

IRENA TARRARO (Lublin)

Podział sfery na trójkąty krzywoliniowe o jednakowych polach powierzchni

(Praca przyjęta do druku 12.03.1979)

1. Informacje wstępne. Praca została wykonana dla zastosowań kartograficznych. Kartografia i w ogólności geografia współcześnie często zajmuje się opracowaniami statystycznymi rozkładu różnych wartości empirycznych, odnoszonych do tzw. pól podstawowych, czyli pól o jednakowej powierzchni. Podział na trójkąty krzywoliniowe, a nie na inne figury, jest spowodowany konkretnymi warunkami — możliwością łączenia tych trójkątów w sześciokąty, co daje korzystne rozmieszczenie osi interpolacyjnych. Istnieją liczne opracowania oparte na sześciokątnych polach podstawowych dla poszczególnych kontynentów i krajów, natomiast nie było podobno dotychczas podziału na trójkąty i sześciokąty o jednakowych polach powierzchni dla całej Ziemi.

Dla samego podziału na trójkąty krzywoliniowe wykorzystano linie współrzędnych sferycznych geograficznych z łatwo zrozumiałych powodów, natomiast wybór trzeciego boku trójkąta, jako łuku okręgu na płaszczyźnie w odwzorowaniu wiernopowierzchniowym, podyktowany był łatwością konstrukcji za pomocą cyrkla na mapie wykonanej w tym odwzorowaniu (opracowania kartograficzne dokonywane są z reguły na mapach, nie na globie).

A oto konkretne przykłady zastosowań tego podziału:

Wiele opracowań dokonanych dla kontynentów (osadnictwo, ludność) można będzie jednolicie wykonać dla całej Ziemi.

Opracowania statystyczne z zastosowaniem wskaźnika koncentracji, który wyznacza się korzystając ze zliczeń obiektów w obszarach o jednakowych polach powierzchni, na jakie należy podzielić badane pole, będzie można wykonywać dla całej sfery.

Liczne badania klimatyczne, fizyczne, gospodarcze, znajdą możliwości nowych opracowań numerycznych statystycznych dla całej Ziemi.

W astronomii — zliczenia na sferze niebieskiej galaktyk w przedziałach jasności w obszarach o jednakowych polach powierzchni pozwolą numerycznie wykryć istnienie gromad galaktyk i ewentualnie gromad wyższych rzędów jednolicie dla całej sfery niebieskiej.

Jednolite badania numeryczne zmiennych fizycznych na sferze niebieskiej pozwolą ocenić np. ekstynkcję międzygalaktyczną, itd.

Różne zagadnienia wymagać będą różnej wielkości pól, które, wraz z ograniczeniami metody podziału, określają ilość trójkątów.

Dziwne wydaje się, że dotychczas nie wykonano tak prostego podziału o charakterze elementarnym. Można to wytłumaczyć tylko izolacją poszczególnych dziedzin nauki.

2. Oznaczenia.

R — promień kuli,

n — ilość trójkątów na powierzchni kuli,

m — ilość dwukątów sferycznych w podziale powierzchni kuli liniami

$\lambda = \text{const}$,

$\Delta\lambda$ — kąt dwukąta,

$2k$ — ilość trójkątów na dwukącie,

i — numer równoleżnika podziału oraz numer strefy równoleżnikowej podziału,

$\Delta\varphi_i$ — szerokość kątowa strefy równoleżnikowej podziału,

r_i — promień obrazu równoleżnika φ_i odwzorowanego na płaszczyznę,

$\Delta\gamma$ — odwzorowany na płaszczyznę kąt $\Delta\lambda$,

$P_{i\Box}$ — pole powierzchni czworokąta $\Delta\lambda \cdot \Delta\varphi_i$ na sferze oraz odwzorowanego wiernopowierzchniowo czworokąta krzywoliniowego,

$P_{i\Delta}$ — pole powierzchni trójkąta krzywoliniowego,

c_i — długość przekątnej obrazu czworokąta na płaszczyźnie,

X_i — połowa kąta, na jakim oparty jest łuk okręgu, dzielący odwzorowany na płaszczyźnie czworokąt krzywoliniowy na dwa trójkąty krzywoliniowe o jednakowych polach powierzchni,

ϱ_i — promień tego okręgu,

$S_i(x_{s,i}; y_{s,i})$ — środek tego okręgu,

A_i, B_i — punkty przecięcia boków dwukąta z równoleżnikiem φ_i ,

P_i — pole powierzchni odcinka koła o promieniu ϱ_i i cięciwie c_i .

