



WIESŁAW DZIUBDZIELA i MAŁGORZATA ROMANOWSKA (Wrocław)

Twierdzenia Poissona

(Praca przyjęta do druku 11.12.1978)

I. Wstęp

Jednym z powszechnie znanych twierdzeń granicznych rachunku prawdopodobieństwa jest udowodnione w pierwszej połowie XIX w. przez S. D. Poissona [15] twierdzenie graniczne o rozkładzie liczby sukcesów w serii niezależnych prób z małym prawdopodobieństwem sukcesu. Przypomnijmy najprostsze sformułowanie tego twierdzenia:

Niech $I_{n1}, I_{n2}, \dots, I_{nn}$, $n = 1, 2, \dots$, będą niezależnymi zmiennymi losowymi przyjmującymi wartości 1 i 0 z prawdopodobieństwami

$$P(I_{nr} = 1) = 1 - P(I_{nr} = 0) = p_n,$$

$r = 1, 2, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$. Jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0,$$

to

$$(1.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sum_{r=1}^n I_{nr} = k\right) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Już w tej najprostszej postaci twierdzenie Poissona ma dużo interesujących zastosowań (patrz np. W. Feller [4]). W wielu zastosowaniach budzą się jednak wątpliwości, czy założenia twierdzenia Poissona, szczególnie założenie o niezależności, nie jest zbytnim uproszczeniem w opisie rozpatrywanego zjawiska.

W ostatnich latach twierdzenie Poissona stało się ponownie przedmiotem zainteresowania probabilistów. Wiele uwagi poświęcono osłabianiu założenia niezależności, takiemu jednak, by rozkład graniczny w (1.1) był rozkładem Poissona lub mieszanym rozkładem Poissona.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie trzech najczęściej stosowanych metod dowodzenia twierdzenia Poissona dla zależnych zmiennych losowych. Są to przedstawione w trzech kolejnych rozdziałach: metoda Takácsa–Galambosa [7], [19], metoda aproksymacji, którą przedstawimy na przykładzie prac D. Freedmana [6] i M. R. Leadbettera [14] oraz metoda mieszanek, której twórcą jest J. Galambos [8].

Warto przypomnieć jedno z ważniejszych zastosowań twierdzenia Poissona i jego uogólnień — zastosowanie w teorii statystyk pozycyjnych, a więc i w teorii niezawodności (patrz np. J. Galambos [9], B. Kopociński [13]).

PRZYKŁAD 1.1. Niech $X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{nn}$, $n = 1, 2, \dots$, będą zmiennymi losowymi i niech dla ustalonego x rzeczywistego

$$A_{nr}(x) = \{X_{nr} \geq x\}, \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Oznaczmy przez

$$Z_1^{(n)} \leq Z_2^{(n)} \leq \dots \leq Z_n^{(n)}$$

statystyki pozycyjne w ciągu zmiennych losowych $X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{nn}$. Oczywiście jest równość

$$(1.2) \quad P(Z_{n-k+1}^{(n)} < x) = P\left(\sum_{r=1}^n I_{A_{nr}(x)} < k\right),$$

gdzie I_A jest indykatozem zdarzenia A , tzn. $I_A = 1$, jeżeli zdarzenie A zachodzi i $I_A = 0$ w przeciwnym razie. Równość (1.2) pozwala sprowadzić badanie rozkładu granicznego ekstremalnych statystyk pozycyjnych do badania rozkładu granicznego sumy indykatorów, a więc do pojęcia z twierdzenia Poissona.

Niniejsza praca jest kontynuacją tematyki opublikowanych w Matematyce Stosowanej prac W. Dziubdzieli [2] oraz W. Dziubdzieli i B. Kopocińskiego [3], w których badane były rozkłady graniczne ekstremalnych statystyk pozycyjnych i oszacowania niezawodności systemów.

Na zakończenie wstępu wprowadzimy kilka definicji i oznaczeń, które będą obowiązywać w całej pracy.

Niech

$$(1.3) \quad A_{n1}, A_{n2}, \dots, A_{nn}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

będą zdarzeniami losowymi. Prawdopodobieństwa, indykatory i sumy indykatorów tych zdarzeń będziemy oznaczać przez

$$p_{nr} = P(A_{nr}), \quad I_{nr} = I_{A_{nr}}, \quad J_n = \sum_{r=1}^n I_{nr},$$

$$r = 1, 2, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Analogicznie, przez $A_{n1}^*, A_{n2}^*, \dots, A_{nn}^*$, $n = 1, 2, \dots$, będziemy oznaczać zdarzenia losowe niezależne o takich samych, jak zdarzenia (1.3) prawdopodobieństwach oraz przez I_{nr}^* i J_n^* indykatory i sumy indykatorów tych zdarzeń.

Mówimy, że zmienna losowa X o wartościach całkowitych nieujemnych ma:

(i) *rozkład Poissona* $\mathcal{P}(\lambda)$ z parametrem $\lambda > 0$, gdzie λ jest stałą, gdy

$$P_k(\lambda) = P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

(ii) *mieszany rozkład Poissona* $\mathcal{P}(\lambda)$ z parametrem λ , gdzie λ jest dodatnią z prawdopodobieństwem 1 zmienną losową, gdy

$$P_k(\lambda) = P(X = k) = E\left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}\right), \quad k = 0, 1, \dots,$$

przy założeniu, że powyższe wartości oczekiwane istnieją.

