

BENIAMIN GOŁDYS (Warszawa)

Przedział ufności o zadanej precyzji dla wartości średniej w ciągu zmiennych gaussowskich

(Praca wpłynęła do Redakcji 24.5.1979)

Wstęp. Rozważmy proces stochastyczny z czasem dyskretnym $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ postaci

$$(1) \quad X_t = m + m_t + \xi_t,$$

gdzie $m \in R$, $\{m_t\}_{t=1}^{\infty}$ jest zbieżnym do zera ciągiem liczb rzeczywistych, $\{\xi_t\}_{t=1}^{\infty}$ jest ciągiem zmiennych losowych gaussowskich o rozkładach $N(0, \sigma_t)$ gdzie $\{\sigma_t\}_{t=1}^{\infty}$ jest zbieżnym do zera ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich. Załóżmy, że nie znamy dokładnie żadnego z tych parametrów; mamy natomiast pewne informacje (sprecyzujemy je później) o szybkości zbieżności ciągów $\{m_t\}_{t=1}^{\infty}$ i $\{\sigma_t\}_{t=1}^{\infty}$ do zera. Celem naszym będzie konstrukcja przedziału ufności o zadanej precyzji i zadany poziom ufności dla nieznanego parametru m .

W 1969 r. Blum i Rosenblatt [1] rozważali pewną podklasę procesów postaci (1) i udowodnili, że dla procesów z tej klasy przedział ufności o zadanej precyzji skonstruować się nie da. Jak pokazał Zieliński w [2], trudność tę można pokonać, jeśli założymy, że mamy do dyspozycji $k \geq 4$ niezależnych kopii procesu $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$. Zieliński rozważał następnie w [3] podklasę procesów postaci (1) spełniających warunek $(\forall t \in N) m_t = 0$, to znaczy, procesów zdefiniowanych wzorem

$$X_t = m + \xi_t,$$

gdzie założenia o m i $\{\xi_t\}_{t=1}^{\infty}$ są takie same jak dla procesu (1). (Ta klasa procesów zawiera w sobie procesy badane przez Bluma i Rosenblatta.) Znowu mając do dyspozycji k niezależnych kopii procesu skonstruował on przedział ufności o zadanej precyzji. Technikę tę zastosujemy teraz do ogólnego przypadku (1).

W języku tego ogólnego modelu można opisać pewne procedury aproksymacji stochastycznej, a uzyskane wyniki użyć w rozwiązywaniu problemu stopowania takich procesów.

Formalizacja. Niech c_0 będzie przestrzenią zbieżnych do zera ciągów liczb rzeczywistych, $c_0^+ \subset c_0$ niech będzie zbiorem takich ciągów o wyrazach dodatnich, niech $W = R \times c_0 \times c_0^+$.

Założmy, że $(\Omega, \mathcal{F}, \{P_w, w \in W\})$ jest pewną strukturą statystyczną, a $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ jest ciągiem zmiennych losowych, takich że $(\forall t \in N) X_t: \Omega \rightarrow R$ jest zmienną losową



postaci (1) tzn. dla każdego $w = (m, \{m_t\}_{t=1}^{\infty}, \{\sigma_t\}_{t=1}^{\infty}) \in W$ mamy

$$P_w(X_t < x) = \Phi\left(\frac{x - m - m_t}{\sigma_t}\right),$$

gdzie $x \in R$ i Φ oznacza dystrybuantę rozkładu normalnego $N(0, 1)$.

Celem naszym jest skonstruować ciąg estymatorów $\{\hat{m}_t\}_{t=1}^{\infty}$ nieznanego parametru m i regułę zatrzymania τ , takie by dla dowolnych, z góry zadanych wartości $\varepsilon > 0$ i $\gamma \in (0, 1)$ spełniony był warunek

$$(\forall w \in W) \quad P_w(|\hat{m}_t - m| > \varepsilon) < \gamma.$$

Podobnie jak w [2] założmy, że możemy obserwować $k > 1$ niezależnych kopii procesu $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$, to znaczy mamy do dyspozycji rodzinę identycznych procesów $\{X_t^{(i)}\}_{t=1}^{\infty}$, $i = 1, \dots, k$. Dla każdego naturalnego t przyjmujemy

$$\hat{m}_t = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_t^{(i)}.$$

Niech $a = \{a_t\}_{t=1}^{\infty}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich zbieżnym do zera. Niech $b = \{b_t\}_{t=1}^{\infty}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich. Niech $Z(a, b)$ będzie podzbiorem przestrzeni parametrów W zdefiniowanym w następujący sposób:

$$Z(a, b) = \{w \in W; (\forall t \in N) \sigma_t \leq a_t, |m_t| \leq \sigma_t b_t\}.$$

