mathfrak{F}$ (N oznacza zbiór liczb naturalnych). Jak zwykle, $\mathfrak{F}_n$ interpretujemy jako klasę tych zdarzeń, o których wiemy czy zaszły, czy nie, jeśli obserwujemy doświadczenie aż do chwili n . Oznaczmy przez $\mathcal{T}$ klasę wszystkich momentów Markowa względem $(\mathfrak{F}_n)_{n \in N}$ tzn. takich funkcji $\tau: \Omega \rightarrow N \cup \{+\infty\}$, że dla każdego n zachodzi $\{\tau \leq n\} \in \mathfrak{F}_n$.

Niech $(\xi_n)_{n \in N}$ będzie ciągiem zmiennych losowych o wartościach w pewnej przestrzeni mierzalnej $(E, \mathfrak{B})$. Przypuśćmy także, iż dla każdego $\omega \in \Omega$ jest określony zbiór $B(\omega) \subset E$, taki że

$$\{(\omega, x): x \in B(\omega)\} \in \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{B}.$$

Następujący problem stanowi sformalizowanie zagadnienia omówionego we wstępie:

(G) Znaleźć $\tau^* \in \mathcal{T}$, takie że

$$P(\tau^* < +\infty, \xi_{\tau^*} \in B) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} P(\tau < +\infty, \xi_\tau \in B).$$

Moment Markowa τ^* spełniający powyższy warunek będziemy nazywać *optymalnym*. Jasne jest, że przyjęte o zbiorze B założenie powoduje, iż $\{\tau < +\infty, \xi_\tau \in B\} \in \mathfrak{F}$ dla $\tau \in \mathcal{T}$.

Najważniejszym przykładem takiego problemu jest zagadnienie, które będziemy

nazywać *problemem* (S_ε): Zakładamy, że $(\xi_n)_{n \in N}$ jest ciągiem rzeczywistych zmiennych losowych, ograniczonym z prawdopodobieństwem jeden, zaś $\mathfrak{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Ustalamy $\varepsilon \geq 0$ i chcemy

(S_ε) Rozwiązać problem (G) dla

$$B(\omega) = [\sup_n \xi_n(\omega) - \varepsilon, \sup_n \xi_n(\omega)].$$

W tym ostatnim przypadku można czasem stawiać problem także nieco inaczej i żądać, żeby moment zatrzymania wypadł z maksymalnym prawdopodobieństwem nie w zadanym otoczeniu $\sup_n \xi_n$, ale w jednej spośród m kolejnych największych wartości ciągu $(\xi_n(\omega))_{n \in N}$ (pod warunkiem oczywiście, że takie wartości w ogóle istnieją). Takie zagadnienie jest również szczególnym przypadkiem problemu (G). Inny przykład, już o całkiem odmiennym charakterze, zostanie omówiony w rozdziale III.

Przechodząc do poszukiwania rozwiązania problemu (G) zdefiniujmy następujące zmienne losowe, które „znamy w chwili n ”:

$$(1.1) \quad Z_n = P(\xi_n \in B | \mathfrak{F}_n),$$

$$(1.2) \quad X_n = \operatorname{esssup}_{\tau \in \mathcal{T}, \tau \geq n} P(\tau < +\infty, \xi_\tau \in B | \mathfrak{F}_n),$$

dla $n \in N$, oraz moment Markowa

$$(1.3) \quad \tau_0 = \inf\{n: Z_n = X_n\},$$

przy czym, jak zwykle $\inf \emptyset = +\infty$.

A oto twierdzenie stanowiące główny wynik tego rozdziału.

TWIERDZENIE 1.1 ([4]). *Optymalny moment Markowa dla problemu (G) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = 0$ prawie na pewno na zbiorze $\{\tau_0 = +\infty\}$. Jeśli ten warunek jest spełniony, to τ_0 jest optymalny.*

D o w ó d. Zdefiniujmy $Z_\infty = 0$. Z elementarnych własności warunkowych wartości oczekiwanych wynika, że dla dowolnego $\tau \in \mathcal{T}$ takiego, że $\tau \geq n$

$$\begin{aligned} E(Z_\tau | \mathfrak{F}_n) &= \sum_{k=n}^{\infty} E(I_{\{\tau=k\}} Z_k | \mathfrak{F}_n) = \\ (1.4) \quad &= \sum_{k=n}^{\infty} E(P(\tau = k, \xi_k \in B | \mathfrak{F}_k) | \mathfrak{F}_n) = \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} P(\tau = k, \xi_k \in B | \mathfrak{F}_n) = P(\tau < +\infty, \xi_\tau \in B | \mathfrak{F}_n). \end{aligned}$$

Wzór (1.2) możemy zatem zapisać w postaci:

$$X_n = \operatorname{esssup}_{\tau \in \mathcal{T}, \tau \geq n} E(Z_\tau | \mathfrak{F}_n).$$

Równocześnie z lematu Fatou i z tego, że $Z_\infty = 0$ wynika, iż dla dowolnego $\tau \in \mathcal{T}$, $\tau \geq n$ zachodzi

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} E(Z_{\tau \wedge m} | \mathcal{F}_n) \geq E(\liminf_{m \rightarrow \infty} Z_{\tau \wedge m} | \mathcal{F}_n) \geq E(Z_\tau | \mathcal{F}_n)$$

prawie na pewno. W konsekwencji otrzymujemy

$$(1.5) \quad X_n = \operatorname{esssup}_{+\infty > \tau \geq n} E(Z_\tau | \mathcal{F}_n).$$

Widać teraz, że do ciągu $(X_n)_{n \in N}$ można zastosować klasyczne rezultaty teorii optymalnego stopowania (patrz np. [13] lub [5] rozdz. 8). W szczególności stwierdzamy, że $(X_n)_{n \in N}$ jest najmniejszym nadmartyngałem (oczywiście względem ciągu $(\mathcal{F}_n)_{n \in N}$ majoryzującym $(Z_n)_{n \in N}$, że $(X_{n \wedge \tau_0})_{n \in N}$ jest martyngałem, a ponadto

$$(1.6) \quad E(X_1) = \sup_{\tau < +\infty} E(Z_\tau)$$

oraz

$$(1.7) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} Z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \text{ p.n.}$$

Z (1.4) i (1.6) mamy

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}} P(\tau < +\infty, \xi_\tau \in B) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E(Z_\tau) = \sup_{\tau < +\infty} E(Z_\tau) = E(X_1).$$

Martyngał $(X_{n \wedge \tau_0})_{n \in N}$ jest ograniczony, a więc zbieżny w L^1 , zatem

$$E(X_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_{n \wedge \tau_0}) = E(\lim_{n \rightarrow \infty} X_{n \wedge \tau_0}).$$

Z kolei korzystając z (1.7), (1.3) i z tego, że $Z_\infty = 0$ mamy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} X_{n \wedge \tau_0} &= X_{\tau_0} I_{\{\tau_0 < +\infty\}} + \lim_{n \rightarrow \infty} X_n I_{\{\tau_0 = +\infty\}} = \\ &= Z_{\tau_0} + \limsup_{n \rightarrow \infty} Z_n I_{\{\tau_0 = +\infty\}} \text{ p.n.} \end{aligned}$$

W rezultacie otrzymujemy wzór

$$(1.8) \quad \sup_{\tau \in \mathcal{T}} P(\tau < +\infty, \xi_\tau \in B) = E(Z_{\tau_0}) + E(\limsup_{n \rightarrow \infty} Z_n I_{\{\tau_0 = +\infty\}}).$$

Wnioskujemy stąd (i z (1.4)), że jeśli $\limsup_{n \rightarrow \infty} Z_n I_{\{\tau_0 = +\infty\}} = 0$ p.n., to τ_0 jest optymalny, co kończy dowód dostateczności.

Dla dowodu konieczności przyjmijmy $X_\infty = 0$. Nietrudno — np. modyfikując w naturalny sposób dowód Lematu 8.8 w [5] — pokazać, że dla dowolnego $\tau \in \mathcal{T}$ mamy $X_\tau = \operatorname{esssup}_{\sigma \in \mathcal{T}, \sigma \geq \tau} E(Z_\sigma | \mathcal{F}_\tau)$, a stąd $E(X_\tau) = \sup_{\sigma \geq \tau} E(Z_\sigma)$. Przypuśćmy teraz, że τ^* jest optymalnym momentem Markowa. Łatwo widzieć, że $\tau^* \geq \tau_0$ p.n. Istotnie,

$$\begin{aligned} E(Z_{\tau^*}) &= P(\tau^* < +\infty, \xi_{\tau^*} \in B) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} P(\tau < +\infty, \xi_\tau \in B) = \\ &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E(Z_\tau) \geq \sup_{\tau \geq \tau^*} E(Z_\tau) = E(X_{\tau^*}). \end{aligned}$$

Stąd i z oczywistej nierówności $Z_{\tau^*} \leq X_{\tau^*}$ wynika, że $Z_{\tau^*} = X_{\tau^*}$ p.n., a to oznacza

(por. (1.3)), że $\tau^* \geq \tau_0$ p.n. Nadmartyngał $(X_n)_{n \in N}$ jest prawostronnie domknięty przez zero, zatem z twierdzenia Dooba (patrz np. twierdzenie 7.2 w [5]) wnioskujemy, że $E(X_{\tau^*}) \leq E(X_{\tau_0})$. Wobec faktu, że $X_{\tau_0} = Z_{\tau_0}$, $X_{\tau^*} = Z_{\tau^*}$ oznacza to, iż $E(Z_{\tau_0}) \geq E(Z_{\tau^*}) = \sup_{\tau \in \mathcal{F}} E(Z_{\tau})$. W rezultacie $E(Z_{\tau_0}) = \sup_{\tau \in \mathcal{F}} E(Z_{\tau})$, a stąd ze wzoru (1.8) i równości (1.4) wynika, że

$$E(\limsup_{n \rightarrow \infty} Z_n I_{\{\tau_0 = +\infty\}}) = 0,$$

co kończy dowód.

Na ogół w teorii optymalnego stopowania żąda się, żeby optymalna reguła stopu była z prawdopodobieństwem 1 skończona. Dla rozpatrywanego obecnie problemu takie ograniczenie wydaje się nienaturalne. Na odwrót, typowa jest raczej sytuacja, że moment τ_0 jest z dodatnim prawdopodobieństwem nieskończony.

PRZYKŁAD. Niech ν będzie zmienną losową przyjmującą wartości $1, 2, \dots, +\infty$, przy czym $P(\nu < +\infty) = r$, $1 > r > 0$. Definiujemy $\xi_0 = 1$, $\xi_n = 2I_{\{\nu=n\}}$ dla $n \in N$ oraz $\mathfrak{F}_n = \sigma(\xi_0, \dots, \xi_n)$ dla $n \in N \cup \{0\}$. Rozważmy problem (S_0) dla tak określonego ciągu. Mamy tutaj

$$Z_0 = P(\xi_0 = \sup_{k \geq 0} \xi_k | \mathfrak{F}_0) = P(\nu = +\infty) = 1 - r,$$

$$Z_n = P(\xi_n = \sup_{k \geq 0} \xi_k | \mathfrak{F}_n) = P(\nu = n | \mathfrak{F}_n) = I_{\{\nu=n\}} \quad \text{dla } n \in N.$$

Optymalny moment Markowa istnieje, bo $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = 0$. Widać, że

$$\begin{aligned} \sup_{\tau \in \mathcal{F}} P(\tau < +\infty, \xi_{\tau} = \sup_{k \geq 0} \xi_k) &= \\ &= \max(P(\xi_0 = \sup_{k \geq 0} \xi_k), \sup_{\tau \geq 1} P(\tau < +\infty, \xi_{\tau} = \sup_{k \geq 0} \xi_k)) = \\ &= \max(P(\nu = +\infty), \sup_{\tau \geq 1} P(\tau < +\infty, \tau = \nu)) = \max((1-r), r). \end{aligned}$$

W konsekwencji stwierdzamy, że ν jest optymalne o ile tylko $r > 1/2$. Jest także jasne, że w tym przypadku $\nu = \tau_0$, bowiem żaden moment wcześniejszy od ν nie może być optymalny. Tak więc widzimy, że τ_0 jest tutaj optymalny, ale $P(\tau_0 = +\infty) = 1 - r > 0$.

Ten sam przykład, nieco tylko zmodyfikowany, pozwala stwierdzić jeszcze jeden interesujący fakt: Rozpatrzmy mianowicie problem (S_0) dla ciągu $(\xi_n)_{n \in N}$ przy czym ξ_n i $\mathfrak{F}_n$ są określone jak wyżej, (nie mamy teraz ξ_0 !). Załóżmy, że $P(\nu = n) > 0$ dla $n \in N \cup \{+\infty\}$. Zachodzi

$$1 > P(\xi_{\nu \wedge n} = \sup_{k \in N} \xi_k) = P(\nu \leq n) + P(\nu = +\infty) \rightarrow 1, \quad \text{gdy } n \rightarrow +\infty,$$

zatem

$$\sup_{\tau \in \mathcal{F}} P(\tau < +\infty, \xi_{\tau} = \sup_{k \in N} \xi_k) = 1.$$

W rezultacie stwierdzamy, że optymalny moment Markowa nie istnieje (łatwo sprawdzić, że i tutaj $\tau_0 = \nu$).