Z powyższego wynikają warunki:

$$(1) \quad n = 2mk, \quad \text{gdzie } m \geq 2 \text{ liczba naturalna, } k \geq 1 \text{ liczba naturalna nieparzysta,}$$

$$(2) \quad P_{\Delta} = \frac{4\pi R^2}{n},$$

$$(3) \quad m \cdot \Delta\lambda = 2\pi,$$

$$(4) \quad \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}(k-1)} \Delta\varphi_i = \pi/2.$$

3. Podział na czworokąty o jednakowych polach powierzchni. Zajmijmy się teraz podziałem powierzchni półkuli na $m(k-1)/2$ czworokątów $\Delta\lambda \cdot \Delta\varphi_i$ o jednakowych polach plus m trójkątów o polach powierzchni dwa razy mniejszych od pól czworokątów, które to trójkąty zbiegają się w biegunie. Na całej sferze jest więc $m(k-1)$ czworokątów plus $2m$ trójkątów przy biegunach.

Podzielmy powierzchnię półkuli na pasy równoleżnikowe: $(k-1)/2$ pasów o jednakowych polach powierzchni i szerokościach kątowych $\Delta\varphi_i$, gdzie $i \geq 2$, oraz czasza podbiegunowa o polu o połowę mniejszym i szerokości kątowej $\Delta\varphi_1$. Pole powierzchni czworokąta $\Delta\lambda \cdot \Delta\varphi_i$ jest:

$$(5) \quad \bigwedge_{i \geq 2} P_{i\Box} = \frac{4\pi R^2}{m \cdot k} = R^2(\lambda_i - \lambda_{i-1}) \cdot (\sin \varphi_{i-1} - \sin \varphi_i)$$

i przy podziale od bieguna do równika mamy rozwiązanie:

$$(6) \quad \begin{cases} \varphi_0 = 0, \\ \sin \varphi_1 = 1 - 1/k, \\ \bigwedge_{i \geq 2} \sin \varphi_i = \sin \varphi_{i-1} - 2/k. \end{cases}$$

Są więc już wyznaczone współrzędne φ_i równoleżników podziału powierzchni kuli na strefy równoleżnikowe. Podzielmy te pasy południkami odległymi o $\Delta\lambda = 2\pi/m$ na czworokąty o jednakowych polach powierzchni. Jeżeli do opracowania jakiegoś problemu potrzebna jest siatka czworokątna, dla uzyskania czworokątów o bokach nie leżących na jednym południku, przesuwamy czworokąty w co drugiej strefie równoleżnikowej wzdłuż równoleżnika o kąt $\Delta\lambda/2$.

4. Podział na trójkąty o jednakowych polach powierzchni. Przejdźmy teraz na płaszczyznę odwzorowaniem azymutalnym wiernopowierzchniowym Lamberta [1]:

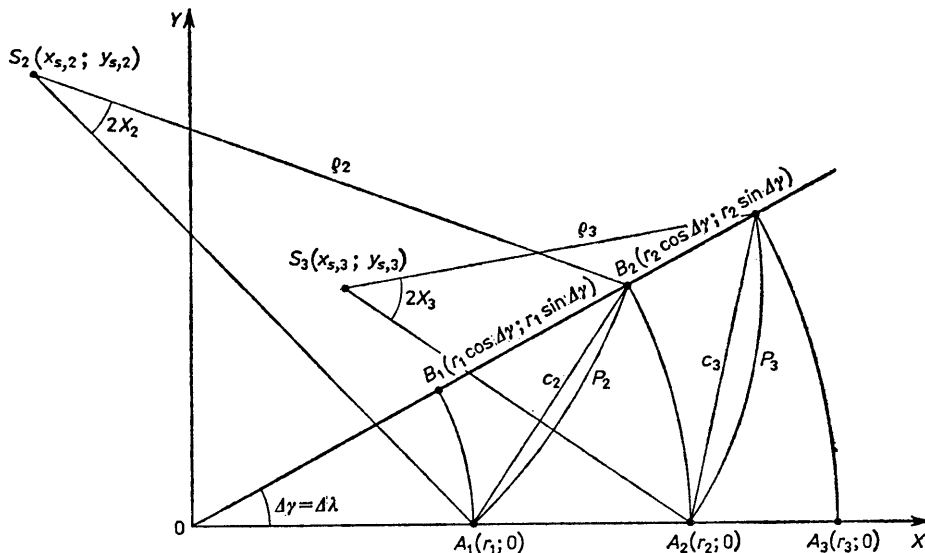
$$(7) \quad \begin{cases} r = 2R \cos \frac{1}{2} \varphi = R \sqrt{2(1 - \sin \varphi)}, \\ \gamma = \lambda. \end{cases}$$

Łatwo obliczyć, że równoleżniki podziału mają promienie r_i dane wzorem:

$$(8) \quad \begin{cases} r_0 = 0, \\ \bigwedge_{i \geq 1} r_i = \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{k}} \cdot \sqrt{2i-1}, \end{cases}$$

a więc promienie kolejnych obrazów równoleżników podziału są w stosunku pierwiastków z kolejnych liczb naturalnych nieparzystych.