Tezę twierdzenia Poissona nazywamy relacją

$$(TP) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(J_n = k) = P_k(\lambda), \quad k = 0, 1, \dots$$

Symbole $X_n \xrightarrow{L_1} X$ i $X_n \xrightarrow{P} X$ oznaczają zbieżność ciągu zmiennych losowych X_n , $n \rightarrow \infty$, do zmiennej losowej X odpowiednio w L_1 i według prawdopodobieństwa.

II. Metoda momentów dwumianowych

W rozdziale tym omówimy metodę momentów dwumianowych. Oparta jest ona na twierdzeniu Takácsa–Galambosa. Dowód twierdzenia, który przedstawimy niżej, pochodzi z pracy J. Galambosa [7]. Szczególne przypadki tego twierdzenia i jego modyfikacje pojawiły się m.in. w pracach L. Takácsa [17], [18], [19]. Metodę momentów dwumianowych zastosujemy następnie do otrzymania rozkładów granicznych sum indyktorów przy różnych założeniach o typie zależności zdarzeń.

1. Momenty dwumianowe i twierdzenie Takácsa–Galambosa. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie prawdopodobieństwa

$$P(X = r) = \pi_r, \quad r = 0, 1, \dots$$

Wówczas k -tym momentem dwumianowym zmiennej losowej X nazywamy

$$S_k = E\left(\binom{X}{k}\right) = \sum_{r=k}^{\infty} \binom{r}{k} \pi_r, \quad k = 0, 1, \dots,$$

o ile powyższe wartości oczekiwane istnieją.

PRZYKŁAD 2.1. Jeżeli zmienna losowa X ma rozkład Poissona $\mathcal{P}(\lambda)$, to

$$S_k = \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

PRZYKŁAD 2.2. Jeżeli zmienna losowa X ma mieszany rozkład Poissona $\mathcal{P}(\lambda)$, to

$$S_k = E\left(\frac{\lambda^k}{k!}\right), \quad k = 0, 1, \dots,$$

o ile wartości oczekiwane po prawej stronie wzoru istnieją.

Niech dalej $X = J_n$.

LEMAT 2.1 ([9], [17]). *Mamy*

$$S_k(n) = E\left(\binom{J_n}{k}\right) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ \sum_{(*)} P(I_{n_{j_1}} \cdot \dots \cdot I_{n_{j_k}} = 1), & k = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

gdzie sumowanie $\sum_{(*)}$ rozciąga się na wszystkie układy liczb $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$.

D o w ó d. Dowodu wymaga jedynie przypadek, gdy $k = 1, 2, \dots, n$. Zauważmy, że

$$\binom{J_n}{k} = \sum_{(*)} I_{n_{j_1}} \cdot I_{n_{j_2}} \cdot \dots \cdot I_{n_{j_k}}.$$

Stąd

$$E\left(\binom{J_n}{k}\right) = \sum_{(*)} E(I_{n_{j_1}} \cdot \dots \cdot I_{n_{j_k}}) = \sum_{(*)} P(I_{n_{j_1}} \cdot \dots \cdot I_{n_{j_k}} = 1).$$

Znając momenty dwumianowe $S_k(n)$, $k = 0, 1, \dots, n$, zmiennej losowej J_n można wyznaczyć jej rozkład:

$$(2.1) \quad P(J_n = r) = \sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} \binom{k}{r} S_k(n), \quad r = 0, 1, \dots, n,$$

(patrz np. [9], [19]).

TWIERDZENIE 2.1 (Takácsa–Galambosa). *Jeżeli granica $\lim_{n \rightarrow \infty} S_k(n) = S_k$, $k = 0, 1, \dots, n$, istnieje i jest skończona oraz*

$$\varrho = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{S_k} < 1,$$

to granica $\lim_{n \rightarrow \infty} P(J_n = r)$, $r = 0, 1, \dots$, istnieje i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(J_n = r) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{k+r}{r} S_{k+r}.$$

D o w ó d. Weźmy pod uwagę funkcje tworzące ciągów $\{S_k(n)\}_{k=0}^n$ i $\{P(J_n = r)\}_{r=0}^n$:

$$U_n(z) = \sum_{k=0}^n S_k(n) z^k, \quad V_n(z) = \sum_{r=0}^n P(J_n = r) z^r.$$

Korzystając z (2.1) mamy

$$(2.2) \quad V_n(z) = \sum_{r=0}^n \sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} \binom{k}{r} S_k(n) z^r = \sum_{k=0}^n S_k(n) (z-1)^k = U_n(z-1).$$

Następnie, postępując tak jak w dowodzie twierdzenia o ciągłości funkcji tworzących (patrz np. W. Feller [4], str. 248), otrzymujemy, że granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(z-1) = U(z-1)$$

jest skończona dla $|z-1| < 1/\varrho$. Stąd i z (2.2) wynika, że granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(z) = V(z)$$

jest także skończona dla $|z-1| < 1/\varrho$ i ponadto dla tych wartości z mamy

$$V(z) = U(z-1).$$

Ponieważ $V(z)$ jest granicą funkcji tworzących rozkładu prawdopodobieństwa, więc istnieją granice