Tak więc widzimy, że może być tak, iż obserwowany ciąg $(\xi_n)_{n \in N}$ (tzn. ξ_n jest mierzalne wzgl. $\mathcal{F}_n$) przyjmuje z prawdopodobieństwem 1 swój kres górny, a mimo to nie istnieje moment Markowa maksymalizujący $P(\tau < +\infty, \xi_\tau = \sup_{n \in N} \xi_n)$.

II. Problem (S_0) związany z ciągiem niezależnych zmiennych losowych. Rozdział ten jest syntetycznym opracowaniem wyników prac [1], [2]. Składa się on z 4 części.

1. W pierwszej części przeprowadzimy pewne rozważania ogólne. Niech $(\xi_n)_{n \in N}$ będzie ciągiem zmiennych losowych rzeczywistych. Definiujemy

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

dla $n \in N$ i rozpatrzmy problem (S_0) dla $(\xi_n)_{n \in N}$. Przypomnijmy, że szukamy momentu Markowa τ , maksymalizującego $P(\tau < +\infty, \xi_\tau = \sup_k \xi_k)$.

Zgodnie z (1.1), mamy

$$(2.1) \quad Z_n = P(\xi_n = \sup_k \xi_k | \mathcal{F}_n) = I_{\{\xi_n = \max_{k \leq n} \xi_k\}} P(\xi_n \geq \sup_{k > n} \xi_k | \mathcal{F}_n) = \\ \stackrel{\text{def}}{=} I_{\{\xi_n = \max_{k \leq n} \xi_k\}} W_n.$$

Klasę rozważanych momentów Markowa można znacznie zmniejszyć; oznaczmy bowiem

$$(2.2) \quad \mathcal{T}_0 = \{\tau \in \mathcal{T} : \tau = n \Rightarrow \xi_n = \max_{k \leq n} \xi_k, n \in N\}.$$

Zachodzi następujący

LEMAT 2.1. Dla dowolnego $\tau \in \mathcal{T}$ istnieje $\tau' \in \mathcal{T}_0$ takie, że

$$P(\tau < +\infty, \xi_\tau = \sup_k \xi_k) \leq P(\tau' < +\infty, \xi_{\tau'} = \sup_k \xi_k).$$

D o w ó d. Zdefiniujmy $\tau' = \inf\{n : n \geq \tau, \xi_n = \max_{k \leq n} \xi_k\}$. Jest jasne, że $\tau' \in \mathcal{T}_0$ i $\tau' \geq \tau$. Z (2.1) wynika, że $Z_\tau \leq Z_{\tau'}$, bo $Z_\tau = 0$ na zbiorze $\{\tau < \tau'\}$. W rezultacie $E(Z_\tau) \leq E(Z_{\tau'})$ o co chodziło (por. (1.4)).

Z lematu wynika, że można ograniczyć się do rozpatrywania tylko momentów Markowa należących do $\mathcal{T}_0$.

Niech $\tau_1, \tau_2, \dots$ oznaczają momenty pojawienia się kolejnych „liderów” tzn. $\tau_1 = 1$,

$$(2.3) \quad \tau_{j+1} = \inf\{n : n > \tau_j, \xi_n \geq \xi_{\tau_j}\} \quad \text{dla } j \in N.$$

Oczywiście $\tau_j \in \mathcal{T}_0$ i $\tau_j \leq +\infty$ ($j \in N$).

Dla dowolnego $\tau \in \mathcal{T}_0$ zdefiniujmy $\sigma = j$ na zbiorze $\{\tau = \tau_j < +\infty\}$, $j \in N$ i $\sigma = +\infty$ na $\{\tau = +\infty\}$. Widać, że σ jest momentem Markowa względem $(\mathcal{F}_{\tau_j})_{j \in N}$ oraz (patrz (2.1)).

$$Z_\tau = \begin{cases} W_{\tau_\sigma} & \text{jeśli } \tau < +\infty, \\ 0 & \text{jeśli } \tau = +\infty. \end{cases}$$

Przypuśćmy teraz, że W_{τ_j} ma dla $\tau_j < +\infty$ postać

$$(2.4) \quad W_{\tau_j} = f(Y_j),$$

gdzie Y_j przyjmuje wartości w pewnej przestrzeni stanów E . Załóżmy, że po dołączeniu do E „stanu końcowego” ∂ i zdefiniowaniu $Y_j = \partial$ dla $\tau_j = +\infty$ ciąg $(Y_j)_{j \in N}$ jest łańcuchem Markowa względem $(\mathcal{F}_{\tau_j})_{j \in N}$, jednorodnym w czasie, przy czym ∂ jest stanem pochłaniającym. Taka właśnie sytuacja będzie we wszystkich rozważaniach niżej przykładach. Przyjmujemy $f(\partial) = 0$, $Y_\infty = \partial$ i mamy

$$(2.5) \quad Z_\tau = f(Y_\sigma)$$

dla dowolnego $\tau \in \mathcal{T}_0$ i σ zdefiniowanego jak wyżej. Dochodzimy w ten sposób do zagadnienia optymalnego stopowania łańcucha Markowa $(Y_j)_{j \in N}$ z funkcją wypłaty f (patrz [9], [13], [16]). Konstrukcję w podobnym duchu przeprowadzili Dynkin i Juszkiewicz w [9], w związku z problemem wyboru najlepszego obiektu, czyli tzw. „zagadnieniem sekretarek”.

Przypomnijmy że zagadnienie optymalnego stopowania jednorodnego łańcucha Markowa na przestrzeni stanów E (u nas jest $E \cup \{\partial\}$), z nieujemną ograniczoną funkcją wypłaty f , rozwiązuje się w sposób następujący:

Niech $P(\cdot; \cdot)$ oznacza funkcję przejścia „w jednym kroku”, tj. $P(y; \Gamma) = P(Y_{j+1} \in \Gamma | Y_j = y)$; dla dowolnej funkcji rzeczywistej h określonej na E , mierzalnej i ograniczonej definiuje się

$$(2.6) \quad Ph(y) = \int_E h(x)P(y; dx),$$

$$(2.7) \quad Qh(y) = \max(h(y), Ph(y)).$$

Niech teraz

$$(2.8) \quad f^*(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q^n f(y),$$

gdzie Q^n oznacza n -krotną iterację operatora Q ,

$$(2.9) \quad \sigma_0 = \inf\{j: f(Y_j) = f^*(Y_j)\}.$$

Jeśli $\sigma_0 < +\infty$ p.n., to σ_0 jest optymalne, tzn. $E(f(Y_{\sigma_0}))$ jest dla σ_0 maksymalne. Co więcej, σ_0 jest najmniejszą optymalną regułą stopu.

W dalszych rozważaniach będziemy korzystać z lematu stanowiącego wersję tzw. „przypadku monotonicznego” w terminologii Chowa, Robbinsa i Siegmunda w [7]:

LEMAT 2.2. Oznaczmy

$$(2.10) \quad \Gamma = \{y \in E: Pf(y) \leq f(y)\}$$

i załóżmy, że

$$(2.11) \quad P(y; \Gamma) = 1 \quad \text{dla} \quad y \in \Gamma$$

oraz

$$(2.12) \quad \sigma_\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{j: Y_j \in \Gamma\} < +\infty \text{ p.n.}$$

Wówczas σ_Γ jest optymalnym momentem Markowa dla zagadnienia stopowania łańcucha Markowa $(Y_j)_{j \in N}$ z funkcją wypłaty f .

Lemat ten jest znany (por. [6], [14]), warto chyba jednak naszkicować jego

dowód, bowiem wynika on wprost z omówionego wyżej twierdzenia o postaci optymalnej reguły stopu. Zgodnie z tym twierdzeniem, wobec założenia (2.12) wystarczy pokazać, że $\Gamma = \{y \in E: f = f^*\}$. Na zbiorze Γ zachodzi $Pf \leq f$, zatem (por. (2.7)) $Qf = f$ na Γ . Z kolei z założenia (2.11) wynika, że dla dowolnego $y \in \Gamma$ mamy

$$\begin{aligned} PQf(y) &= \int_E Qf(x) P(y; dx) = \int_{\Gamma} Qf(x) P(y; dx) = \int_{\Gamma} f(x) P(y; dx) = \\ &= Pf(y) \leq f(y) = Qf(y) \end{aligned}$$

a więc $Q^2f = Qf = f$ na Γ . Stąd przez indukcję otrzymujemy, że $f = f^*$ na Γ . Zawieranie w drugą stronę jest oczywiste, bo z nierówności $Pf(y) > f(y)$ wynika, że $f^*(y) \geq Qf(y) = Pf(y) > f(y)$, co kończy dowód lematu.

Po tych ogólnych rozważaniach możemy już przejść do konkretnych zagadnień optymalnego stopniowania.

2. Zaczniemy od przypadku najprostszego. Ustalmy $N \in \mathbb{N}$ i założmy, że

(2.13) $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, z ciągłą dystrybuantą F .

Być może warto jeszcze raz sformułować problem, który zamierzamy rozwiązać:

(S₀, 1) Znaleźć $\tau^* \in \mathcal{T}$ takie, że

$$P(\tau^* \leq N, \xi_{\tau^*} = \max_{k \leq N} \xi_k) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} P(\tau \leq N, \xi_{\tau} = \max_{k \leq N} \xi_k),$$

gdzie $\mathcal{T}$ jest klasą wszystkich momentów Markowa względem $(\mathcal{F}_n)_{n \leq N} = (\sigma(\xi_1, \dots, \xi_n))_{n \leq N}$.

A oto rozwiązanie ([2], por. także [10], gdzie analogiczny wynik jest uzyskany metodą heurystyczną).

TWIERDZENIE 2.3. Przy założeniu (2.13) rozwiązanie problemu (S₀, 1) istnieje i ma postać

$$(2.14) \quad \tau^* = \inf \{n: \xi_n = \max_{k \leq n} \xi_k, F(\xi_n) \geq x_n\},$$

gdzie $x_N = 0$, zaś dla $n < N$ liczba x_n jest jedynym należącym do przedziału $(0, 1)$ pierwiastkiem równania

$$(2.15) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \dots + \frac{1}{(N-n)x^{N-n}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N-n}.$$

D o w ó d. Zauważmy przede wszystkim, że aby mieć sytuację taką samą, jak w poprzedniej części, tzn. ciąg nieskończony, wystarczy przyjąć $\xi_n = \xi_N$ dla $n > N$; nie będzie to mieć oczywiście żadnego wpływu na rozwiązanie. Z kolei jest jasne, że wystarczy udowodnić twierdzenie w przypadku, gdy $\xi_1, \dots, \xi_N$ mają rozkład jednostajny na przedziale $[0, 1]$, bowiem $P(\xi_n \geq \xi_m \mid \mathcal{F}_n) = P(\xi_n \geq \xi_m) = 1$ dla $n, m \leq N$ zaś $F(\xi_n)$ jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$. Mamy wtedy, wykorzystując założenie o niezależności (patrz np. lemat 8.16 w [5])

$$W_n = P(\xi_n \geq \sup_{k > n} \xi_k \mid \mathcal{F}_n) = \xi_n^{(N-n)^+}$$

(por. (2.1)). Chcąc powtórzyć konstrukcję z pierwszej części definiujemy

$$(2.16) \quad Y_j = \begin{cases} (\tau_j, \xi_{\tau_j}) & \text{jeśli } \tau_j < +\infty, \\ \partial & \text{jeśli } \tau_j = +\infty, \end{cases}$$

$$f(n, x) = x^{(N-n)^+} \quad \text{dla } n \in N, x \in [0, 1] \text{ oraz } f(\partial) = 0,$$

gdzie momenty Markowa τ_j są dane przez (2.3). Oczywiście (2.4) zachodzi i łatwo widzieć, że $(Y_j)_{j \in N}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa względem $(\mathfrak{F}_{\tau_j})_{j \in N}$ o przestrzeni stanów $(N \times [0, 1]) \cup \{\partial\}$, przy czym ∂ jest stanem pochłaniającym. Istotnie, ustalmy np. $m \leq N$ i $y \in [0, 1]$ i policzmy

$$\begin{aligned} P(Y_{j+1} \in \{m\} \times [0, y] | \mathfrak{F}_{\tau_j}) &= \\ &= \sum_{n=1}^{m-1} I_{\{\tau_j=n\}} P(\tau_{j+1} = m, \xi_m \leq y | \mathfrak{F}_n) = \\ &= \sum_{n=1}^{m-1} P(\tau_j = n, \xi_{n+1} < \xi_n, \dots, \xi_{m-1} < \xi_n, \xi_n \leq \xi_m \leq y | \mathfrak{F}_n) = \\ &= \sum_{n=1}^{m-1} I_{\{\tau_j=n\}} \xi_n^{m-n-1} (y - \xi_n)^+ = \begin{cases} \xi_{\tau_j}^{m-\tau_j-1} (y - \xi_{\tau_j}) & \text{jeśli } \tau_j < m, \\ 0 & \text{jeśli } \tau_j = m. \end{cases} \end{aligned}$$

Tak więc funkcja przejścia jest dla $m \leq N$ określona wzorem

$$(2.17) \quad P(n, x; m, [0, y]) = \\ = P(\tau_{j+1} = m, \xi_m \leq y | \tau_j = n, \xi_n = x) = \\ = \begin{cases} x^{m-n-1} (y-x)^+ & \text{jeśli } n < m, \\ 0 & \text{jeśli } n \geq m. \end{cases}$$

Równie łatwo można otrzymać postać funkcji przejścia dla pozostałych stanów.