Założmy, że nie znamy dokładnej wartości parametru w , związanego z badanym procesem (1) ale wiemy, że w należy do pewnego zbioru $Z(a, b)$ oraz ciągi a i b są nam znane. Wtedy przez $D = D(k, a, b)$ będziemy oznaczać klasę ciągów liczb rzeczywistych dodatnich $d = \{d_t\}_{t=1}^{\infty}$ o własnościach:

- (a) $\lim_{t \rightarrow \infty} d_t a_t = 0,$
 (b) $\sum_{t=1}^{\infty} b_t^{k-1} d_t^{-(k-1)} < \infty,$
 (c) $\sum_{t=1}^{\infty} d_t^{-(k-1)} < \infty.$

Niech $D_m^{\varepsilon} \subset D$ oznacza zbiór ciągów spełniających dodatkowo warunek

$$(d) \quad \sum_{t=1}^{\infty} t^m a_{t-1} d_{t-1} \exp\left[-\frac{k\varepsilon^2}{4a_{t-1}^2 d_{t-1}^2}\right] < \infty,$$

gdzie $\varepsilon > 0$ i $m \in N$ są pewnymi z góry zadanyimi liczbami. Oczywiście k, a, b, m, ε mogą być tak dobrane, że klasa D lub podklasa D_m^{ε} okaże się pusta.

Obecnie zdefiniujemy moment zatrzymania τ . Niech

$$S_t^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (X_t^{(i)} - \hat{m}_t)^2,$$

niech $d = \{d_t\}_{t=1}^{\infty}$ będzie pewnym ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich, a T ustaloną liczbą naturalną. Wtedy

$$\tau = \tau(T, \varepsilon, d) = \begin{cases} \inf \{t > T; d_t S_t < \varepsilon\} & \text{gdy takie } t \text{ istnieje,} \\ \infty & \text{gdy takie } t \text{ nie istnieje.} \end{cases}$$

W dalszym ciągu udowodnimy, że gdy $d \in D$, to τ jest „porządnym” momentem zatrzymania, tzn. $\tau < \infty$ z prawdopodobieństwem 1, oraz pokażemy, że spełnione jest następujące

Twierdzenie. Niech $\{X_t^{(i)}\}_{t=1}^{\infty}$ ($i = 1, \dots, k$) będą niezależnymi kopiami procesu opisanego wzorem (1). Załóżmy, że istnieją ciągi a, b takie, że $(m, \{m_t\}_{t=1}^{\infty}, \{\sigma_t\}_{t=1}^{\infty}) \in Z(a, b)$. Załóżmy również, że klasa D jest niepusta. Wtedy $(\forall \gamma \in (0, 1)) (\forall \varepsilon > 0) (\forall d \in D) (\exists T_\gamma)$ takie, że moment zatrzymania $\tau = \tau(T_\gamma, \varepsilon, d)$ spełnia warunek

$$(\forall \varepsilon \in Z(a, b)) P_w(|\hat{m}_\tau - m| > \varepsilon) < \gamma.$$

Twierdzenie to pozwala nam budować przedział ufności o zadanej precyzji dla parametru m tylko na podstawie znajomości oszacowań ciągów $\{\sigma_t\}_{t=1}^{\infty}$ i $\{m_t, \sigma_t^{-1}\}_{t=1}^{\infty}$. Żadna wiedza o stopniu wzajemnej zależności zmiennych losowych ξ_t nie jest potrzebna. Jeśli dodatkowo wiemy, że ciąg $\{m_t, \sigma_t^{-1}\}_{t=1}^{\infty}$ jest ograniczony, to elementy klasy D muszą spełniać tylko warunki (a) i (c).

Własności momentu zatrzymania τ . Zauważmy na początek, że zmienna losowa kS_t^2 ma rozkład $\sigma^2 \chi_{k-1}^2$. Fakt ten pozwoli łatwo udowodnić poniższe lematy.

LEMAT 1. Załóżmy, że dla procesu (1) klasa D jest niepusta. Wtedy $(\forall \varepsilon > 0) (\forall d \in D) (\forall T \in N)$ spełniony jest warunek

$$(\forall w \in Z(a, b)) \quad P_w(\tau(T, \varepsilon, d) < \infty) = 1.$$

D o w ó d. Z nierówności Czebyszewa dostajemy

$$P_w(d_t S_t > \varepsilon) \leq \frac{d_t^2}{\varepsilon^2} E_w S_t^2 = \frac{k-1}{k\varepsilon^2} (\sigma_t d_t)^2.$$

Z założenia więc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_w(d_t S_t > \varepsilon) = 0,$$

a stąd natychmiast wynika teza lematu.