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(J_n = r) = V_r, \quad r = 0, 1, \dots$$

Stąd

$$V(z) = \sum_{r=0}^{\infty} V_r z^r,$$

gdzie $V_r \geq 0$, $r = 0, 1, \dots$ i $\sum_{r=0}^{\infty} V_r = V(1) = U(0) = U_n(0) = S_0(n) = 1$. Mamy także dla $|z| < 1/\varrho$

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k z^k.$$

Obliczmy r -tą pochodną $V(z)$:

$$V^{(r)}(z) = U^{(r)}(z-1) = r! \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k}{r} (z-1)^{k-r} S_k.$$

Ponieważ $1/\varrho > 1$, mamy

$$V_r = \frac{V^{(r)}(0)}{r!} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r}{r} (-1)^k S_{k+r}.$$

To kończy dowód twierdzenia 2.1.

Następujący wniosek z twierdzenia Takácsa–Galambosa pozwala zastosować metodę momentów dwumianowych w dowodach twierdzeń Poissona.

WNIOSEK 2.1. Jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_k(n) = \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

gdzie $\lambda > 0$ jest stałą, to zachodzi (TP).

2. Twierdzenie Poissona dla zdarzeń niezależnych. Znanych jest wiele dowodów twierdzenia Poissona dla zdarzeń niezależnych. W paragrafie tym przedstawimy dowód wykorzystujący metodę momentów dwumianowych.

Oznaczmy

$$S_k^*(n) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ \sum_{(*)} P(I_{nj_1}^* \cdot \dots \cdot I_{nj_k}^* = 1), & k = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

gdzie, przypominamy, sumowanie rozciąga się na wszystkie układy liczb $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$,

$$\tilde{p}_n = \sum_{r=1}^n p_{nr},$$

oraz

$$\tilde{p}_n^{(2)} = \sum_{r=1}^n p_{nr}^2.$$

LEMAT 2.2. *Mamy*

$$(2.3) \quad S_k^*(n) = \frac{\tilde{p}_n^k}{k!} - \sum_{i=1}^k \frac{\varphi_i(n) \tilde{p}_n^{k-i}}{i(i+1) \dots k}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie

$$\varphi_i(n) = \begin{cases} 0, & i = 1, \\ \tilde{p}_n^{(2)}, & i = 2, \\ (i-1) \sum_{r=1}^n p_{nr}^2 \cdot \sum_{(**)r} p_{nj_1} \dots p_{nj_{i-2}}, & i = 3, 4, \dots, n. \end{cases}$$

Sumowanie $\sum_{(**)r}$ rozciąga się na wszystkie układy liczb $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{i-2} \leq n$ takie, że $j_1 \neq r, j_2 \neq r, \dots, j_{i-2} \neq r$.

D o w ó d. Dla $k = 1$ mamy

$$S_1^*(n) = \tilde{p}_n \quad \text{oraz} \quad \varphi_1(n) = 0.$$

Założmy, że prawdziwy jest wzór

$$(2.4) \quad S_{k-1}^*(n) = \frac{\tilde{p}_n^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\varphi_i(n) \tilde{p}_n^{k-i-1}}{i(i+1) \dots (k-1)}.$$

Po pomnożeniu równości (2.4) przez $\tilde{p}_n$ otrzymujemy

$$(2.5) \quad \tilde{p}_n S_{k-1}^*(n) = \frac{\tilde{p}_n^k}{(k-1)!} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\varphi_i(n) \tilde{p}_n^{k-i}}{i(i+1) \dots (k-1)}.$$

Z drugiej strony, mamy

$$(2.6) \quad \tilde{p}_n S_{k-1}^*(n) = k S_k^*(n) + (k-1) \sum_{r=1}^n p_{nr}^2 \cdot \sum_{(**)r} p_{nj_1} \dots p_{nj_{k-2}}.$$

Odejmując stronami (2.5) i (2.6), po prostych przekształceniach, otrzymujemy (2.3). To kończy dowód lematu 2.2.

TWIERDZENIE 2.2. *Jeżeli spełnione są następujące warunki:*

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{p}_n = \lambda > 0,$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{p}_n^{(2)} = 0,$$

to zachodzi (TP).

D o w ó d. Z lematu 2.2 i faktu, że

$$\varphi_i(n) \leq (i-1) \tilde{p}_n^{(2)} S_{i-2}^*(n), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

wynika

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_k^*(n) = \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

A to, na mocy wniosku 2.1, kończy dowód twierdzenia 2.2.

U w a g a. Łatwo pokazać (patrz B. O. Koopman [12]), że warunki (i) oraz (ii) są także warunkami koniecznymi na to, aby zachodziło (TP).

3. Twierdzenie Poissona dla zdarzeń zależnych. Twierdzenie, które udowodnimy w niniejszym paragrafie jest wersją twierdzenia B. A. Sewastjanowa [16] z nieznacznie osłabionymi założeniami. Podany dowód różni się od oryginalnego dowodu Sewastjanowa.