Wyznamy zbiór Γ zdefiniowany przez (2.10). Mamy (por. (2.6)) $Pf(\partial) = 0 = f(\partial)$, a więc $\partial \in \Gamma$. Z definicji $(Y_j)_{j \in N}$ i z (2.16) wynika także, iż dla $n \geq N$ mamy $Pf(n, x) = 1 = f(x, n)$, zatem $\{N, N+1, \dots\} \times [0, 1] \subset \Gamma$.

Wreszcie dla $n < N$ wzór (2.17) implikuje

$$Pf(n, x) = \sum_m \int_0^1 f(m, y) P(n, x; m, dy) = \sum_{m=n+1}^N \frac{x^{m-n-1} - x^{N-n}}{N-m+1},$$

a więc nierówność $Pf \leq f$ jest w tym przypadku równoważna nierówności

$$\sum_{m=n+1}^N \frac{x^{-N+m-1} - 1}{N-m+1} \leq 1,$$

czyli

$$\sum_{m=1}^{N-n} \frac{x^{-m} - 1}{m} \leq 1.$$

Oznaczmy lewą stronę tej nierówności przez $h_n(x)$. Funkcja h_n jest ciągła, malejąca

w przedziale $(0, 1)$ a ponadto $h_n(0+) = +\infty$ $h_n(1-) = 0$, dlatego istnieje dokładnie jedna liczba $x_n \in (0, 1)$ taka, że $h_n(x_n) = 1$ (a więc x_n jest pierwiastkiem (2.15)). Ostatecznie otrzymujemy

$$\Gamma = \{\partial\} \cup (\{N, N+1, \dots\} \times [0, 1]) \cup \bigcup_{n=1}^{N-1} (\{n\} \times [x_n, 1]).$$

Założenie (2.12) lematu 2.2 jest spełnione, bowiem

$$\sigma_T \leq \inf\{j: Y_j \in \{\partial\} \cup (\{N\} \times [0, 1])\} < +\infty.$$

Aby sprawdzić, że zachodzi również (2.11) zauważmy, że z definicji $\tau_j < \tau_{j+1}$, $\xi_{\tau_j} \leq \xi_{\tau_{j+1}}$, o ile $\tau_{j+1} < +\infty$, zatem wystarczy pokazać, że (x_n) jest ciągiem malejącym (to, że łańcuch po „wejściu” do zbioru $\{\partial\} \cup (\{N, N+1, \dots\} \times [0, 1])$ już go nie „opuszcza” jest oczywiste z definicji). Ten fakt z kolei wynika od razu z nierówności $h_{n+1}(x_n) < h_n(x_n) = 1 = h_{n+1}(x_{n+1})$. W rezultacie stosując lemat 2.2 oraz (2.5) wnioskujemy, że optymalny moment Markowa dany jest wzorem (2.14), co kończy dowód.

3. Zagadnienie omawiane w tej części jest w pewnym sensie naturalną kontynuacją problemu poprzedniego. Obserwujemy kolejne wartości nieskończonego ciągu niezależnych zmiennych losowych, przy czym za każdą obserwację płacimy stałą kwotę c . Rzeczywista wartość każdego wyniku jest więc różnicą wielkości obserwowanej i kosztu wszystkich poprzednich obserwacji. Chcemy zatrzymać proces w chwili, gdy rzeczywista wartość jest duża. Zagadnienie to oraz jego rozwiązanie jest dobrze znane ([5], [13], [12]), gdy maksymalizuje się średnią wartość rzeczywistą w momencie zatrzymania. Obecnie zamierzamy maksymalizować prawdopodobieństwo, że w momencie zatrzymania wartość rzeczywista będzie największa.

Założmy, że

(2.18) $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie z ciągłą dystrybuantą F , takich, że

$$(2.19) \quad E(\zeta_1^2) < +\infty.$$

Ustalmy $c > 0$ i zdefiniujmy dla $n \in N$

$$(2.20) \quad \xi_n = \zeta_n - nc.$$

Określamy, jak zwykle, $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sigma(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ i rozważamy problem (S_0) dla ciągu $(\xi_n)_{n \in N}$. Nazwijmy to zagadnienie problemem $(S_0, 2)$. Zauważmy przede wszystkim, że jest on sensowny, bowiem $\sup_{n \in N} \xi_n$ jest z prawdopodobieństwem 1 osiągany. Istotnie, z założenia (2.19) wynika łatwo (patrz [13] lub [5], przykład 8.3), że

$$(2.21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = -\infty \text{ p.n.}$$

Zauważmy jeszcze, że można by także rozpatrywać sytuację, w której ma się „do dyspozycji” również wszystkie „przeszłe” wyniki, tzn. badać problem:

(S₀2') Znaleźć moment Markowa względem $(\mathfrak{F}_n)_{n \in N}$, dla którego

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}} P(\tau < +\infty, \max_{k \leq \tau} \zeta_k - c\tau = \sup_{n \in N} (\max_{k \leq n} \zeta_k - cn))$$

jest osiągany.

Problem (S₀, 2') jest jednak równoważny (S₀, 2), tzn. rozwiązanie jednego z nich jest równocześnie rozwiązaniem drugiego. Fakt ten wynika z tego, że

$$\sup_{n \in N} (\zeta_n - cn) = \sup_{n \in N} (\max_{k \leq n} \zeta_k - cn).$$

Udowodnimy następujące

Twierdzenie 2.4. *Przy założeniach (2.18) i (2.19) rozwiązanie problemu (S₀, 2) (oraz (S₀, 2')) istnieje i ma postać:*

$$(2.22) \quad \tau^* = \inf\{n: \xi_n = \max_{k \leq n} \xi_k, \xi_n \geq x_n\},$$

gdzie x_n oznacza, dla $n \in N$, najmniejszy pierwiastek równania

$$(2.23) \quad \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{k=m}^{\infty} F(x+ck)} \int_{[x+cm, +\infty)} \prod_{k=1}^{\infty} F(y+ck) F(dy) = 1.$$

D o w ó d ([2]). Mamy (patrz (2.1))

$$(2.24) \quad W_n = P(\xi_n \geq \sup_{k > n} \xi_k | \mathfrak{F}_n) = \prod_{k > n} F(\xi_n + ck)$$

a więc (2.4) zachodzi dla $Y_j = (\tau_j, \xi_j)$,

$$f(n, x) = \prod_{k > n} F(x + ck), \quad \text{dla } n \in N, x \in R.$$

Rozumując analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 2.3, można sprawdzić, że po dołączeniu stanu pochłaniającego ∂ i zdefiniowaniu $Y_j = \partial$ dla $\tau_j = +\infty$, ciąg $(Y_j)_{j \in N}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa względem $(\mathfrak{F}_{\tau_j})_{j \in N}$ o przestrzeni stanów $\{\partial\} \cup (N \times R)$. Funkcja przejścia jest dana wzorem

$$P(n, x; m, (-\infty, y]) = P(\tau_{j+1} = m, \xi_m \leq y | \tau_j = n, \xi_n = x) =$$

$$= \begin{cases} \prod_{k=n+1}^{m-1} F(x+ck) (F(y+cm) - F(x+cm))^+ & \text{jeśli } n < m, \\ 0 & \text{jeśli } n \geq m, \end{cases}$$

gdzie przyjmujemy, że $\prod_{k=n+1}^{m-1} F(x+ck) = 1$ dla $m = n+1$. Przyjmujemy $f(\partial) = 0$ i mamy (por. (2.6))

$$Pf(n, x) = \sum_{m=n+1}^{\infty} \int_R f(m, y) P(n, x; m, dy) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=n+1}^{\infty} \prod_{k=n+1}^{m-1} F(x+ck) \int_{[x+cm, +\infty)} f(m, y-cm) F(dy) = \\
&= \sum_{m=n+1}^{\infty} \prod_{k=n+1}^{m-1} F(x+ck) \int_{[x+cm, +\infty)} \prod_{k=1}^{\infty} F(y+ck) F(dy) = \\
&= \sum_{m=n+1}^{\infty} \prod_{k=n+1}^{m-1} F(x+ck) \int_{[x+cm, +\infty)} f(y) F(dy),
\end{aligned}$$

gdzie $f(y) = f(0, y) = \prod_{k=1}^{\infty} F(y+ck)$.

Aby wyznaczyć zbiór Γ (patrz (2.10)) rozpatrujemy nierówność

$$(2.25) \quad \sum_{m=n+1}^{\infty} \prod_{k=n+1}^{m-1} F(x+ck) \int_{[x+cm, +\infty)} f(y) F(dy) \leq \prod_{k=n+1}^{\infty} F(x+ck).$$

Przekształcimy tę nierówność wykorzystując następujący lemat:

LEMAT 2.5. (a) Dla każdego $n \in N$ i x dostatecznie dużych mamy $f(n, x) > 0$.

(b) Dla (n, x) takich, że $f(n, x) = 0$ nierówność (2.25) nie zachodzi.

D o w ó d l e m a t u. Punkt (a) wynika z założenia (2.19) bowiem całkowalność ζ_1 powoduje że

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\zeta_1 > x+ck) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - F(x+ck)) < +\infty,$$

a więc iloczyn $\prod_{k=n+1}^{\infty} F(x+ck)$ jest zbieżny (tzn. $f(n, x) > 0$) o ile tylko $F(x+c(n+1)) \neq 0$.

Aby udowodnić (b) wystarczy pokazać, że jeśli $f(n, x) = 0$, to pierwszy składnik lewej strony nierówności (2.25) jest dodatni, tzn.

$$\int_{[x+c(n+1), +\infty)} f(y) F(dy) > 0.$$

Jak właśnie stwierdziliśmy musi zachodzić $F(x+c(n+1)) = 0$, a więc rozkład zmiennej losowej ζ_1 jest skupiony na $[x+c(n+1), +\infty)$. Ponadto, znowu na podstawie punktu (a), $\{y: f(y) = 0\} \subset \{y: F(y) = 0\}$, zatem $f(y) > 0$ prawie wszędzie ze względu na rozkład ζ_1 . Te dwa fakty łącznie powodują, że wyżej napisana całka jest dodatnia i dowód lematu jest zakończony.

Wracając do dowodu twierdzenia 2.4 dzielimy obie strony nierówności (2.25) przez $f(n, x)$. Z lematu wynika, że otrzymana nierówność

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{k=m}^{\infty} F(x+ck)} \int_{[x+cm, +\infty)} f(y) F(dy) \leq 1$$

jest równoważna (2.25). Oznaczmy lewą stronę tej nierówności przez $h_n(x)$. Funkcja h_n jest dobrze określona na przedziale $(a-c(n+1), +\infty)$, gdzie $a =$

$= \sup \{x: F(x) = 0\}$, jest nierosnąca oraz ciągła, co można łatwo sprawdzić za pomocą elementarnych oszacowań. Ponadto

$$\lim_{x \searrow a-c(n+1)} h_n(x) = +\infty, \quad \lim_{x \nearrow b-c(n+1)} h_n(x) = 0,$$

gdzie $b = \inf \{x: F(x) = 1\}$ (oczywiście $-\infty \leq a < +\infty$, $-\infty < b \leq +\infty$). Wnioskujemy stąd, że równanie $h_n(x) = 1$ ma rozwiązanie. Rozwiązaniem nierówności $h_n(x) \leq 1$ jest natomiast półprosta $[x_n, +\infty)$, gdzie $x_n = \inf \{x: h_n(x) = 1\}$. W rezultacie uwzględniając fakt, iż $Pf(\partial) = 0 = f(\partial)$, otrzymujemy

$$\Gamma = \{\partial\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\{n\} + [x_n, +\infty)).$$

Sprawdźmy, że spełnione są założenia lematu 2.2. Jasne jest, iż (2.12) zachodzi, bowiem z tego, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = -\infty$ p.n. (patrz (2.21)) wynika, iż

$$\sigma_T \leq \inf \{j: Y_j = \partial\} < +\infty \text{ p.n.}$$

Aby udowodnić (2.11) wystarczy — z analogicznych powodów, jak w poprzednim twierdzeniu — pokazać, że ciąg $(x_n)_{n \in N}$ jest nierosnący. W tym celu napiszmy

$$h_n(x_{n+1}) = \frac{1}{\prod_{k=n+1}^{\infty} F(x_{n+1} + ck)} \int_{[x_{n+1} + c(n+1), +\infty)} f(y)F(dy) + h_{n+1}(x_{n+1}).$$

Przypuśćmy, że pierwszy składnik po prawej stronie jest równy zero. W dowodzie lematu 2.5 stwierdziliśmy jednak, że f jest F -prawie wszędzie dodatnie, zatem musi być $F(x_{n+1} + c(n+1)) = 1$, czyli $x_{n+1} + c(n+1) \geq b$. Dochodzimy do sprzeczności, bowiem $x_{n+1} < b - c(n+2)$. W rezultacie otrzymujemy

$$h_n(x_{n+1}) > h_{n+1}(x_{n+1}) = 1 = h_n(x_n), \quad \text{a stąd} \quad x_{n+1} > x_n.$$

Ostatecznie, stosując lemat 2.2 i zależność (2.5) stwierdzamy, że rozwiązanie naszego problemu jest dane wzorem (2.22), co kończy dowód.