Weźmy teraz dwukąt $\Delta\lambda$ odwzorowany azymutalnie wiernopowierzchniowo na płaszczyznę, podzielony na czworokąty $\Delta\lambda \cdot \Delta\varphi_i$ o jednakowych polach powierzchni odwzorowane azymutalnie wiernopowierzchniowo na płaszczyznę jako czworokąty krzywoliniowe $\Delta\gamma \cdot \Delta r_i$ (przy biegunie trójkąt krzywoliniowy o polu powierzchni $P_\Delta = \frac{1}{2}P_\Box$). Zajmijmy się podziałem tych płaskich czworokątów krzywoliniowych na dwa trójkąty krzywoliniowe o jednakowych polach powierzchni. W tym celu przeprowadźmy pomocniczo w każdym z czworokątów przekątną



Rys. 1. Łuk okręgu o promieniu ρ_2 dzieli czworokąt krzywoliniowy $A_1A_2B_2B_1$ na dwa trójkąty krzywoliniowe $A_1B_2B_1$ oraz $A_1A_2B_2$ o jednakowych polach powierzchni

A_iB_{i+1} i przez punkty A_i oraz B_{i+1} przeprowadźmy łuk okręgu o promieniu ρ_{i+1} takim, by otrzymać trójkąty krzywoliniowe o jednakowych polach (rys. 1).

Łatwo wykazać, że różnice między polami powierzchni trójkątów a mniejszymi polami otrzymanymi przez podział czworokąta przekątną, czyli pola odcinków kół P_i są dane wzorem:

$$(9) \quad \bigwedge_{2 \leq i \leq (k+1)/2} P_i = \frac{R^2}{k} \left[\frac{4\pi}{m} (i-1) - \sqrt{(2i-3)(2i-1)} \sin \Delta\lambda \right].$$

Jednocześnie te same pola, jako pola odcinków kół o cięciwie c_i i połowie kąta X_i , są równe:

$$(10) \quad P_i = \frac{c_i^2}{4} \left[\frac{X_i}{\sin^2 X_i} - \operatorname{ctg} X_i \right]$$

a długości cięciw c_i dane są wzorem

$$(11) \quad \bigwedge_{2 \leq i \leq (k+1)/2} c_i = \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{k}} \sqrt{4(i-1) - 2\sqrt{(2i-3)(2i-1)} \cos \Delta\lambda}.$$

Otrzymujemy więc równanie

$$(12) \quad \bigwedge_{2 \leq i \leq (k+1)/2} \frac{X_i}{\sin^2 X_i} - \operatorname{ctg} X_i = \frac{\frac{4\pi}{m} (i-1) - \sqrt{(2i-3)(2i-1)} \cdot \sin \Delta\lambda}{2(i-1) - \sqrt{(2i-3)(2i-1)} \cdot \cos \Delta\lambda},$$

które względem X_i można rozwiązać metodą kolejnych przybliżeń.

Długość promienia ϱ_i łuku okręgu dla danych c_i oraz X_i jest równa

$$(13) \quad \bigwedge_{2 \leq i \leq (k+1)/2} \varrho_i = \frac{c_i}{2 \sin X_i}.$$

Mając dwa punkty na łuku okręgu oraz jego promień, otrzymamy równanie tego okręgu — znając współrzędne końców cięciwy, czyli punktów $A_{i-1}(r_{i-1}; 0)$, $B_i(r_i \cdot \cos \Delta\gamma; r_i \cdot \sin \Delta\gamma)$ (rys. 1), dla każdego ϱ_i można wyznaczyć współrzędne środka okręgu $S_i(x_{s,i}; y_{s,i})$. Pamiętając, że poszukiwany łuk okręgu jest skierowany wklęsłością do obrazu bieguna, wybieramy zawsze mniejszy spośród dwu pierwiastków $x_{s,i}$.

Dla obliczonych ϱ_i , $x_{s,i}$, $y_{s,i}$ otrzymaliśmy $(k-1)/2$ równań szukanych okręgów:

$$(14) \quad \bigwedge_{2 \leq i \leq (k+1)/2} (x - x_{s,i})^2 + (y - y_{s,i})^2 = \varrho_i^2$$

dzielących czworokąty $\Delta\gamma \cdot \Delta r_i$ na dwa trójkąty krzywoliniowe o jednakowych polach.