Twierdzenie 2.3 (Sewastjanowa). *Jeżeli spełnione są założenia (i) oraz (ii) twierdzenia 2.2 oraz dla $k = 2, 3, \dots, n$, $n = 2, 3, \dots$, istnieją zbiory*

$$V_k(n) \subset \{(j_1, j_2, \dots, j_k) : 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n\}$$

takie, że

$$(iii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(1)} P(I_{nj_1} \cdot \dots \cdot I_{nj_k} = 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(1)} p_{nj_1} \cdot \dots \cdot p_{nj_k},$$

gdzie sumowanie $\sum_{(1)}$ rozciąga się na wszystkie układy liczb $(j_1, j_2, \dots, j_k) \in V_k(n)$, oraz

$$(iv) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{(j_1, j_2, \dots, j_k) \notin V_k(n)} \left| \frac{P(I_{nj_1} \cdot \dots \cdot I_{nj_k} = 1)}{p_{nj_1} \cdot \dots \cdot p_{nj_k}} - 1 \right| = 0,$$

to zachodzi (TP).

D o w ó d. Ponieważ

$$\left| S_k(n) - \frac{\lambda^k}{k!} \right| \leq |S_k(n) - S_k^*(n)| + \left| S_k^*(n) - \frac{\lambda^k}{k!} \right|,$$

więc z wniosku 2.1 i dowodu twierdzenia 2.2 wynika, że twierdzenie 2.3 będzie udowodnione, jeżeli pokażemy, że

$$(2.7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |S_k(n) - S_k^*(n)| = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Rozważmy wobec tego

$$(2.8) \quad S_k(n) = \sum_{(1)} P(I_{nj_1} \cdot \dots \cdot I_{nj_k} = 1) + \sum_{(2)} P(I_{nj_1} \cdot \dots \cdot I_{nj_k} = 1),$$

gdzie sumowanie $\sum_{(2)}$ rozciąga się na wszystkie układy liczb $(j_1, j_2, \dots, j_k) \notin V_k(n)$.

Z warunku (iv) otrzymujemy dla każdego $\varepsilon > 0$, $(j_1, j_2, \dots, j_k) \notin V_k(n)$ i dostatecznie dużych n , że

$$(1 - \varepsilon) p_{nj_1} \cdot \dots \cdot p_{nj_k} < P(I_{nj_1} \cdot \dots \cdot I_{nj_k} = 1) < (1 + \varepsilon) p_{nj_1} \cdot \dots \cdot p_{nj_k}.$$

Stąd

$$(1 - \varepsilon) \sum_{(2)} p_{nj_1} \cdot \dots \cdot p_{nj_k} < \sum_{(2)} P(I_{nj_1} \cdot \dots \cdot I_{nj_k} = 1) < (1 + \varepsilon) \sum_{(2)} p_{nj_1} \cdot \dots \cdot p_{nj_k},$$

co w połączeniu z założeniem (iii) i wzorem (2.8) daje (2.7).

Metodę momentów dwumianowych można również zastosować w dowodzie twierdzenia Poissona dla zdarzeń wymienialnych (ang. exchangeable events).

Zdarzenia $A_1, A_2, \dots$, nazywamy *wymienialnymi*, jeżeli prawdopodobieństwo $\alpha_k = P(A_{r_1} \cap \dots \cap A_{r_k})$, $k = 1, 2, \dots$, dla różnych wyborów wskaźników $r_1, r_2, \dots, \dots, r_k$, zależy jedynie od ich ilości, tzn. od k .

Zauważmy, że dla zdarzeń wymienialnych

$$S_k(n) = \sum_{(*)} P(I_{nj_1} \cdot \dots \cdot I_{nj_k} = 1) = \binom{n}{k} \alpha_{nk},$$

gdzie

$$\alpha_{nk} = P(A_{n_1} \cap \dots \cap A_{n_k}), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Stąd i z wniosku 2.1 otrzymujemy natychmiast

Twierdzenie 2.4. *Jeżeli dla stałej $\lambda > 0$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \alpha_{nk} = \lambda^k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

to zachodzi (TP).

Analogiczne twierdzenie dla przypadku, gdy $A_{n_1}, A_{n_2}, \dots$, $n = 1, 2, \dots$, jest nieskończonym ciągiem zdarzeń z n zdarzeniami wymienialnymi udowodnił inną metodą D. G. Kendall [11].

III. Metoda aproksymacji

Zastosowanie metody aproksymacji w dowodach twierdzeń Poissona przedstawimy na dwóch przykładach, opartych na ideach zawartych w pracach D. Freedmana [6] i M. R. Leadbettera [14]. Miarą rozbieżności rozkładu zmiennej losowej I_n i rozkładu Poissona będzie tu metryka całkowitej wariacji (ang. total variation metric) oraz wartość bezwzględna.