4. Obecnie powracamy do przypadku skończonego; tym razem jednak rozpatrzmy błędzenie losowe. Ustalmy dowolne $N \in N$ i załóżmy, że

(2.26) $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie symetrycznym.

Definiujemy:

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_n = \zeta_1 + \dots + \zeta_n \quad \text{dla} \quad 0 < n \leq N, \quad \mathfrak{F}_n = \sigma(\xi_0, \dots, \xi_n),$$

i rozważamy problem (S_0) dla ciągu $(\xi_n)_{n=0,1,\dots,N}$. Nazwijmy to zagadnienie *problemem* $(S_0, 3)$. Podobnie jak w części 2 można by, po trywialnej modyfikacji, rozpatrywać ciąg nieskończony, nie będziemy jednak tego robić; jest widoczne, że rozważania z części 1 pozostają w mocy i dla ciągu skończonego.

Zauważmy jeszcze, że rozpatrywane obecnie zagadnienie jest szczególnie interesujące, bowiem przy dodatkowym założeniu o całkowalności ζ_n para $(\xi_n, \mathfrak{F}_n)_{n=0,1,\dots,N}$ jest martingale; z twierdzenia Dooba (por. np. [5], tw. 2.3) wynika, że dla każdego skończonego momentu Markowa τ mamy $E(\xi_\tau) = E(\xi_0) = 0$,

a zatem każda reguła stopu jest optymalna dla klasycznego zagadnienia optymalnego stopowania ciągu $(\xi_n)_{n=0,1,\dots,N}$.

Okazuje się, że nasz problem ma także wiele rozwiązań, jednak istotnie mniej niż klasyczny. Zachodzi następujące

TWIERDZENIE 2.6. *Przy założeniu (2.26) rozwiązaniem problemu $(S_0, 3)$ jest każdy moment Markowa postaci $\min(\tau, N)$, gdzie $\tau \in \mathcal{T}_0$ (patrz (2.2)). W szczególności momenty 0 i N są optymalne.*

D o w ó d ([1]). *Krok 1°.* Określamy momenty τ_j jak w (2.3) z tym, że teraz oczywiście $\tau_0 = 0$. Zgodnie z (2.1) mamy dla $0 \leq n < N$

$$\begin{aligned} (2.27) \quad W_n &= P(\xi_n \geq \max_{N \geq k > n} \xi_k | \mathcal{F}_n) = \\ &= P(0 \geq \max_{N \geq k > n} (\xi_{n+1} + \dots + \xi_k) | \mathcal{F}_n) = \\ &= P(0 \geq \max_{N \geq k > n} (\xi_{n+1} + \dots + \xi_k)) \end{aligned}$$

wobec założenia o niezależności $\xi_1, \dots, \xi_N$. Ponadto $W_N = 1$.

Powtarzając rozumowanie z dowodu twierdzenia 2.3 łatwo sprawdzić, że po zdefiniowaniu $\partial = +\infty$, ciąg $(\tau_j)_{0 \leq j \leq N}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa względem $(\mathcal{F}_{\tau_j})_{0 \leq j \leq N}$ z przestrzenią stanów $\{0, 1, \dots, N, \partial\}$ i funkcją przejścia

$$P(n; m) = P(\tau_{j+1} = m | \tau_j = n) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } m \leq n, \\ P(\xi_m \geq 0) & \text{jeśli } m = n+1, \\ P(\max_{m > k > n} (\xi_{n+1} + \dots + \xi_k) < 0, \xi_{n+1} + \dots + \xi_m \geq 0) & \text{jeśli } m = n+2, \dots, N, \end{cases}$$

przy czym ∂ jest stanem pochłaniającym. Widzimy, że (2.4) zachodzi dla $Y_j = \tau_j$ oraz

$$f(n) = W_n \quad \text{dla } 0 \leq n \leq N, \quad f(\partial) = 0.$$

Krok 2°. Pokażemy, że dla $0 \leq n \leq N-1$,

$$(2.28) \quad Pf(n) = f(n).$$

Istotnie, z założenia o niezależności $\xi_1, \dots, \xi_N$ i symetrii rozkładów wynika bezpośrednio, że (patrz (2.27)) $f(n) = P(0 \leq \min_{N \geq k > n} (\xi_{n+1} + \dots + \xi_k))$. Z kolei, identyczność rozkładów i niezależność dają

$$(2.29) \quad f(n) = P(0 \leq \min_{N \geq k > n} (\xi_k + \dots + \xi_N)).$$

Stąd, znowu korzystając z niezależności otrzymujemy dla $m = n+2, \dots, N$:

$$\begin{aligned} P(n; m)f(m) &= \\ &= P(\max_{m > k > n} (\xi_{n+1} + \dots + \xi_k) < 0, \xi_{n+1} + \dots + \xi_m \geq 0) P(\min_{N \geq k > m} (\xi_k + \dots + \xi_N) \geq 0) \\ &= P(\max_{m > k > n} (\xi_{n+1} + \dots + \xi_k) < 0, \xi_{n+1} + \dots + \xi_m \geq 0, \min_{N \geq k > m} (\xi_k + \dots + \xi_N) \geq 0) \\ &= P(\max_{m > k > n} (\xi_{n+1} + \dots + \xi_k) < 0, \xi_{n+1} + \dots + \xi_m \geq 0, \min_{N \geq k > n} (\xi_k + \dots + \xi_N) \geq 0), \end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wynika z tego, że nierówności

$$\max_{m > k > n} (\zeta_{n+1} + \dots + \zeta_k) < 0, \quad \zeta_{n+1} + \dots + \zeta_m \geq 0$$

implikują

$$\zeta_m \geq 0, \zeta_{m-1} + \zeta_m \geq 0, \dots, \zeta_{n+1} + \dots + \zeta_m \geq 0.$$

Analogicznie przekształcamy $P(n; n+1)f(n+1)$ oraz $P(n; N)f(N)$ i otrzymujemy

$$\begin{aligned} Pf(n) &= \sum_{m=n+1}^N P(n; m)f(m) = P(\{\zeta_{n+1} \geq 0\} \cap \{\min_{N \geq k > n} (\zeta_k + \dots + \zeta_N) \geq 0\}) + \\ &+ \sum_{m=n+2}^{N-1} P(\{\max_{m > k > n} (\zeta_{n+1} + \dots + \zeta_k) < 0, \zeta_{n+1} + \dots + \zeta_m \geq 0\} \cap \\ &\quad \cap \{\min_{N \geq k > n} (\zeta_k + \dots + \zeta_N) \geq 0\}) + \\ &+ P(\{\max_{N > k > n} (\zeta_{n+1} + \dots + \zeta_k) < 0, \zeta_{n+1} + \dots + \zeta_N \geq 0\} \cap \\ &\quad \cap \{\min_{N \geq k > n} (\zeta_k + \dots + \zeta_N) \geq 0\}) = f(n) \end{aligned}$$

na podstawie (2.29). Z (2.28), wobec faktu, że $Pf(N) = 0 < 1 = f(N)$ wynika, że zbiór Γ z lematu 2.2 jest całą przestrzenią stanów, a więc $\sigma_\Gamma = 0$. W rezultacie stwierdzamy, że $\tau = 0$ jest rozwiązaniem problemu $(S_0, 3)$.

Krok 3°. Pokażemy, że każdy moment Markowa σ , względem $(\mathfrak{F}_{\tau_j})_{0 \leq j \leq N}$, taki że:

(a) $\tau_j < +\infty$ na zbiorze $\{\sigma = j\}$ ($j = 0, 1, \dots, N$);

(b) $\tau_j \neq N$ dla $j = 0, 1, \dots, N$ na zbiorze $\{\sigma = +\infty\}$

jest optymalny dla zagadnienia optymalnego stopowania łańcucha $(\tau_j)_{0 \leq j \leq N}$ z funkcją wypłaty f .

Wystarczy w tym celu pokazać, że $E(f(\tau_\sigma)) = E(f(\tau_0)) (= f(0))$, bo jak właśnie udowodniliśmy, $\sigma_\Gamma = 0$ jest optymalny. Z założenia (b) wynika, że

$$f(\tau_{\sigma \wedge N}) = \begin{cases} f(\tau_\sigma), & \text{gdy } \sigma \leq N \\ f(\tau_N), & \text{gdy } \sigma = +\infty \end{cases} = \begin{cases} f(\tau_\sigma), & \text{gdy } \sigma \leq N \\ 0, & \text{gdy } \sigma = +\infty \end{cases} = f(\tau_\sigma),$$

bowiem τ_N może przyjmować tylko wartość N albo $+\infty$. W rezultacie wystarczy udowodnić, że dla $j = 0, 1, \dots, N-1$

$$(2.30) \quad E(f(\tau_{\sigma \wedge j})) = E(f(\tau_{\sigma \wedge (j+1)})).$$

Mamy

$$\begin{aligned} E(f(\tau_{\sigma \wedge (j+1)})) &= E(f(\tau_\sigma)I_{\{\sigma \leq j\}}) + E(f(\tau_{j+1})I_{\{\sigma > j\}}) = \\ &= E(f(\tau_\sigma)I_{\{\sigma \leq j\}}) + E(I_{\{\sigma > j\}}E(f(\tau_{j+1})|\mathfrak{F}_{\tau_j})). \end{aligned}$$

Z (2.28) wynika, że

$$E(f(\tau_{j+1})|\mathfrak{F}_{\tau_j}) = I_{\{\tau_j < N\}}f(\tau_j).$$

Z kolei, łatwo sprawdzić, że

$$I_{\{\sigma > j\}}I_{\{\tau_j < N\}}f(\tau_j) = I_{\{\sigma > j\}}f(\tau_j).$$

Istotnie, równość ta zachodzi oczywiście na zbiorze $\{\tau_j < N\} \cup \{\tau_j = +\infty\}$. Zachodzi ona również na $\{\tau_j = N\}$, gdyż z założeń (a) i (b) wynika, że zbiór $\{\sigma > j\} \cap \{\tau_j = N\}$ jest pusty (z tego, że $\tau_j = N$ wynika, iż $\tau_i = +\infty$ dla $i > j$, zatem na podstawie (a), jeśli $\sigma > j$, to $\sigma = +\infty$ a to stanowi sprzeczność z (b)).

W konsekwencji otrzymujemy

$$E(f(\tau_{\sigma \wedge (j+1)})) = E(f(\tau_\sigma)I_{\sigma < j}) + E(f(\tau_j)I_{\{\sigma > j\}}) = E(f(\tau_{\sigma \wedge j})),$$

a więc równość (2.30) jest udowodniona.

Krok 4°. Dla dowolnego $\tau \in \mathcal{T}_0$ definiujemy $\sigma = j$ na zbiorze $\{\tau = \tau_j \leq N\} \cup \{\tau = +\infty, \tau_j = N\}$ dla $j = 0, 1, \dots, N$, $\sigma = +\infty$ na zbiorze $\{\tau = +\infty, \sigma_j \neq N$ dla $j = 0, 1, \dots, N\}$. Widać, że σ jest momentem Markowa względem $(\mathcal{F}_{\tau_j})_{0 \leq j \leq N}$ spełniającym (a) i (b). Ponadto $P(\xi_{\tau \wedge N} = \max_{0 \leq k \leq N} \xi_k) = E(f(\tau \wedge N)) = E(f(\tau_\sigma))$,

a więc $\tau \wedge N$ jest optymalny dla $(S_0, 3)$ na podstawie rozważań przeprowadzonych w kroku 3°. Dla całkowitego zakończenia dowodu twierdzenia wystarczy jeszcze zauważyć, że $\tau_N \wedge N = N$ zatem N jest też optymalny.

Warto chyba zastanowić się jeszcze nad rolą założenia o symetrii rozkładów ζ_n . Problem $(S_0, 3)$ można sformułować oczywiście i bez tego założenia, a następnie, powtarzając rozumowanie z kroku 1° dowodu, sprowadzić go do zagadnienia stopowania łańcucha Markowa. Symetria rozkładów była w istotny sposób wykorzystana w kroku 2°. Okazuje się, że założenia o symetrii nie można zastąpić założeniem $E(\zeta_n) = 0$ (mimo, że $(\xi_n, \mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ nadal byłby martyngałem). Co ciekawsze, może być nawet tak, że $E(\zeta_n) < 0$, czyli $(\xi_n, \mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ jest nadmartyngałem i $E(\xi_\tau) < E(\xi_0) = 0$ dla każdego $\tau \in \mathcal{T}$, a jednak najmniejsza optymalna reguła stopu dla problemu $(S_0, 3)$ jest ściśle dodatnia. Aby się o tym przekonać rozpatrzmy następujący

PRZYKŁAD. Załóżmy, że $\zeta_1, \dots, \zeta_N$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, takim, że

$$\max_{1 \leq k \leq N} (\zeta_1 + \dots + \zeta_k) < 0 \text{ prawie na pewno na zbiorze } \{\zeta_1 < 0\}.$$

Niech $P(\zeta_n < 0) = p = 1 - P(\zeta_n > 0)$, przy czym $(1-p)^N > p$. Stosując oznaczenia takie same, jak w dowodzie twierdzenia 2.6 mamy teraz (patrz (2.27)):

$$f(n) = P(\zeta_{n+1} \leq 0) = p \quad \text{dla } n < N, \quad f(N) = 1.$$

$P(n; n+1) = P(\zeta_{n+1} \geq 0) = 1-p$, $P(n; m) = 0$ dla $m \neq n+1$, ($n < N$) i stan $\partial = +\infty$ jest pochłaniający.