LEMAT 2. Niech $\varepsilon > 0$ i $m \in N$ będą ustalone i dla procesu (1) niech będzie niepusta klasa D_m^* . Wtedy $(\forall d \in D_m^*) (\forall T \in N)$ spełniony jest warunek

$$(\forall w \in Z(a, b)) \quad E_w \tau^m < \infty.$$

D o w ó d. Z definicji momentu zatrzymania mamy

$$E_w \tau^m = \sum_{t=T+1}^{\infty} t^m P_w(\tau = t) \leq (T+1)^m + \sum_{t>T+1}^{\infty} t^m P_w(\tau \geq t).$$

Dla $t > T$ mamy $P_w(\tau \geq t) \leq P_w(d_{t-1} S_{t-1} \geq \varepsilon) = A_k \int_{x_{t-1}}^{\infty} x^{k-2} \exp(-\frac{1}{2}x^2) dx$, gdzie

$$A_k = \left(2^{\frac{(k-3)}{2}} \Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right) \right)^{-1}, \quad x_t = \frac{\varepsilon \sqrt{k}}{\sigma_t d_t}.$$

Z założenia $\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = \infty$. Istnieje też takie y_0 , że dla $x > y_0$ mamy

$$x^{k-2} e^{-\frac{1}{2}x^2} \leq e^{-\frac{1}{4}x^2}.$$

Stąd istnieje t_0 , takie że dla $t > t_0$ mamy $x_{t-1} > y_0$ i dla takich t mamy

$$P_w(d_{t-1} S_{t-1} \geq \varepsilon) \leq 2A_k \frac{1}{x_{t-1}} e^{-\frac{1}{4}x_{t-1}^2}.$$

Stąd wynika teza lematu.

U w a g a 1. Klasa D została zdefiniowana dla potrzeb twierdzenia. Jasne jest, że w rzeczywistości warunek (a) z definicji tej klasy wystarczy dla prawdziwości tezy lematu 1, a warunek (d) dla prawdziwości tezy lematu 2.

U w a g a 2. Łatwo pokazać, że jeśli klasa D jest niepusta i zawiera ciąg $d = \{t^\alpha\}_{t=1}^\infty$ ($\alpha > 0$), to $E_w \tau^m < \infty$ dla każdego naturalnego m .

Dowód twierdzenia. Zaczniemy od oszacowania ogona niecentralnego rozkładu T Studenta o k stopniach swobody i parametrze niecentralności δ . Będziemy ten rozkład oznaczać przez $T(k, \delta)$. Z definicji tego rozkładu mamy

$$T(k, \delta) = t_k + \frac{\delta \sqrt{k}}{\sqrt{\chi_k^2}},$$

gdzie t_k — centralny rozkład Studenta o k stopniach swobody i χ_k^2 — rozkład chi-kwadrat o k stopniach swobody. Dokonując prostych oszacowań otrzymujemy dla $\alpha \in (0, 1)$, $x > 0$:

$$\begin{aligned} (2) \quad P(|T(k, \delta)| > x) &\leq P(|t_k| > (1-\alpha)x) + P\left(\chi_k^2 < \frac{k\delta^2}{\alpha^2 x^2}\right) \leq \\ &\leq (c_1(k, \alpha) + c_2(k, \alpha) |\delta|^k) x^{-k}. \end{aligned}$$

Przejdziemy teraz do dowodu twierdzenia. Zauważmy, że dla każdego $w \in Z(a, b)$ mamy

$$\begin{aligned} P_w(|\hat{m}_\tau - m| > \varepsilon) &= \sum_{t=T+1}^{\infty} P_w(|\hat{m}_t - m| > \varepsilon, \tau = t) \leq \\ &\leq \sum_{t=T+1}^{\infty} P_w(|\hat{m}_t - m| > \varepsilon, \varepsilon > d_t S_t) \leq \sum_{t=T+1}^{\infty} P_w(|\hat{m}_t - m| > d_t S_t) = \\ &= \sum_{t=T+1}^{\infty} P_w\left(\frac{\sqrt{k} |\hat{m}_t - m|}{S_t} > d_t \sqrt{k}\right). \end{aligned}$$

Zmienna losowa $T_t = \sqrt{k}(\hat{m}_t - m)/S_t$ ma rozkład $T(k-1, m_t \delta_t^{-1} \sqrt{k})$ niezależny od parametru m . Korzystając z oszacowania (2) i założeń twierdzenia otrzymujemy

$$(\forall w \in Z(a, b)) \quad P_w(|\hat{m}_\tau - m| > \varepsilon) \leq \sum_{t=T+1}^{\infty} c_1(k, \alpha_t) \frac{1}{k^{(k-1)/2} d_t^{k-1}} + \\ + \sum_{t=T+1}^{\infty} c_2(k, \alpha_t) b_t^{(k-1)} \frac{1}{k^{(k-1)/2} d_t^{k-1}}.$$