1. Aproksymacja w metryce całkowitej wariacji. Niech X i Y będą nieujemnymi zmiennymi losowymi przyjmującymi wartości całkowite. Rozkłady ich oznaczmy $\mathcal{L}(X)$ i $\mathcal{L}(Y)$. Metrykę całkowitej wariacji definiujemy następująco:

$$d(\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y)) = \sup |P(X \in B) - P(Y \in B)|,$$

gdzie supremum jest brane po wszystkich podzbiorach B zbioru liczb $\{0, 1, \dots\}$. Można pokazać, że

$$d(\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y)) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} |P(X = k) - P(Y = k)|.$$

Dany jest ciąg zdarzeń $A_1, A_2, \dots, A_n$. Niech $\mathcal{F}_i = \sigma(A_1, A_2, \dots, A_i)$ oznacza σ -ciało generowane przez zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_i$ oraz niech

$$P_i = P(A_i | \mathcal{F}_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

będzie prawdopodobieństwem warunkowym zdarzenia A_i względem σ -ciała $\mathcal{F}_i$. Oczywiście $P_i, i = 1, 2, \dots, n$, są zmiennymi losowymi.

Oznaczmy

$$\tilde{P}_n = \sum_{r=1}^n P_r, \quad \tilde{P}_n^{(2)} = \sum_{r=1}^n P_r^2.$$

Sformułujemy obecnie twierdzenie D. Freedmana [6] i podamy szkic jego dowodu.

TWIERDZENIE 3.1 (Freedmana). *Jeżeli istnieją stałe $0 \leq \mu_1 \leq \mu_2$, $0 \leq \varepsilon$ oraz $0 \leq \delta < 1$ takie, że*

$$P(\mu_1 \leq \tilde{P}_n \leq \mu_2, \tilde{P}_n^{(2)} \leq \varepsilon) \geq 1 - \delta,$$

to istnieje $\alpha > 1$ takie, że

$$d(\mathcal{L}(J_n), \mathcal{P}(\mu_1)) \leq \alpha \varepsilon + \mu_2 - \mu_1 + \delta.$$

Szkic dowodu. Pokażemy najpierw, że twierdzenie jest prawdziwe, gdy $\delta = 0$, tzn. gdy

$$(3.1) \quad P(G^*) = 1,$$

gdzie

$$G^* = \{\omega: \mu_1 \leq \tilde{P}_n(\omega) \leq \mu_2, \tilde{P}_n^{(2)}(\omega) \leq \varepsilon\}.$$

Na pewnej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ konstruujemy proces Poissona Y taki, że dla wszystkich $\omega \in \Omega$, $t, u \geq 0$, r całkowitych oraz $G \in \sigma(Y(s), s \leq t)$,

$$Y(0, \omega) = 0$$

oraz

$$P'(Y(t+u) - Y(t) = r | G) = e^{-u} \frac{u^r}{r!}.$$

Niech

$$\Phi(j) = \begin{cases} 0, & j = 0, \\ 1, & j \geq 1, \end{cases}$$

oraz niech

$$\lambda_0 = 0, \quad p_1 = P(A_1), \quad \lambda_1 = -\log(1 - p_1), \quad A_1 = \lambda_1, \quad X_1 = \Phi(Y(A_1)).$$

Zatem

$$P'(X_1 = 0) = e^{-\lambda_1} = 1 - p_1 = P(I_1 = 0),$$

tzn. X_1 ma taki sam rozkład jak indykator I_1 zdarzenia A_1 , oraz $\{X_1 = x_1\} \in \sigma(Y(s), s \leq \lambda_1)$, gdzie $x_1 = 0$ lub 1 .

Dalej przyjmujemy wektorowy zapis z umową $\underline{z}_m = (z_1, \dots, z_m)$ i definiujemy rekurencyjnie dla $m = 1, 2, \dots, n-1$:

$$p_{m+1}(x_m) = P(I_{m+1} = 1 | I_1 = x_1, \dots, I_m = x_m),$$

$$\lambda_{m+1}(x_m) = -\log(1 - p_{m+1}(x_m)),$$

$$\Lambda_{m+1}(x_m) = \lambda_1 + \lambda_2(x_1) + \dots + \lambda_{m+1}(x_m),$$

$$\Lambda_{m+1} = \Lambda_{m+1}(\underline{X}_m)$$

oraz

$$X_{m+1} = \Phi(Y(\Lambda_{m+1}) - Y(\Lambda_m)),$$

gdzie x_m jest wektorem zer lub jedynek.

Sprawdzamy następnie, że $\underline{X}_n$ ma taki sam rozkład jak $\underline{I}_n$, gdzie I_k jest indykátorem zdarzenia A_k , $k = 1, 2, \dots, n$. Stąd

$$d(\mathcal{L}(J_n), \mathcal{P}(\mu_1)) = d(\mathcal{L}(\bar{X}_n), \mathcal{P}(\mu_1)),$$

gdzie

$$\bar{X}_n = \sum_{r=1}^n X_r.$$

Oznaczmy

$$C_m = \{Y(\Lambda_m) - Y(\Lambda_{m-1}) \geq 2\} \quad \text{ i } \quad C = \bigcup_{m=1}^n C_m.$$

Zauważmy, że

$$X_m = Y(\Lambda_m) - Y(\Lambda_{m-1}) \quad \text{ poza } C_m,$$

a więc

$$\bar{X}_m = Y(\Lambda_m) \quad \text{ poza } C, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