Wyznamy funkcję f^* zdefiniowaną przez (2.8). Z (2.7) i (2.8) wynika łatwo (patrz np. [13], [16]), że f^* spełnia równanie

$$(2.31) \quad f^* = \max(f, Pf^*).$$

Ponadto, bezpośrednio z definicji f^* wynika, że $f^*(\partial) = 0$, zatem $Pf^*(N) = 0$, a stąd i z (2.31) $f^*(N) = f(N) = 1$. Jeżeli $n < N$, to

$$Pf^*(n) = f^*(n+1)P(n; n+1) = f^*(n+1)(1-p)$$

a zatem, przez indukcję, $Pf^*(N-k) = (1-p)^k > p = f(N-k)$, czyli $f^*(N-k) = (1-p)^k$ na podstawie (2.31) ($k = 1, \dots, N$). W rezultacie $f^*(n) > f(n)$ dla $n < N$, a więc optymalny moment σ_0 (patrz (2.9)) dla stopowania łańcucha Markowa jest postaci

$$\sigma_0 = \inf \{j \leq N: \tau_j \in \{N, \partial\}\}.$$

Widać stąd, że najmniejszą optymalną regułą stopu dla problemu $(S_0, 3)$ jest tutaj: czekać do końca, chyba że wcześniej pojawi się ζ_n ujemne.

III. Zagadnienie rozregulowania.

1. Interpretacja tego zagadnienia została omówiona we wstępie, dlatego przystąpimy od razu do ścisłego sformułowania problemu.

Założmy, że w pewnej ustalonej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ są określone niezależne zmienne losowe $\theta, \eta_1^{(1)}, \eta_2^{(1)}, \dots, \eta_1^{(2)}, \eta_2^{(2)}, \dots$ o znanych rozkładach, przy czym

1° $\eta_1^{(1)}, \eta_2^{(1)}, \dots$ przyjmują wartości w pewnej przestrzeni mierzalnej $(E, \mathfrak{B})$ i mają ten sam rozkład μ_1 ;

2° $\eta_1^{(2)}, \eta_2^{(2)}, \dots$ przyjmują wartości w $(E, \mathfrak{B})$ i mają ten sam rozkład μ_2 ;

3° θ przyjmuje tylko wartości naturalne.

Dla $n \in N$ definiujemy

$$(3.1) \quad \eta_n(\omega) = \begin{cases} \eta_n^{(1)}(\omega) & \text{jeśli } n < \theta(\omega), \\ \eta_n^{(2)}(\omega) & \text{jeśli } n \geq \theta(\omega), \end{cases}$$

$$\mathfrak{F}_n = \sigma(\eta_1, \dots, \eta_n).$$

Niech $\mathcal{T}$ oznacza jak zwykle klasę wszystkich momentów Markowa względem $(\mathfrak{F}_n)_{n \in N}$. Dla dowolnego ustalonego $m \in N \cup \{0\}$ rozpatrujemy następujący problem:

(D_m) Znaleźć $\tau^* \in \mathcal{T}$ takie, że

$$P(|\theta - \tau^*| \leq m) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} P(|\theta - \tau| \leq m).$$

Zauważmy przede wszystkim, że (D_m) jest szczególnym przypadkiem problemu (G) omówionego w rozdziale I. Istotnie, wystarczy w tym celu zdefiniować $\xi_n = n$ dla $n \in N$ oraz $B(\omega) = [\theta(\omega) - m, \theta(\omega) + m]$.

2. Znajdziemy rozwiązanie problemu (D_m) przy dodatkowym naturalnym założeniu, że rozkład $\eta_1^{(2)}$ jest absolutnie ciągły względem rozkładu $\eta_1^{(1)}$ oraz że θ ma rozkład geometryczny. Sytuację ogólniejszą przedyskutujemy później.

Dla skrócenia zapisu w poniższych dwu twierdzeniach sformułujemy rozwiązanie problemów (D₀) i (D₁). Rozwiązanie (D_m) dla $m > 1$ otrzyma się przez łatwą analogię.

TWIERDZENIE 3.1 ([4]). Założmy, że μ_2 jest absolutnie ciągła względem μ_1 i oznaczmy

$$(3.2) \quad g = \frac{d\mu_2}{d\mu_1}, \quad v = \mu_1 \circ g^{-1}$$

(tzn. ν jest rozkładem zmiennej losowej $g(\eta_1^{(1)})$). Załóżmy ponadto, że

$$(3.3) \quad P(\theta = n) = p^{n-1}(1-p)$$

dla $n \in \mathbb{N}$ i ustalonego $p \in (0, 1)$. Wówczas

(a) Rozwiązanie problemu (D_0) istnieje, jest skończone p.n. i ma postać

$$(3.4) \quad \tau^* = \inf\{n: g(\eta_n) \geq r^*\},$$

gdzie $r^* = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$, zaś

$$(3.5) \quad r_1 = p, \quad r_{n+1} = p \int \max(u, r_n) \nu(du), \quad n \in \mathbb{N}$$

(a więc r^* jest rozwiązaniem równania

$$(3.6) \quad r^* = p \int \max(u, r^*) \nu(du));$$

(b) Maksymalne prawdopodobieństwo prawidłowej detekcji dla problemu (D_0) jest równe

$$(3.7) \quad P(\theta = \tau^*) = \frac{1-p}{p} r^*.$$

TWIERDZENIE 3.2 ([4]). Przy założeniach takich samych jak w twierdzeniu poprzednim:

(a) Rozwiązanie problemu (D_1) istnieje, jest skończone prawie na pewno i ma postać

$$(3.8) \quad \tau^* = \inf\{n: n > 1, (g(\eta_n), g(\eta_n)g(\eta_{n-1})) \in \Delta\},$$

gdzie

$$(3.9) \quad \Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \geq p \int r^*(u, xu) \nu(du) - px - p^2\},$$

przy czym $r^*(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x, y)$, zaś

$$(3.10) \quad \begin{aligned} r_1(x, y) &= p^2 + px + y, \\ r_{n+1}(x, y) &= \max\left(r_1(x, y), p \int r_n(u, xu) \nu(du)\right) \end{aligned}$$

dla $n \in \mathbb{N}$ (a więc r^* jest rozwiązaniem równania

$$(3.11) \quad r^*(x, y) = \max\left(p^2 + px + y, p \int r^*(u, xu) \nu(du)\right);$$

(b) Maksymalne prawdopodobieństwo dla problemu (D_1) jest równe

$$(3.12) \quad P(|\theta - \tau^*| \leq 1) = \frac{1-p}{p^2} r^*(0, 0).$$

Widzimy więc, że rozwiązując problem (D_0) albo (D_1) wystarczy brać pod uwagę tylko „ostatnie” wartości η (dla (D_0)) albo „ostatnie i przedostatnie” (dla (D_1)). Nie trzeba np. obliczać warunkowego rozkładu θ ; było to konieczne dla rozwiązania zagadnienia rozregulowania w sformułowaniu rozpatrywanym przez Szirajewa w [16], [17].

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$(3.13) \quad \zeta_n = g(\eta_n)$$

$$(3.14) \quad \pi_n = P(\theta \leq n | \mathfrak{F}_n) \quad \text{dla} \quad n \in N.$$

Zanim udowodnimy twierdzenia 3.1 i 3.2, sformułujemy lemat zawierający wszystkie potrzebne wzory rachunkowe.

LEMAT 3.3. Dla $k, n \in N$ i dowolnej borelowskiej funkcji $h: R_+ \rightarrow R_+$ zachodzą wzory:

$$(3.15) \quad P(\theta > k | \mathfrak{F}_n) = \begin{cases} \frac{p^k}{(1-p) \sum_{i=1}^n p^{i-1} \zeta_n \zeta_{n-1} \dots \zeta_i + p^n} & \text{jeśli} \quad k \geq n, \\ \frac{(1-p) \sum_{i=k+1}^n p^{i-1} \zeta_n \zeta_{n-1} \dots \zeta_i + p^n}{(1-p) \sum_{i=1}^n p^{i-1} \zeta_n \zeta_{n-1} \dots \zeta_i + p^n} & \text{jeśli} \quad k < n, \end{cases}$$

$$(3.16) \quad E(h(\zeta_{n+1}) | \mathfrak{F}_n) = \int h(u) (u(1-p(1-\pi_n)) + p(1-\pi_n)) \nu(du),$$

$$(3.17) \quad E(h(\zeta_{n+1})(1-\pi_{n+1}) | \mathfrak{F}_n) = p(1-\pi_n) \int h(u) \nu(du).$$

D o w ó d l e m a t u 3.3. Ze wzoru Bayesa (patrz np. [19], str. 302), wynika, że

$$P(\theta = k | \mathfrak{F}_n) = \begin{cases} \frac{P(\theta = k)}{\sum_{i=1}^n P(\theta = i) g(\eta_n) \dots g(\eta_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(\theta = i)} & \text{jeśli} \quad k > n, \\ \frac{P(\theta = k) g(\eta_n) \dots g(\eta_k)}{\sum_{i=1}^n P(\theta = i) g(\eta_n) \dots g(\eta_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(\theta = i)} & \text{jeśli} \quad k \leq n, \end{cases}$$

a stąd po uwzględnieniu (3.3) i (3.13) wynika od razu (3.15). Aby wyprowadzić (3.16) zauważmy, że $\mathfrak{F}_n \subset \sigma(\theta, \eta_1^{(1)}, \dots, \eta_n^{(1)}, \eta_1^{(2)}, \dots, \eta_n^{(2)})$, co łącznie z (3.1) implikuje

$$\begin{aligned} E(h(\zeta_{n+1}) | \mathfrak{F}_n) &= E(E(h(g(\eta_{n+1})) | \theta, \eta_1^{(1)}, \dots, \eta_n^{(1)}, \eta_1^{(2)}, \dots, \eta_n^{(2)}) | \mathfrak{F}_n) = \\ &= E(I_{\{\theta \leq n+1\}} E(h(g(\eta_{n+1}^{(2)})) | \theta, \eta_1^{(1)}, \dots, \eta_n^{(1)}, \eta_1^{(2)}, \dots, \eta_n^{(2)}) | \mathfrak{F}_n) + \\ &\quad + E(I_{\{\theta > n+1\}} E(h(g(\eta_{n+1}^{(1)})) | \theta, \eta_1^{(1)}, \dots, \eta_n^{(1)}, \eta_1^{(2)}, \dots, \eta_n^{(2)}) | \mathfrak{F}_n). \end{aligned}$$

Zmienne losowe $\eta_{n+1}^{(1)}$ i $\eta_{n+1}^{(2)}$ są niezależne od $\sigma(\theta, \eta_1^{(1)}, \dots, \eta_n^{(1)}, \eta_1^{(2)}, \dots, \eta_n^{(2)})$, zatem otrzymane wyrażenie jest równe

$$\begin{aligned} E(h(g(\eta_{n+1}^{(2)})) P(\theta \leq n+1 | \mathfrak{F}_n) + E(h(g(\eta_{n+1}^{(1)})) P(\theta > n+1 | \mathfrak{F}_n) = \\ = \int h(u) u \nu(du) (1 - P(\theta > n+1 | \mathfrak{F}_n)) + \int h(u) \nu(du) P(\theta > n+1 | \mathfrak{F}_n) \end{aligned}$$

na podstawie (3.2). Z (3.15) wynika, że $P(\theta > n+1 | \mathfrak{F}_n) = p(1-\pi_n)$, dochodzimy zatem do wzoru (3.16). Wreszcie, aby udowodnić (3.17), wystarczy zauważyć, że z (3.15) wynika łatwo, iż

$$(3.18) \quad 1 - \pi_{n+1} = \frac{p(1-\pi_n)}{\zeta_{n+1}(1-p(1-\pi_n)) + p(1-\pi_n)}$$

a następnie skorzystać z (3.16). Dowód lematu jest zakończony.

D o w ó d t w i e r d z e n i 3.1 i 3.2. Przedstawimy tylko dowód twierdzenia 3.2. Dowód twierdzenia 3.1 przebiega analogicznie.