Należy teraz przejść na powierzchnię kuli odwzorowaniem azymutalnym wierno-powierzchniowym:

$$(15) \quad \begin{aligned} \varphi &= 2 \arccos \frac{r}{2R}, \\ \lambda &= \gamma. \end{aligned}$$

W praktyce kartograficznej wystarczy numerycznie na każdym łuku wyznaczyć z równania (14) przedstawionego we współrzędnych biegunowych r , γ punkty w odpowiednio dobranych odstępach kąta γ i przenieść te punkty na sferę odwzorowaniem (15). Łącząc je krzywą ciągłą otrzymamy linie, które wraz z siatką równoleżników podziału φ_i podzieliły połowę dwukąta sferycznego $\Delta\lambda$ (obejmującą $0 \leq \varphi \leq \pi/2$) na trójkąty krzywoliniowe o jednakowych polach powierzchni.

Analogicznie (symetrycznie względem równika) można podzielić drugą połowę dwukąta.

W ten sposób można podzielić na trójkąty o jednakowych polach powierzchni wszystkie dwukąty sferyczne $\Delta\lambda$ na powierzchni kuli, dokonując kolejno $m-1$ razy obrotu względem osi biegunowej o kąt $\Delta\lambda$ (do otrzymanych współrzędnych λ siatki kolejno $m-1$ razy dodawać $\Delta\lambda$).

Można tworzyć inne, wygodne dla zastosowań siatki, łącząc po kilka trójkątów.

5. Przykład. Weźmy:

$$n = 3060 = 6 \cdot 510 \text{ (pole pow. Ziemi około 510 mln km}^2\text{),}$$

$$m = 90 \text{ dwukątów o kącie } \Delta\lambda = 4^\circ,$$

$$2k = \frac{3060}{90} = 34 \text{ trójkąty w dwukącie,}$$

$$P_\Delta = \frac{4\pi R^2}{3060} = \frac{\pi R^2}{765}.$$

Otrzymamy:

$$r_i = R \sqrt{\frac{2}{17}} \cdot \sqrt{2i-1},$$

$$P_i = \frac{R^2}{17} \left[\frac{2\pi}{45} (i-1) - \sqrt{(2i-3)(2i-1)} \cdot \sin 4^\circ \right],$$

$$c_i = R \sqrt{\frac{2}{17}} \sqrt{4(i-1) - \sqrt{(2i-3)(2i-1)} \cdot \cos 4^\circ}.$$

Wyniki obliczeń zawiera tablica 1.

Tablica 1

i	φ_i	r_i	P_i	$\frac{1}{2} c_i$	$\frac{4P}{c_i^2}$	$\sin X_i$	q_i	$x_{s,i}$	$y_{s,i}$
0	90°	0	—	—	—	—	—	—	—
1	70°15'	0.343 R	—	—	—	—	—	—	—
2	55°56'	0.594 R	0.001106 R ²	0.12653 R	0.06909	0.1034	1.223 R	0.269 R	1.221 R
3	44°54'	0.767 R	0.000534 R ²	0.08959 R	0.06650	0.0995	0.900 R	0.419 R	0.883 R
4	36°02'	0.907 R	0.000364 R ²	0.07585 R	0.06333	0.0946	0.801 R	0.504 R	0.757 R
5	28°04'	1.029 R	0.000284 R ²	0.06949 R	0.05885	0.0881	0.789 R	0.561 R	0.709 R
6	20°40'	1.137 R	0.000239 R ²	0.06614 R	0.05464	0.0818	0.809 R	0.598 R	0.684 R
7	13°36'	1.237 R	0.000211 R ²	0.06457 R	0.05068	0.0759	0.851 R	0.619 R	0.674 R
8	6°05'	1.328 R	0.000193 R ²	0.06407 R	0.04712	0.0706	0.908 R	0.626 R	0.672 R
9	0°	1.414 R	0.000182 R ²	0.06425 R	0.04401	0.0659	0.975 R	0.623 R	0.673 R

Opracowanie numeryczne i graficzne zostanie opublikowane w jednym z czasopism kartograficznych.

Dziękuję uprzejmie Panu Profesorowi Franciszkowi Uhorczakowi za propozycję tematu tej pracy.

Praca cytowana

[1] Antoni Łomnicki *Kartografia matematyczna*, PWN, Warszawa 1956.

ZAKŁAD KARTOGRAFII INSTYTUTU NAUK O ZIEMI UMCS
LUBLIN