Na mocy założenia (3.1) otrzymujemy, że

$$P'(C) \leq \frac{1}{2} k_1 \cdot \varepsilon,$$

gdzie k_1 jest pewną stałą i stąd mamy

$$(3.2) \quad d(\mathcal{L}(\bar{X}_n), \mathcal{L}(Y(\Lambda_n))) \leq P'(\bar{X}_n \neq Y(\Lambda_n)) \leq P'(C) \leq \frac{1}{2} k_1 \cdot \varepsilon.$$

Pozostaje zatem oszacować

$$d(\mathcal{L}(Y(\Lambda_n)), \mathcal{P}(\mu_1)) = d(\mathcal{L}(Y(\Lambda_n)), \mathcal{L}(Y(\mu_1))).$$

Ponieważ z (3.1) $\mu_1 \leq \Lambda_n \leq \mu_2 + k_2 \varepsilon$, gdzie k_2 jest pewną stałą, to

$$\begin{aligned} d(\mathcal{L}(Y(\Lambda_n)), \mathcal{P}(\mu_1)) &= P'(Y(\Lambda_n) \neq Y(\mu_1)) \leq \\ &\leq P'(Y(\mu_2 + k_2 \varepsilon) - Y(\mu_1) \geq 1) \leq k_2 \varepsilon + \lambda_2 - \lambda_1. \end{aligned}$$

To, w połączeniu z (3.2), kończy dowód w przypadku, gdy $\delta = 0$.

Twierdzenie w postaci ogólnej dowodzimy konstruując zmienne losowe, których suma równa się $I_1 + I_2 + \dots + I_n$ na zbiorze G^* i stosując do nich przypadek już udowodniony.

Niech teraz

$$\mathcal{F}_{nr} = \sigma(A_{n1}, \dots, A_{nr}), \quad P_{nr} = P(A_{nr} | \mathcal{F}_{nr-1}),$$

$r = 1, 2, \dots, n, n = 1, 2, \dots$, oraz

$$\tilde{P}_n = \sum_{r=1}^n P_{nr}, \quad \tilde{P}_n^{(2)} = \sum_{r=1}^n P_{nr}^2.$$

Jako wniosek z twierdzenia 3.1 otrzymujemy następujące twierdzenie Poissona.

Twierdzenie 3.2. *Jeżeli dla stałej $\lambda > 0$ i $n \rightarrow \infty$*

$$\tilde{P}_n \xrightarrow{P} \lambda, \quad \tilde{P}_n^{(2)} \xrightarrow{P} 0,$$

to zachodzi (TP).

D o w ó d. Wystarczy udowodnić, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\mathcal{L}(J_n), \mathcal{P}(\lambda)) = 0,$$

gdyż zbieżność rozkładów w metryce d pociąga ich słabą zbieżność.

Niech $\varepsilon > 0$. Z założeń wynika, że istnieje N naturalne takie, że dla $n > N$

$$P(\lambda - \varepsilon \leq \tilde{P}_n \leq \lambda + \varepsilon, \tilde{P}_n^{(2)} \leq \varepsilon) \geq 1 - \varepsilon.$$

Z twierdzenia 3.1 otrzymujemy

$$d(\mathcal{L}(J_n), \mathcal{P}(\lambda - \varepsilon)) \leq \alpha\varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon = (3 + \alpha)\varepsilon.$$

Dowód kończy nierówność

$$d(\mathcal{P}(\lambda - \varepsilon), \mathcal{P}(\lambda)) \leq \varepsilon$$

udowodniona na przykład w [6].

Identyczną tezę otrzymał N. Kaplan [10], również jako wniosek z twierdzenia D. Freedmana, ale przy założeniach: dla $n \rightarrow \infty$

$$\tilde{P}_{k_n} \xrightarrow{L_1} \lambda > 0, \quad \tilde{P}_{k_n}^{(2)} \xrightarrow{L_1} 0,$$

$$\left| \sum_{r=1}^{k_n} (P_{k_n r} - E(P_{k_n r})) \right| \xrightarrow{L_1} 0,$$

gdzie λ jest stałą, a $k_n \uparrow \infty$.

2. Aproksymacja w metryce wartości bezwzględnej. Niech (1.3) będą zdarzeniami takimi, że dla $n \rightarrow \infty$

$$(3.3) \quad q_n = P(A_{nr}) = \lambda/n + o(1/n), \quad r = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie $\lambda > 0$ jest stałą.