Zgodnie z (1.1) badamy

$$Z_n = P(|\theta - n| \leq 1 | \mathfrak{F}_n).$$

Zauważmy przede wszystkim, że wystarczy brać pod uwagę tylko momenty Markowa $\tau \in \mathcal{T}$, $\tau \geq 2$, czyli stopować ciąg $(Z_n)_{n=2,3,\dots}$. Jest tak dlatego, że dla dowolnego $\tau \in \mathcal{T}$ zachodzi

$$P(|\theta - \tau| \leq 1) \leq P(|\theta - \max(\tau, 2)| \leq 1).$$

Ze wzoru (3.15) i z definicji π_n (patrz (3.14)) wynika bezpośrednio, że

$$(3.19) \quad Z_n = \frac{1-p}{p^2} (1-\pi_n)(p^2 + p\zeta_n + \zeta_n\zeta_{n-1})$$

dla $n \geq 2$, czyli

$$Z_n = f(\pi_n, \zeta_n, \zeta_n\zeta_{n-1}),$$

gdzie

$$(3.20) \quad f(v, x, y) = \frac{1-p}{p^2} (1-v)(p^2 + px + y).$$

Nie trudno się przekonać, że $(\pi_n, \zeta_n, \zeta_n\zeta_{n-1})_{n=2,3,\dots}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa względem σ -ciała $(\mathfrak{F}_n)_{n=2,3,\dots}$. Rzeczywiście, z (3.18) i z (3.16) wynika, że dla dowolnej borelowskiej, nieujemnej funkcji h

$$E(h(\pi_{n+1}, \zeta_{n+1}, \zeta_{n+1}\zeta_n)) = h^1(\pi_n, \zeta_n),$$

gdzie (borelowska) funkcja h^1 nie zależy od n . W istocie korzystamy tu z lekkiego wzmocnienia równości (3.16), gdyż funkcja, której warunkową wartość oczekiwaną liczymy, zależy — oprócz ζ_{n+1} — także od ζ_n i π_n . Dowód odpowiedniego wzoru przebiega jednak bez zmian i w tej ogólniejszej sytuacji; trzeba skorzystać tylko z elementarnych własności warunkowych wartości oczekiwanych (patrz np. lemat 8.16 w [5]).

Widzimy więc, że nasz problem sprowadza się do zagadnienia optymalnego stopowania łańcucha Markowa $(\pi_n, \zeta_n, \zeta_n\zeta_{n-1})_{n=2,3,\dots}$ z funkcją wypłaty daną przez (3.20). Okazuje się, że w rozważanym przypadku nietrudno znaleźć postać

funkcji f^* zdefiniowanej przez (2.8). Z (3.17) wynika, że

$$\begin{aligned} Pf(v, x, y) &= E(f(\pi_{n+1}, \zeta_{n+1}, \zeta_{n+1} \zeta_n) | \pi_n = v, \zeta_n = x, \zeta_n \zeta_{n-1} = y) = \\ &= E\left(\frac{1-p}{p^2} (1-\pi_{n+1})(p^2 + p\zeta_{n+1} + \zeta_{n+1} \zeta_n) | \mathfrak{F}_n\right) \Big|_{\pi_n=v, \zeta_n=x, \zeta_n \zeta_{n-1}=y} = \\ &= \frac{1-p}{p^2} (1-v)p \int (p^2 + pu + xu)v(du). \end{aligned}$$

Stąd (patrz (2.7)),

$$Qf(v, x, y) = \frac{1-p}{p^2} (1-v) \max\left(p^2 + px + y, p \int (p^2 + pu + xu)v(du)\right).$$

Z kolei wykorzystujemy znaną równość (patrz np. [16], tw. II. 1)

$$Q^{n+1}f = \max(f, PQ^n f),$$

definiujemy $r_n(x, y)$ wzorem (3.10) i po zastosowaniu (3.17) otrzymujemy przez indukcję

$$Q^n f(v, x, y) = \frac{1-p}{p^2} (1-v) r_{n+1}(x, y).$$

W rezultacie

$$(3.21) \quad f^*(v, x, y) = \frac{1-p}{p^2} (1-v) \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x, y) = \frac{1-p}{p^2} (1-v) r^*(x, y),$$

a więc

$$\begin{aligned} \{(v, x, y) \in (0, 1) \times R_+ \times R_+ : f(v, x, y) = f^*(v, x, y)\} = \\ = (0, 1) \times \{(x, y) \in R_+^2 : p^2 + px + y = r^*(x, y)\}. \end{aligned}$$

Z (3.10) wynika natychmiast równość (3.11), zatem

$$\{f = f^*\} = (0, 1) \times \Delta,$$

gdzie Δ jest zdefiniowane przez (3.9).

Aby wiedzieć, że moment Markowa τ^* zdefiniowany przez (3.8) jest optymalny, wystarczy (por. twierdzenie 1.1 i (2.9)) udowodnić, że jest on z prawdopodobieństwem 1 skończony. Oznaczmy w tym celu

$$a = \inf\{x : P(g(\eta_1^{(2)}) \leq x) = 1\}.$$

Przypuśćmy najpierw, że $a < +\infty$. Wówczas $\zeta_n \leq a$ p.n. dla $n \in \mathbb{N}$, bowiem (patrz (3.2))

$$0 = P(g(\eta_n^{(2)}) > a) \geq a\mu_1(g > a) = aP(g(\eta_n^{(1)}) > a).$$

Widzimy ponadto, że miara ν jest skoncentrowana na $[0, a]$. Wnioskujemy stąd, że

$$p^2 + p\zeta_n \zeta_{n-1} \leq p^2 + pa + a^2 \text{ p.n.}$$

oraz

$$p \int (p^2 + pu + \zeta_n u) \nu(du) \leq p(p^2 + pa + a^2) \text{ p.n.}$$

a z tego, na podstawie wzorów (3.10), przez łatwą indukcję

$$(3.22) \quad p \int r^*(u, \zeta_n u) \nu(du) \leq p(p^2 + pa + a^2) \text{ p.n.}$$

Z niezależności wynika, że zmienne losowe $p^2 + p\zeta_n + \zeta_n \zeta_{n-1}$ będą z prawdopodobieństwem 1 przyjmować dla pewnych n wartości dowolnie bliskie $p^2 + pa + a^2$, a więc większe od $p(p^2 + pa + a^2)$. W konsekwencji z (3.22) i z definicji τ^* wnioskujemy, że $\tau^* < +\infty$ p.n.

W przypadku, gdy $a = +\infty$ rozumowanie jest podobne. Dla $n \geq \theta$ zachodzi $\zeta_n = g(\eta_n^{(2)})$, zaś zmienne losowe $g(\eta_1^{(2)})$, $g(\eta_2^{(2)})$, ... są niezależne i przyjmują wartości dowolnie duże, zatem

$$g(\eta_n^{(2)})g(\eta_{n-1}^{(2)}) \geq p \int r^*(u, g(\eta_n^{(2)})u) \nu(du)$$

dla nieskończenie wielu n prawie na pewno. W rezultacie $\tau^* < +\infty$ p.n. i dowód części (a) twierdzenia 3.2 jest zakończony.

Wzór (3.12) udowodnimy korzystając ze znanego faktu (patrz np. [16], tw. II.3), że wartość funkcji f^* w danym punkcie jest równa maksymalnej średniej „wypłacie” dla łańcucha startującego z tego punktu. Na podstawie (3.21) mamy zatem

$$\begin{aligned} P(|\theta - \tau^*| \leq 1) &= E(f^*(\pi_2, \zeta_2, \zeta_2 \zeta_1)) = \\ &= \frac{1-p}{p^2} E((1-\pi_2)r^*(\zeta_2, \zeta_2 \zeta_1)) = \\ &= \frac{1-p}{p^2} E(P(\theta \geq 3 | \mathfrak{F}_2) r^*(\zeta_2, \zeta_2 \zeta_1)) = \\ &= \frac{1-p}{p^2} E(I_{\{\theta \geq 3\}} r^*(g(\eta_2^{(1)}), g(\eta_2^{(1)})g(\eta_1^{(1)}))) = \\ &= \frac{1-p}{p^2} P(\theta \geq 3) E\left(\int r^*(u, g(\eta_1^{(1)})u) \nu(du)\right). \end{aligned}$$

Skorzystaliśmy tu oczywiście z niezależności zmiennych losowych θ , $\eta_1^{(1)}$, $\eta_2^{(1)}$. Z kolei zauważmy, że na podstawie (3.11)

$$p \int r^*(u, xu) \nu(du) \geq p \int (p^2 + pu + xu) \nu(du) = p(p^2 + p + x) > p^2 + px$$

Stąd i z (3.11)

$$r^*(x, 0) = \max(p^2 + px, p \int r^*(u, xu) \nu(du)) = p \int r^*(u, xu) \nu(du).$$

W konsekwencji, korzystając dwukrotnie z tej równości, po uwzględnieniu (3.3) mamy

$$\begin{aligned}
 P(|\theta - \tau^*| \leq 1) &= \frac{1-p}{p} E(r^*(g(\eta_1^{(1)}), 0)) = \\
 &= \frac{1-p}{p} \int r^*(u, 0) \nu(du) = \frac{1-p}{p^2} r^*(0, 0),
 \end{aligned}$$

co kończy dowód twierdzenia.

3. Jako przykład rozwiążemy problem (D_0) w przypadku, gdy $\eta_n^{(1)}$ i $\eta_n^{(2)}$ mają rozkłady wykładnicze. Załóżmy więc, że $\eta_n^{(1)}$ ma rozkład wykładniczy z parametrem λ_1 , zaś $\eta_n^{(2)}$ — rozkład wykładniczy z parametrem λ_2 , przy czym $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Aby znaleźć r^* , rozwiążemy równanie (3.6). Ma ono teraz postać

$$(3.23) \quad r^* = p \int_0^{\infty} \max \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)u}, r^* \right) \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} du.$$

Oznaczmy

$$(3.24) \quad c(r^*) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \log \frac{\lambda_1}{\lambda_2} r^*.$$

Założmy najpierw, że $\lambda_2 > \lambda_1$. Musi być wtedy $c(r^*) > 0$, bo w przeciwnym przypadku prawa strona równania (3.23) byłaby równa $p \int_0^{+\infty} r^* \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} du = pr^*$, a więc $r^* \neq 0$ nie spełniałoby tego równania. Widzimy zatem, że $p \leq r^* < \lambda_2/\lambda_1$. Prawa strona równania (3.23) jest równa

$$\begin{aligned}
 p \int_0^{c(r^*)} \lambda_2 e^{-\lambda_2 u} du + p \int_{c(r^*)}^{+\infty} r^* \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} du = \\
 = p - p \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} r^* \right)^{\lambda_2/(\lambda_2 - \lambda_1)} + pr^* \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} r^* \right)^{\lambda_1/(\lambda_2 - \lambda_1)}.
 \end{aligned}$$

Oznaczmy

$$\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Równanie (3.23) ma teraz postać

$$(3.25) \quad p\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}(\alpha-1)(r^*)^{\alpha/(\alpha-1)} - r^* + p = 0.$$

Za pomocą elementarnej analizy stwierdzamy, że równanie to ma w przedziale $[p, \alpha]$ dokładnie jeden pierwiastek; pierwiastkiem tym musi być więc r^* .

Założmy teraz, że $\lambda_2 < \lambda_1$. Mogą zajść dwa przypadki: $c(r^*) \leq 0$ albo $c(r^*) > 0$.

Jeżeli $c(r^*) \leq 0$, czyli $r^* \leq \alpha$, to (3.23) ma postać $r^* = p \int_0^{+\infty} \lambda_2 e^{-\lambda_2 u} du$. Równanie (3.23) ma zatem rozwiązanie w przedziale $[0, \alpha]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p \leq \alpha$ i wówczas to rozwiązanie jest równe p . Gdy $c(r^*) > 0$, tzn. $r^* > \alpha$, (3.23) ma postać

$$r^* = p \int_0^{c(r^*)} r^* \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} du + p \int_{c(r^*)}^{+\infty} \lambda_2 e^{-\lambda_2 u} du$$

skąd mamy

$$r^* = p \left(\frac{1-\alpha}{1-p} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{\alpha}{p} \right)^\alpha.$$

Łatwo sprawdzić, że ta liczba należy do przedziału $(\alpha, +\infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p > \alpha$.

W rezultacie dla każdego α mamy jednoznaczne rozwiązanie równania (3.23) i po zastosowaniu twierdzenia 3.1 dochodzimy do następującego twierdzenia:

Twierdzenie 3.4. *Jeżeli zmienne losowe $\eta_1^{(1)}, \eta_2^{(1)}, \dots$ mają wartości rzeczywiste o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ_1 , zmienne losowe $\eta_1^{(2)}, \eta_2^{(2)}, \dots$ mają rozkład wykładniczy z parametrem $\alpha\lambda_1 (\alpha \neq 1)$, zaś rozkład θ jest dany przez (3.3), to rozwiązaniem problemu (D_0) jest*

$$\tau^* = \inf \left\{ n: \lambda_1(1-\alpha)\eta_n \geq \log \frac{r^*}{\alpha} \right\},$$

gdzie

$$r^* = \begin{cases} \text{jedynie w przedziale } [p, \alpha] \\ \text{rozwiązanie równania (3.25),} & \text{gdy } \alpha > 1, \\ p, & \text{gdy } p \leq \alpha < 1, \\ p \left(\frac{1-\alpha}{1-p} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{\alpha}{p} \right), & \text{gdy } \alpha < p. \end{cases}$$

Zauważmy, że jeżeli $p \leq \alpha < 1$, to $\tau^* = 1$.

Łatwo także sprawdzić, że jeśli μ_1 i μ_2 „bardzo się różnią”, tzn. $\alpha \rightarrow 0$ albo $\alpha \rightarrow \infty$, to maksymalne prawdopodobieństwo wykrycia momentu rozregulowania, dane wzorem (3.7), dąży do 1.

4. Na zakończenie tego rozdziału zastanowimy się nad uogólnieniem zagadnienia omawianego w części 2. Załóżmy mianowicie, że zmienne losowe $\eta_1^{(1)}, \eta_2^{(1)}, \dots, \eta_1^{(2)}, \eta_2^{(2)}, \dots$ spełniają (3.2), natomiast

$$P(\theta = n) = p_n \quad \text{dla } n \in N,$$

przy czym $s_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k > 0$ dla $n \in N$. Rozważmy teraz np. problem (D_1) . Oka-

zuje się, że i tutaj można zagadnienie sprowadzić do stopowania łańcucha Markowa.