Z postaci stałych c_1 i c_2 oraz założeń twierdzenia wynika, że obydwa szeregi w powyższej nierówności są zbieżne. Zatem dla każdego $\gamma \in (0, 1)$ możemy dobrać T_γ takie, by zachodziła nierówność

$$(\forall w \in Z(a, b)) \quad P_w(|\hat{m}_\tau - m| > \varepsilon) < \gamma,$$

gdzie $\tau = \tau(T_\gamma, \varepsilon, d)$, co kończy dowód twierdzenia.

U w a g a. Oszacowanie (2) przy jakichkolwiek stałych c_1, c_2 pozwala nam udowodnić twierdzenie. Z punktu widzenia zastosowań jednak ważne jest, aby stałe te były jak najmniejsze, gdyż mają one wpływ na wielkość T_γ , a więc na długość reguły zatrzymania. Z tej samej przyczyny użyteczna jest stała α . Gdy $|\delta| < 1$, to można przyjąć np. $\alpha = \delta$ lub $\alpha = \sqrt{\delta}$ itd. Dla dużych δ można wziąć $\alpha = 0,5$.

PRZYKŁAD. Dla procesu (1)

$$X_t = m + m_t + \xi_t$$

załóżmy, że zmienne ξ_t mają rozkłady $N(0, \sigma t^{-1})$, gdzie $\sigma > \sigma_0 > 0$, $\sigma < \sigma_1$ i znamy stałe $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, że

$$|m_t| \leq |a|/t^{1+\beta}.$$

Weźmy k niezależnych kopii tego procesu: $X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(k)}$. Jako estymator nieznanego parametru m weźmiemy średnią

$$\hat{m}_t = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_t^{(i)}.$$

Przyjmijmy, że moment zatrzymania zdefiniowany jest wzorem

$$\tau = \inf \{t > T; d_t S_t < \varepsilon\},$$

gdzie ε — zadana precyzja estymatora, $\{d_t\}_{t=1}^{\infty}$ — pewien ciąg liczb dodatnich, T — pewna liczba naturalna i

$$S_t^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (X_t^{(i)} - \hat{m}_t)^2.$$

Niech $(\forall t \in N) d_t = t^\alpha$, gdzie $\alpha \in (0, 1)$. Wtedy ciąg $\{\delta_t\}_{t=1}^{\infty}$ ($\delta_t = m_t \sigma_t^{-1} \sqrt{k}$) spełnia warunek

$$|\delta_t| \leq \frac{a\sqrt{k}}{\sigma_0} t^{-\beta}.$$

Dobierzmy k tak, aby $(k-1)\alpha > 1$. Wtedy klasa D , a nawet klasa D_ε^m , przy dowolnym m będzie niepusta. Musimy więc wziąć $k > 2$ kopii procesu $\{X_t\}_{t=1}^\infty$. Dla takich k i α , spełniających warunek

$$\frac{1}{k-1} < \alpha < 1,$$

możemy przyjąć $\tau = \inf\{t > T; t^\alpha S_t < \varepsilon\}$ i moment τ jest skończony, ma skończone wszystkie momenty i dla każdego $\gamma \in (0, 1)$ istnieje T_γ , takie, że $(\forall w \in Z(A, B))$ $P_w(|\hat{m}_{\tau_\gamma} - m| > \varepsilon) < \gamma$, gdzie

$$\tau_\gamma = \tau(T_\gamma, \alpha, \varepsilon), \quad A = \{\sigma_1 t^{-1}\}_{t=1}^\infty, \quad B = \left\{ \frac{a\sqrt{k}}{\sigma_0} t^{-\beta} \right\}_{t=1}^\infty.$$

Praca ta zawdzięcza swoje powstanie licznym dyskusjom, jakie autor prowadził z docentem Ryszardem Zielińskim, IMPAN.

Prace cytowane

- [1] J. Blum, i Judah Rosenblatt, *On fixed precision estimation in time series*, Ann. Math. Statist. 40 (1969), str. 1021-1032.
- [2] R. Zieliński, *A class of stopping rules for fixed precision sequential estimates*, IMPAN (1978), Preprint 147.
- [3] —, *Fixed precision estimate of a gaussian sequence with unknown covariance structure*, Referat wygłoszony na konferencji w Wiśle (1978).