Założmy, że ciąg ten spełnia warunek silnego mieszania, tzn. dla dowolnych liczb całkowitych

$$1 \leq i_1 < \dots < i_l < j_1 < \dots < j_m \leq n, \quad j_l - i_l \geq k,$$

mamy

$$(3.4) \quad \left| P\left(\bigcup_{s=1}^l A_{nI_s} \cap \bigcup_{t=1}^m A_{nJ_t}\right) - P\left(\bigcup_{s=1}^l A_{nI_s}\right) P\left(\bigcup_{t=1}^m A_{nJ_t}\right) \right| \leq \alpha_{nk},$$

oraz

$$(3.5) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{nk} = 0.$$

Niech $N = sn$, $n = 1, 2, \dots$, gdzie s jest ustaloną liczbą naturalną. Załóżmy także, że

$$(3.6) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} n \sum_{r=2}^n P(A_{N1} \cap A_{Nr}) = o(1/s), \quad \text{gdy } s \rightarrow \infty.$$

Sformułujemy obecnie twierdzenie M. R. Leadbettera [14] i podamy szkic jego dowodu

Twierdzenie 3.3 (Leadbettera). *Jeżeli zdarzenia (1.3) spełniają założenia (3.3)–(3.6), to zachodzi (TP).*

Szkic dowodu. Niech $E_1, \dots, E_s$ oraz $E_1^*, \dots, E_s^*$ będą następującym rozbiem zbioru liczb całkowitych $\{1, 2, \dots, N\}$: $E_1 = \{1, \dots, n-m\}$, $E_1^* = \{n-m+1, \dots, n\}$, $E_2 = \{n+1, \dots, 2n-m\}$, $E_2^* = \{2n-m+1, \dots, 2n\}$, itd., gdzie m jest liczbą naturalną.

Niech

$$J_n(E) = \sum_{j \in E} I_{nj},$$

gdzie E jest podzbiorem $\{1, 2, \dots, n\}$. Oznaczmy przez B_r zdarzenie, że nierówność $J_N(E_j) \geq 1$ zachodzi dla przynajmniej r wartości spośród $j = 1, 2, \dots, s$ i niech $C_r = B_r - B_{r+1}$.

Ponieważ dla $s \geq r$ mamy

$$\begin{aligned} |P(J_n = r) - P_r(\lambda)| &\leq \left| P(J_n = r) - \binom{s}{r} (1 - e^{-\lambda/s})^r e^{-(\lambda/s)(s-r)} \right| + \\ &\quad + \left| \binom{s}{r} (1 - e^{-\lambda/s})^r e^{-(\lambda/s)(s-r)} - P_r(\lambda) \right|, \end{aligned}$$

to teza twierdzenia wynika z następujących faktów (patrz [14]):

- (i) $\lim_{s \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} |P(J_N = r) - P(C_r)| = 0$,
 - (ii) $\left| P(C_r) - \binom{s}{r} b_N^{s-r} (1 - b_N)^r \right| \leq (s-1) \binom{s}{r} 2^r \alpha_{Nm}$, gdzie $b_N = P\left(\bigcap_{j \in E_1} A_{Nj}\right)$,
 - (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_N = e^{-\lambda/s}$,
 - (iv) $\lim_{s \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| P(J_n = r) - \binom{s}{r} (1 - e^{-\lambda/s})^r e^{-(\lambda/s)(s-r)} \right| = 0$,
- oraz z tego, że
- (v) $\lim_{s \rightarrow \infty} \binom{s}{r} (1 - e^{-\lambda/s})^r e^{-(\lambda/s)(s-r)} = P_r(\lambda)$, $r = 0, 1, \dots$

IV. Metoda mieszanek

Podstawowym dla metody mieszanek jest twierdzenie udowodnione przez J. Galambosa [8]. Przedstawimy je tutaj wraz z wnioskiem: twierdzeniem Poissona dla zdarzeń wymiennych, otrzymanym wcześniej przez A. Benczura [1] metodą funkcji tworzących.

1. Twierdzenie J. Galambosa. Przyjmijmy następujące oznaczenia i założenia:

Dla dwuparametrowej (λ, α) rodziny dyskretnych rozkładów $f_k(\lambda, \alpha)$, $k = 0, 1, \dots$, istnieją ciągi $\{\lambda_n\}$ i $\{\alpha_n\}$ takie, że dla każdego rzeczywistego $a > 0$

$$(4.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_k(\lambda_n, \alpha_n) = g_k(a), \quad k = 0, 1, \dots,$$

gdzie $g_k(a)$ jest jednoparametrową rodziną rozkładów.

Rozkład $g_k(a)$, $k = 0, 1, \dots$, generuje identyfikowalną mieszaną rozkładów, tzn. dystrybucję $U(a)$ taką, że $U(0) = 0$, jest jednoznacznie wyznaczona przez ciąg

$$(4.2) \quad s_k = \int_0^{\infty} g_k(a) dU(a), \quad k = 0, 1, \dots$$

Twierdzenie 4.1 (Galambosa). *Jeżeli $\{U(a)\}$ jest ciągiem dystrybucji takich, że $U_n(0) = 0$, $n = 1, 2, \dots$, oraz spełnione jest założenie (4.1), gdzie $g_k(a)$, $k = 0, 1, \dots$, generuje identyfikowalną mieszaną, to granica*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_k(\lambda_n, \alpha_n) dU_n(a) = s_k$$

istnieje i s_k , $k = 0, 1, \dots$, jest rozkładem prawdopodobieństwa wtedy i tylko wtedy, gdy granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(a) = U(a)$$

istnieje w punktach ciągłości $U(a)$ i $U(a)$ jest właściwą dystrybucją.

W przypadku istnienia s_k i $U(a)$ związane są wzorem (4.2).

Dowód (patrz [8]), przeprowadzony metodą funkcji charakterystycznych, pomijamy.