Przez bezpośrednie uogólnienie lematu 3.3 otrzymujemy (por. (3.19))

$$P(|\theta - n| \leq 1 | \mathfrak{F}_n) = \frac{1}{s_n} (1 - \pi_n)(p_{n+1} + p_n \zeta_n + p_{n-1} \zeta_n \zeta_{n-1}) = f(n, \pi_n, \zeta_n, \zeta_n \zeta_{n-1}),$$

gdzie

$$f(n, v, x, y) = \frac{1}{s_n} (1 - v)(p_{n+1} + p_n x + p_{n-1} y).$$

Nietrudno sprawdzić, że $((n, \pi_n, \zeta_n, \zeta_n \zeta_{n-1}))_{n=2,3,\dots}$ jest łańcuchem Markowa względem $(\mathfrak{F}_n)_{n=2,3,\dots}$. Rozumując analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 3.2

stwierdzamy, że

$$f^*(n, v, x, y) = \frac{1}{s_n} (1-v)r^*(n, x, y),$$

gdzie $r^*(n, x, y) = \lim_{k \rightarrow \infty} r_k(n, x, y)$, zaś

$$r_1(n, x, y) = p_{n+1} + p_n x + p_{n-1} y,$$

$$r_{k+1}(n, x, y) = \max \left(r_1(n, x, y), \int r_k(n+1, u, xu) v(du) \right)$$

dla $k \in N$, a więc r^* jest rozwiązaniem równania

$$r^*(n, x, y) = \max \left(p_{n+1} + p_n x + p_{n-1} y, \int r^*(n+1, u, xu) v(du) \right).$$

W konsekwencji, optymalny moment Markowa, o ile istnieje, ma postać

$$\tau^* = \inf \left\{ n : n > 1, p_{n+1} + p_n \zeta_n + p_{n-1} \zeta_n \zeta_{n-1} \geq \int r^*(n+1, u, \zeta_n u) v(du) \right\}.$$

Trudność polega tutaj na tym, że chyba nie sposób podać ogólnych prostych warunków zapewniających istnienie optymalnej reguły stopu. Np. nie wiadomo, kiedy $\tau^* < +\infty$ p.n.

Warto na koniec wspomnieć o dalszym naturalnym uogólnieniu problemu (D_m): Dla dowolnych ustalonych $m_1, m_2 \in N \cup \{0\}$ można szukać momentu Markowa maksymalizującego

$$P(\theta - m_1 \leq \tau \leq \theta + m_2).$$

Łatwo się przekonać, że przedstawioną wyżej metodę można zastosować do rozwiązania także i tego zagadnienia.

IV. Wersja problemu (S_0) dla niezależnych zmiennych losowych pojawiających się zgodnie z procesem odnowy. Rozdział ten zawiera wyniki pracy [3] i częściowo [2].

1. Wszystkie rozważania będą przeprowadzane przy następujących założeniach:

- (4.1) $\xi_1, \xi_2, \dots$ są niezależnymi rzeczywistymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie z ciągłą dystrybucją F .
- (4.2) $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ są niezależnymi dodatnimi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie z ciągłą dystrybucją G ,
- (4.3) T jest dodatnią zmienną losową o dystrybucji H ,
- (4.4) $\xi_1, \xi_2, \dots, \varrho_1, \varrho_2, \dots, T$ są niezależne.

Zmienne losowe $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ interpretujemy jako kolejne odstępy czasu między pojawieniami się wielkości $\xi_1, \xi_2, \dots$. Zmienna T jest momentem, w którym eksperyment się kończy. Obserwując kolejne realizacje ϱ i ξ chcemy zatrzymać proces nie później niż w chwili T , tak aby z maksymalnym prawdopodobieństwem trafić na wartość ξ największą spośród tych, które się pojawiły, i pojawią się do momentu T (patrz wstęp).

Oznaczmy

$$R_n = \varrho_1 + \dots + \varrho_n \quad \text{dla} \quad n \in N, \quad R_0 = 0,$$

$$N(t) = \max \{n \geq 0: R_n \leq t\} \quad \text{dla} \quad t \geq 0,$$

tak więc $N(t)$ jest ilością tych ξ , które pojawiły się do chwili t .

W momencie, gdy widzimy ξ_n , znamy wszystkie poprzednie wartości ξ i ϱ , a także wiemy czy moment T już nastąpił, czy nie, tzn. znamy zdarzenia z σ -ciała

$$(4.5) \quad \mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n, \varrho_1, \dots, \varrho_n, TI_{[0, R_n]}(T))$$

($n \in N$). Oznaczając, jak zwykle przez $\mathcal{F}$ klasę wszystkich momentów Markowa względem $(\mathcal{F}_n)_{n \in N}$ rozważany przez nas problem można teraz sformułować następująco:

(S_0, R) Znaleźć $\tau^* \in \mathcal{F}$, takie że

$$P(\tau^* \leq N(T), \xi_{\tau^*} = \max_{k \leq N(T)} \xi_k) = \sup_{\tau \in \mathcal{F}} P(\tau \leq N(T), \xi_\tau = \max_{k \leq N(T)} \xi_k)$$

(litera R pochodzi od słowa „renewal”). Podobny problem został niezależnie sformułowany w [18].

Zagadnienie to, z powodu swojego ciągłego charakteru, różni się nieco od poprzednich i nie jest już szczególnym przypadkiem problemu (G) omawianego w rozdziale I. Okazuje się jednak, że metody wypracowane w poprzednich rozdziałach można zastosować i tutaj. Zachodzi

TWIERDZENIE 4.1. (a) *Przy założeniach (4.1)–(4.4) problem (S_0, R) można sprowadzić do zagadnienia optymalnego stopowania pewnego łańcucha Markowa.*

(b) *Rozwiązanie problemu (S_0, R) istnieje i ma postać*

$$(4.6) \quad \tau^* = \inf \{n: \xi_n = \max_{k \leq n} \xi_k, (R_n, F(\xi_n)) \in \Delta\},$$

gdzie Δ jest pewnym podzbiorem $R_+ \times [0, 1]$, zależnym tylko od G i H .

W dowodzie tego twierdzenia wykorzystamy następujący lemat o warunkowych wartościach oczekiwanych.

LEMAT 4.2. *Załóżmy, że X, Y, T są niezależnymi zmiennymi losowymi (niekoniecznie rzeczywistymi). Wówczas przy naturalnych założeniach o mierzalności i całkowalności*

$$E(g(X, Y, T)|X, h(X, T)) = E(E(g(x, Y, t))|_{t=T}|h(x, T))|_{x=X},$$

gdzie symbole $|_{t=T}$ i $|_{x=X}$ oznaczają, że po obliczeniu wartości oczekiwanej podstawiamy T na miejsce t , odpowiednio, X na miejsce x .

Dowód tego lematu pominiemy, wynika on wprost z definicji warunkowej wartości oczekiwanej i z twierdzenia Fubiniego. Nie będziemy też precyzować założeń; chodzi po prostu o to, żeby wszystkie występujące we wzorze funkcje były mierzalne. U nas tak będzie.

Dowód twierdzenia 4.1. Aby podkreślić analogie, będziemy stosować te same oznaczenia co w rozdziale II. To samo rozumowanie co w dowodzie twier-

dzenia 2.3 pozwala zastąpić ξ_n przez $F(\xi_n)$, czy — co na jedno wychodzi — założyć, że $\xi_1, \xi_2, \dots$ mają rozkład jednostajny na $[0, 1]$. Rozważmy teraz (por. (2.1))

$$\begin{aligned} Z_n &= P(n \leq N(T), \xi_n = \max_{k \leq N(T)} \xi_k | \mathfrak{F}_n) = \sum_{m=n}^{\infty} P(N(T) = m, \xi_n = \max_{k \leq m} \xi_k | \mathfrak{F}_n) = \\ &= I_{\{\xi_n = \max_{k \leq n} \xi_k\}} \sum_{m=n}^{\infty} P(R_m \leq T < R_{m+1}, \xi_n \geq \max_{n < k \leq m} \xi_k | \mathfrak{F}_n). \end{aligned}$$

Na podstawie lematu 4.2 mamy (patrz (4.5))

$$\begin{aligned} Z_n &= I_{\{\xi_n = \max_{k \leq n} \xi_k\}} \sum_{m=n}^{\infty} E(P(r + \varrho_{n+1} + \dots + \varrho_m \leq t < r + \varrho_{n+1} + \dots + \varrho_{m+1}, \\ &\quad x \geq \max_{n < k \leq m} \xi_k) |_{t=T} | TI_{[0, r]}(T)) |_{r=R_n, x=\xi_n} = \\ &= I_{\{\xi_n = \max_{k \leq n} \xi_k\}} E \left(\sum_{m=n}^{\infty} x^{m-n} P(R_{m-n} \leq t-r < R_{m-n+1}) |_{t=T} | TI_{[0, r]}(T) \right) |_{r=R_n, x=\xi_n} = \\ &= I_{\{\xi_n = \max_{k \leq n} \xi_k\}} E \left(\sum_{m=0}^{\infty} x^m P(N(t-r) = m) |_{t=T} | TI_{[0, r]}(T) \right) |_{r=R_n, r=\xi_n}. \end{aligned}$$

Oznaczmy przez $\varphi(t, \cdot)$ funkcję tworzącą rozkładu zmiennej losowej $N(t)$, tzn.

$$(4.7) \quad \varphi(t, x) = \begin{cases} E(x^{N(t)}) & \text{dla } t \geq 0, \\ 0 & \text{dla } t < 0, \end{cases} \quad x \in [0, 1].$$

Warunkową wartość oczekiwaną występującą w otrzymanym wyrażeniu można teraz zapisać krótko:

$$E(\varphi(T-r, x) | TI_{[0, r]}(T)).$$

Tę warunkową wartość oczekiwaną można łatwo obliczyć wykorzystując fakt, że $\varphi(T-r, x)$ jest różna od zera tylko na dwóch atomach σ -ciała $\sigma(TI_{[0, r]}(T))$, to jest na $\{T > r\}$ i $\{T = r\}$. Otrzymujemy

$$I_{\{T > r\}} \frac{1}{P(T > r)} E(\varphi(T-r, x) I_{\{T > r\}}) + I_{\{T = r\}}.$$

W rezultacie, uwzględniając fakt, że rozkład zmiennej losowej R_n nie ma, dla $n \in N$, punktów skokowych (patrz zał. (4.2)) mamy:

$$\begin{aligned} (4.8) \quad Z_n &= I_{\{\xi_n = \max_{k \leq n} \xi_k, T > R_n\}} \frac{1}{1 - H(R_n)} E(\varphi(T-r, x) I_{\{T > r\}}) |_{r=R_n, x=\xi_n} = \\ &= I_{\{\xi_n = \max_{k \leq n} \xi_k, n \leq N(T)\}} \frac{1}{1 - H(R_n)} \int_{(R_n, +\infty)} \varphi(t - R_n, \xi_n) dH(t) \end{aligned}$$

prawie na pewno.

Problem (S_0, R) sprowadza się teraz do znalezienia $\tau^* \in \mathcal{T}$ maksymalizującego $E(Z_\tau)$, przy założeniu $Z_\infty = 0$. Jest jasne, że wystarczy rozpatrywać momenty Mar-

kowa tylko z klasy $\mathcal{T}_0$ (por. lemat 2.1), gdzie tym razem

$$\mathcal{T}_0 = \{\tau \in \mathcal{T} : \tau = n \Rightarrow n \leq N(T), \xi_n = \max_{k \leq n} \xi_k, n \in N\}.$$

Modyfikując odpowiednio (2.3), definiujemy

$$\tau_1 = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \varrho_1 \leq T, \\ +\infty & \text{jeśli } \varrho_1 > T, \end{cases}$$

$$\tau_{j+1} = \inf\{n : n \leq N(T), n > \tau_j, \xi_n \geq \xi_{\tau_j}\}, \quad j \in N.$$

Dla dowolnych $s \geq 0, y \in [0, 1]$ policzmy

$$\begin{aligned} P(R_{\tau_{j+1}} \leq s, \xi_{\tau_{j+1}} \leq y | \mathcal{F}_{\tau_j}) &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} I_{\{\tau_j=n\}} P(\tau_{j+1}=m, R_m \leq s, \xi_m \geq y | \mathcal{F}_n) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} I_{\{\tau_j=n\}} \xi^{m-n-1} (y - \xi_n)^+ \frac{1}{1-H(R_n)} \int_{(R_n, +\infty)} G^{*m-n}(t \wedge s - R_n) dH(t), \end{aligned}$$

gdzie G^{*k} oznacza dystrybuantę R_k ; rachunki pomijamy, gdyż są one analogiczne do przeprowadzonych powyżej. Wykorzystując łatwy do wyprowadzenia wzór

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} G^{*k}(u) = \frac{1 - \varphi(u, x)}{1 - x},$$

gdzie φ jest zdefiniowane wzorem (4.7), otrzymujemy

$$\begin{aligned} (4.9) \quad P(R_{\tau_{j+1}} \leq s, \xi_{\tau_{j+1}} \leq y | \mathcal{F}_{\tau_j}) &= \\ &= I_{\{\tau_j < +\infty\}} \frac{(y - \xi_{\tau_j})^+}{1 - \xi_{\tau_j}} \frac{1}{1-H(R_{\tau_j})} \int_{(R_{\tau_j}, +\infty)} (1 - \varphi(t \wedge s - R_{\tau_j}, \xi_{\tau_j})) dH(t). \end{aligned}$$

Widać teraz, że jeżeli zdefiniujemy

$$Y_j = (R_{\tau_j}, \xi_{\tau_j}) \quad \text{jeśli } \tau_j < +\infty, \quad Y_j = \partial \quad \text{jeśli } \tau_j = +\infty,$$

to $(Y_j)_{j \in N}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa względem $(\mathcal{F}_{\tau_j})_{j \in N}$ o przestrzeni stanów $([0, a) \times [0, 1]) \cup \{\partial\}$, gdzie

$$(4.10) \quad a = \inf\{t : H(t) = 1\}.$$

Funkcja przejścia wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} (4.11) \quad P(r, x; [0, s] \times [0, y]) &= P(R_{\tau_{j+1}} \leq s, \xi_{\tau_{j+1}} \leq y | R_{\tau_j} = r, \xi_{\tau_j} = x) = \\ &= \frac{(y-x)^+}{1-x} \frac{1}{1-H(r)} \int_{(r, \infty)} (1 - \varphi(t \wedge s - r, x)) dH(t), \end{aligned}$$

zaś ∂ jest stanem pochłaniającym. Ze wzoru (4.8) wynika, że dla każdego $\tau \in \mathcal{T}_0$

$$E(Z_\tau) = E(f(Y_\sigma)),$$

gdzie

$$(4.12) \quad f(r, x) = \frac{1}{1-H(r)} \int_{(r, +\infty)} \varphi(t-r, x) dH(t)$$

dla $r \in (0, a)$, $x \in (0, 1]$, $f(\partial) = 0$, zaś σ jest momentem Markowa względem $(\mathcal{F}_{\tau_j})_{j \in \mathbb{N}}$ zdefiniowanym identycznie, jak w rozdziale II. W konsekwencji, problem (S_0, R) został sprowadzony do zagadnienia stopowania łańcucha Markowa $(Y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ z funkcją wypłaty f , co kończy dowód punktu (a) twierdzenia.

Moment σ_0 zdefiniowany przez (2.9) jest chwilą pierwszego dojścia łańcucha do zbioru

$$\{\partial\} \cup \Delta \stackrel{\text{def}}{=} \{\partial\} \cup \{(r, x) \in [0, a) \times [0, 1]: f(r, x) = f^*(r, x)\},$$

gdzie f^* jest określone wzorem (2.8). Moment ten jest z prawdopodobieństwem 1 skończony, bo łańcuch dochodzi prawie na pewno do stanu ∂ . Stąd już wynika, że rozwiązanie problemu (S_0, R) istnieje i ma postać (4.6). Twierdzenie jest udowodnione.

W przypadku ogólnym bardzo trudno jest wyznaczyć zbiór Δ efektywnie. Zastanówmy się nad możliwością zastosowania lematu 2.2. Zbiór Γ zdefiniowany przez (2.10) ma postać $\Gamma = \{\partial\} \cup \Gamma'$, gdzie

$$(4.13) \quad \Gamma' = \{(r, x) \in [0, a) \times [0, 1]: Pf(r, x) \leq f(r, x)\},$$

zaś (patrz (2.6) i (4.11)).

$$(4.14) \quad Pf(r, x) = \frac{1}{(1-x)(1-H(r))} \int_{[x, 1]} \int_{(r, +\infty)} \int_{[0, t-r]} f(s+r, y) d(1-\varphi(s, x)) dH(t) dy,$$

gdzie $d(1-\varphi(s, x))$ oznacza całkowanie po mierze, której dystrybuantą (na R_+) jest $1-\varphi(\cdot, x)$. Jest jasne, że warunek (2.12) jest spełniony. Dalej, bezpośrednio z definicji wynika, że $R_{\tau_{j+1}} > R_{\tau_j}$, $\xi_{\tau_{j+1}} \geq \xi_{\tau_j}$ o ile $\tau_{j+1} < +\infty$, a więc warunek (2.11) będzie spełniony, jeżeli zbiór Γ' będzie się składać z punktów prostokąta $[0, a] \times [0, 1]$ leżących nad wykresem pewnej funkcji nierosnącej. Otrzymujemy zatem

TWIERDZENIE 4.3. *Jeżeli zbiór Γ' zdefiniowany przez (4.13) ma postać*

$$\Gamma' = \{(r, x) \in [0, a) \times [0, 1]: 1 \geq x \geq x(r), a > r \geq 0\}.$$

gdzie $x(\cdot)$ jest funkcją nierosnącą, to $\Gamma' = \Delta$.

2. Na zakończenie rozpatrzmy konkretne przykłady zastosowania ostatniego twierdzenia.

Założmy, że zmienne losowe $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ mają rozkład wykładniczy z parametrem λ ($\lambda > 0$), tzn. $(N(t))_{t \in R_+}$ jest procesem Poissona z parametrem λ . Jest to założenie chyba najbardziej naturalne. Mamy wówczas (patrz (4.7))

$$(4.15) \quad \varphi(t, x) = \exp(-\lambda t(1-x)).$$

Przypuśćmy ponadto, że T ma rozkład jednopunktowy tzn. $T = a$, gdzie a jest określone przez (4.10). Z (4.12) i (4.14) za pomocą elementarnych rachunków otrzymujemy

$$I'' = \left\{ (r, x) \in [0, T) \times [0, 1]: \int_0^{\lambda(1-x)(T-r)} \frac{1}{u} (e^u - 1) du \leq 1 \right\}.$$

Niech α_0 oznacza (jedyną) liczbę taką, że

$$\int_0^{\alpha_0} \frac{1}{u} (e^u - 1) du = 1$$

($\alpha_0 = 0,8043 \dots$). Nierówność definiującą zbiór I'' można teraz zapisać $\lambda(1-x) \times (T-r) \leq \alpha_0$, a więc

$$(4.16) \quad I'' = \left\{ (r, x): 0 \leq r < T, 1 \geq x \geq (1 - \alpha_0/\lambda(T-r))^+ \right\}.$$

Założenia twierdzenia 4.3 są spełnione, zatem na podstawie twierdzeń 4.2 i 4.3 otrzymujemy

TWIERDZENIE 4.4 *Jeżeli zmienne losowe $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ mają rozkład wykładniczy z parametrem λ , zaś T jest stałe, to rozwiązanie problemu (S_0, R) ma postać*

$$\tau^* = \inf \{n: \xi_n = \max_{k \leq n} \xi_k, (R_n, F(\xi_n)) \in I''\},$$

gdzie I'' jest dany przez (4.16).

Zauważmy, że może być tak, iż I'' jest całym prostokątem $[0, T) \times [0, 1]$; będzie tak wtedy, gdy $T \leq \alpha_0/\lambda$. W tym przypadku należy zatrzymywać proces w momencie pojawienia się pierwszego ξ .

Z kolei, rozpatrzmy inną naturalną sytuację: $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ oraz T mają rozkłady wykładnicze z parametrami, odpowiednio, λ, μ . Korzystając z (4.12), (4.14) i (4.15), z łatwością stwierdzamy, że

$$\begin{aligned} I'' &= \left\{ (r, x) \in R_+ \times [0, 1]: \log \left((\lambda(1-x) + \mu)/\mu \right) \leq 1 \right\} = \\ &= R_+ \times [(1 - (e-1)\mu/\lambda)^+, 1]. \end{aligned}$$

Tak więc i w tym przypadku można zastosować twierdzenie 4.3 i wywnioskować, że moment Markowa

$$\tau^* = \inf \{n: \xi_n = \max_{k \leq n} \xi_k, F(\xi_n) \geq (1 - (e-1)\mu/\lambda)^+\}$$

jest optymalny dla rozpatrywanego zagadnienia.

Widać, że definicję τ^* da się tu napisać w jeszcze prostszej formie, bowiem warunek $\xi_n = \max_{k \leq n} \xi_k$ można opuścić. Co więcej, nietrudno obliczyć maksymalne prawdopodobieństwo wynikające z zastosowania optymalnej reguły stopu. Istotnie, oznaczmy

$$\alpha = \lambda/\mu, \quad x_0 = (1 - (e-1)/\alpha)^+$$

i napiszmy

$$\begin{aligned}
 P_{\max} &= P(\tau^* \leq N(T), \xi_{\tau^*} = \max_{k \leq N(T)} \xi_k) = \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^m P(N(T) = m) P(\max_{k \leq n-1} F(\xi_k) < x_0, F(\xi_n) \geq x_0, F(\xi_n) \geq \max_{n < k \leq m} F(\xi_k)) = \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^m \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^m \frac{1}{\alpha+1} x_0^{n-1} \frac{1}{m-n+1} (1 - x_0^{m-n+1}).
 \end{aligned}$$

Jeżeli $x_0 = 0$, to

$$P_{\max} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^m \frac{1}{\alpha+1} \frac{1}{m} = \frac{1}{\alpha+1} \log(\alpha+1).$$

Jeżeli $x_0 > 0$, to po zamianie kolejności sumowania i elementarnych rachunkach otrzymujemy

$$P_{\max} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha+1} x_0^{n-1} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^{n-1} \left(\log \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha+1} x_0 \right) - \log \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha+1} \right) \right) = \frac{1}{e}.$$

Udowodniliśmy w ten sposób

Twierdzenie 4.5. *Załóżmy, że $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ mają rozkład wykładniczy z parametrem λ , zaś T — rozkład wykładniczy z parametrem μ i oznaczmy $\alpha = \lambda/\mu$. Wówczas*

(a) *Jeżeli $\alpha \leq e-1$, to $\tau^* \equiv 1$ jest rozwiązaniem problemu (S_0, R) i prawdopodobieństwo, że stosując tę regułę stopu otrzymamy maksymalne ξ jest równe*

$$\frac{1}{\alpha+1} \log(\alpha+1);$$

(b) *Jeżeli $\alpha > e-1$, to*

$$\tau^* = \inf \left\{ n: F(\xi_n) \geq 1 - \frac{e-1}{\alpha} \right\}$$

jest rozwiązaniem problemu (S_0, R) , zaś prawdopodobieństwo wynikające ze stosowania tej reguły stopu jest równe $1/e$.

Zauważmy, że „naturalny” jest przypadek $\alpha > e-1$, gdyż T nie powinno być, „średnio”, małe w porównaniu z ϱ .

Prace cytowane

- [1] T. Bojdecki, *A note on the optimal stopping of sums of independent random variables*, Bull. Acad. Polon. Sci. 8 (1977), str. 833–837.
- [2] —, *On optimal stopping of a sequence of independent random variables—probability maximizing approach*, Stoch. Proc. Appl. 6 (1978), str. 153–163.
- [3] —, *On optimal stopping of independent random variables appearing according to a renewal process with random time horizon*, Bol. Soc. Mat. Mexicana 22 (1977), str. 35–40.

- [4] —, *Probability maximizing approach to optimal stopping and its application to a disorder problem*, Stochastics 3 (1979), str. 61–71.
 - [5] —, *Martyngaly z czasem dyskretnym — zarys teorii i przykłady zastosowań*, Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, 1977.
 - [6] R. Cowan, J. Zabczyk, *An optimal selection problem associated with the Poisson process*, Teor. Verojnost. i Primienen. 23 (1978), str. 606–614.
 - [7] Y. Chow, H. Robbins, D. Siegmund, *Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping*, Houghton Mifflin Co., Boston 1971.
 - [8] M. H. A. Davis, *A note on the Poisson disorder problem*, Proc. of International Conference on Control Theory, Zakopane, Poland 1974.
 - [9] [E. Dynkin, A. Juszkiewicz] Е. Дынкин, А. Юшкевич, *Теоремы и задачи о процессах Маркова*, Наука, Москва 1967.
 - [10] J. Gilbert, F. Mosteller, *Recognizing the maximum of a sequence*, Amer. Statist. Assoc. J. 61 (1966), str. 35–73.
 - [11] [S. Gusiejn-zade] С. Гусейн-заде, *Задача выбора и оптимальное правило останова последовательности независимых испытаний*, Теория вероятн. и ее примен. 11, 3 (1966), str. 534–537.
 - [12] G. Haggstrom, *Optimal stopping and experimental design*, Ann. Math. Statist. 37 (1966), str. 7–29.
 - [13] J. Neveu, *Martingales à temps discret*, Masson et Cie, Paris 1972.
 - [14] S. Ross, *Applied Probability Models with Optimization Applications*, Holden-Day, San Francisco 1970.
 - [15] I. Snell, *Applications of martingale system theory*, Trans. Amer. Math. Soc. 73 (1953), str. 293–312.
 - [16] [A. Szirijajew] А. Ширяев, *Статистический последовательный анализ*, Наука, Москва 1976.
 - [17] —, *Об оптимальных методах в задачах скорейшего обнаружения*, Теория вероятн. и ее прим. 8, 1 (1963), str. 26–51.
 - [18] J. Zabczyk, *A selection problem associated to a renewal process*, Lect. Notes Contr. Inform. Sci. 2 (1977), str. 508–515.
 - [19] S. Zubrzycki, *Wykłady z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1970.
-