2. Twierdzenie A. Benczura. Udowodnimy teraz jako wniosek z twierdzenia 4.1 twierdzenie o zbieżności sum indyktorów zdarzeń wymiennych do mieszanego rozkładu Poissona.

Twierdzenie 4.2 (Benczura). *Jeżeli $A_{n1}, A_{n2}, \dots$, $n = 1, 2, \dots$, przy ustalonym n są zdarzeniami wymiennymi, to dla pewnej właściwej dystrybucji $U(a)$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(J_n = k) = \int_0^{\infty} P_k(a) dU(a), \quad k = 0, 1, \dots,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego ciągu dystrybuant właściwych takich, że $U_n(0) = 0$, $n = 1, 2, \dots$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n \left(\frac{a}{n} \right) = U(a)$$

w punktach ciągłości $U(a)$.

D o w ó d. Na mocy faktu udowodnionego przez B. de Finetti [5], dla $n = 1, 2, \dots$, istnieją zmienne losowe X_n , $0 \leq X_n \leq 1$ p.w., o rozkładach $U_n(x)$ takie, że

$$\alpha_{nr} = P(A_{n1} \cap \dots \cap A_{nr}) = \int_0^1 x^r dU_n(x).$$

Zatem

$$(4.3) \quad P(J_n = k) = \int_0^1 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} dU_n(x).$$

Sprawdzimy, że dwuparametrowa rodzina rozkładów $f_k(\lambda, \alpha) = \binom{\lambda}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{\lambda-k}$ spełnia założenie (4.1). Istotnie, dla każdego $a > 0$, $\lambda_n = n$ i $\alpha_n = 1/n$ mamy

$$\binom{\lambda_n}{k} (\alpha_n)^k (1 - \alpha_n)^{\lambda_n - k} = \binom{n}{k} \left(\frac{a}{n} \right)^k \left(1 - \frac{a}{n} \right)^{n-k} \rightarrow P_k(a), \quad n \rightarrow \infty,$$

stąd

$$g_k(a) = e^{-a} \frac{a^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Wiadomo także, że rozkład Poissona generuje identyfikowalną mieszanę (patrz [8], [9]). Na mocy (4.3) i twierdzenia 4.1 otrzymujemy zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(J_n = k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \binom{n}{k} \left(\frac{a}{n} \right)^k \left(1 - \frac{a}{n} \right)^{n-k} dU(a) = \int_0^\infty P_k(a) dU(a)$$

wtedy i tylko wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n^*(a) = U(a)$$

w punktach ciągłości $U(a)$, gdzie $U_n^*(a) = U_n(a/n)$, tzn. wtedy, gdy rozkłady U_n zmiennych losowych nX_n są słabo zbieżne do pewnego rozkładu U . To kończy dowód twierdzenia 4.2.

Prace cytowane

- [1] A. Benczur, *On sequences of equivalent events and the compound Poisson process*, Studia Sci. Math. Hungar. 3 (1968), str. 451-458.
- [2] W. Dziubdziela, *Rozkłady graniczne ekstremalnych statystyk pozycyjnych*, Mat. Stos. 9 (1977), str. 45-71.
- [3] W. Dziubdziela, B. Kopociński, *Oszacowania niezawodności systemów*, Mat. Stos. 15 (1979), str. 61-73.

- [4] W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, Warszawa 1966.
- [5] B. de Finetti, *Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio*, Atti Accad. Naz. Lincei. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) 4 (1930), str. 86–133.
- [6] D. Freedman, *The Poisson approximation for dependent events*, Ann. Prob. 2 (1974), str. 256–269.
- [7] J. Galambos, *A limit theorem with applications in order statistics*, J. Appl. Prob. 11 (1974), str. 219–222.
- [8] —, *Limit laws for mixtures with applications to asymptotic theory of extremes*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete 32 (1975), str. 197–207.
- [9] —, *The asymptotic theory of extreme order statistics*, New York 1978.
- [10] N. Kaplan, *Two applications of a Poisson approximation for dependent events*, Ann. Prob. 5 (1977), str. 787–794.
- [11] D. G. Kendall, *On finite and infinite sequences of exchangeable events*, Studia Sci. Math. Hungar. 2 (1967), str. 319–327.
- [12] B. O. Koopman, *Necessary and sufficient conditions for Poisson's distribution*, Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), str. 813–823.
- [13] B. Kopociński, *Zarys teorii odnowy i niezawodności*, Warszawa 1973.
- [14] M. R. Leadbetter, *On extreme values in stationary sequences*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete 28 (1974), str. 298–309.
- [15] S. D. Poisson, *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*, Paris 1837.
- [16] B. A. Sewast'janow (Б. А. Севастьянов), *Предельный закон Пуассона в схеме сумм зависимых случайных величин*, Теория вероятностей и ее применения 17 (1972), str. 733–738.
- [17] L. Takács, *On a general probability theorem and its applications in the theory of stochastic processes*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 54 (1958), str. 219–224.
- [18] —, *A moment problem*, J. Austral. Math. Soc. 5 (1965), str. 487–490.
- [19] —, *On the method of inclusion and exclusion*, J. Amer. Statist. Assoc. 62 (1967), str. 102–113.