

MACIEJ M. SYSŁO (Wrocław) i ZDZISŁAW SKUPIEŃ (Kraków)

Stosowana teoria grafów III Grafy Eulera i Hamiltona. Zagadnienie komiwojażera

(Praca przyjęta do druku 24.11.1975)

0. Definicje	5
1. Grafy Eulera (opracował M. M. Sysło)	7
1.1. Uwagi wstępne	7
1.2. Istnienie i liczba łańcuchów i dróg Eulera	9
1.3. Algorytm wyznaczania łańcucha lub drogi Eulera	12
1.4. Zagadnienie chińskiego listonosza	13
2. Grafy Hamiltona (opracował Z. Skupień)	16
2.1. Wprowadzenie	16
2.2. Grafy hamiltonowskie i hipoteza czterech kolorów	17
2.3. Warunki konieczne	21
2.4. Grafy hipohamiltonowskie	23
2.5. Własności wysoko hamiltonowskie i operacja zespolenia grafów	25
2.6. Własności quasi-hamiltonowskie	29
2.7. Własności hamiltonowskie potęg grafów	31
2.8. Warunki wystarczające istnienia cykli i łańcuchów	33
2.9. Warunki wystarczające istnienia konturów i dróg	36
2.10. Liczba cykli i konturów, łańcuchów i dróg Hamiltona	37
3. Zagadnienie komiwojażera (opracował M. M. Sysło)	39
3.1. Sformułowania, podstawowe wyniki, zastosowania	39
3.1.1. Teoria zagadnienia	39
3.1.2. Zastosowania	41
3.2. Algorytmy rozwiązywania TSP	42
3.2.0. Uwagi ogólne	42
3.2.1. Wyznaczanie oszacowań i rozwiązań początkowych	43
3.2.2. Przybliżona metoda rozwiązywania TSP	44
3.2.3. Dokładna metoda rozwiązania TSP	45
3.2.4. Efektywność algorytmów rozwiązywania TSP	46
3.2.5. Przykład	47
3.3. Zagadnienie m komiwojażerów	48
Literatura	49

0. Definicje. W niniejszym opracowaniu rozważane są głównie *grafy* i *digrafy* (czyli grafy skierowane) *zwykle* (czyli skończone, bez pętli i bez wielokrotnych krawędzi lub łuków). Zbiór *wierzchołków*, *łuków* lub *krawędzi* oznaczamy odpowiednio przez X , U , V . Graf G i digraf D są parami odpowiednio $\langle X, V \rangle$ i $\langle X, U \rangle$. Ilość wierzchołków $|X|$ nazywamy *rzędem* i oznaczamy przez n , $n = |X|$, a ilość łuków $|U|$ lub krawędzi $|V|$ nazywamy *rozmiarem* rozważanego digrafu D lub odpowiednio grafu G . Dwa grafy są *rozłączne*, gdy nie mają wspólnych wierzchołków.

Każdy łuk $u \in U$ utożsamiamy z *parą incydentnych* do niego wierzchołków, czyli $u = (x, y)$, gdzie x jest *początkiem*, a y — *końcem* łuku (x, y) , $x, y \in X$. Krawędź

k , czyli łuk z pominięciem skierowania, utożsamiamy z *dwójką incydentnych* do niej wierzchołków, powiedzmy $x, y \in X$, i piszemy $k = xy$ lub $k = yx$. Wierzchołki x, y nazywamy *wierzchołkami skrajnymi* (lub krócej *końcami*) zarówno krawędzi xy , jak i łuku (x, y) . Dwa wierzchołki (albo dwa łuki lub dwie krawędzie) są *sąsiednie* lub są *sąsiadami*, gdy są różne i są incydentne do tego samego elementu, czyli łuku lub krawędzi (albo odpowiednio do wierzchołka).

Stopniem wierzchołka x grafu G jest liczba incydentnych do niego krawędzi, oznaczana przez $d(x)$ lub $d(x, G)$. Jeśli zaś x jest wierzchołkiem digrafu D , to $\text{od}(x)$ ($= \text{od}(x, D)$) i $\text{id}(x)$ ($= \text{id}(x, D)$) są liczbami łuków w D , dla których x jest odpowiednio początkiem i końcem. Nadto

$$d(x, D) = \text{od}(x, D) + \text{id}(x, D)$$

jest *stopniem* x w digrafie D .

Jeśli każdy wierzchołek grafu ma stopień d , to graf ten jest *regularny* stopnia d (*kubiczny* zaś dla $d = 3$).

Łańcuchem grafu (digrafu) nazywamy ciąg $\mathcal{L}$ wierzchołków i krawędzi (łuków), w którym wyrazami sąsiednimi dowolnej krawędzi (dowolnego łuku) są oba jej (jego) końce. Łańcuch $\mathcal{L}$ digrafu jest *drogą*, jeśli w nim każdy łuk poprzedzany jest przez swój początek. Jeśli $x_1, x_2, \dots, x_k$ są kolejnymi wierzchołkami w $\mathcal{L}$, to piszemy

$$\mathcal{L} = [x_1, x_2, \dots, x_k],$$

przy czym wierzchołki skrajne x_1, x_k są odpowiednio *początkiem* i *końcem* łańcucha $\mathcal{L}$, a $k-1$, czyli liczbę krawędzi (lub łuków) w $\mathcal{L}$, nazywamy *długością* łańcucha $\mathcal{L}$. Łańcuch $\mathcal{L}$ jest *prosty* (*elementarny*), gdy żaden wierzchołek (żadna krawędź) nie występuje w nim więcej niż raz. Łańcuch $\mathcal{L}$ jest *zamknięty* lub *otwarty* w zależności od tego, czy $x_1 = x_k$ czy nie. Łańcuch zamknięty, w którym żadna krawędź się nie powtarza, nazywamy *cyklem*, analogiczną drogę zaś — *konturem*. Cykl (w szczególności kontur) $[x_1, x_2, \dots, x_k, x_1]$ (o długości $k \geq 3$) jest *prosty*, gdy jego wierzchołki $x_1, x_2, \dots, x_k$ (z pominięciem ostatniego x_1) są parami różne.

Graf jest *spójny* (digraf jest *słabo spójny*), jeśli dla dowolnych dwóch jego wierzchołków istnieje łańcuch, którego wierzchołkami skrajnymi są te dwa wierzchołki. Digraf D jest *silnie spójny*, gdy dla każdej pary wierzchołków x, y w D istnieje droga, której początkiem jest x , a końcem y .

Spójnością $\kappa(G)$ grafu G jest minimalna ilość wierzchołków, których usunięcie wraz z incydentnymi krawędziami daje graf niespójny lub jednowierzchołkowy. Jeśli h jest liczbą całkowitą i $h \leq \kappa(G)$, to graf G nazywamy *h -spójnym*.

Digraf jest *symetryczny*, gdy wraz z dowolnym łukiem (x, y) zawiera łuk przeciwnie skierowany (y, x) , jest zaś *antysymetryczny*, gdy nie zawiera łuków przeciwnie skierowanych. W *digrafie* (*grafie*) *pełnym* każde dwa różne wierzchołki są końcami co najmniej jednego łuku (dokładnie jednej krawędzi). *Turniejem* jest pełny digraf antisymetryczny. Symbole $K_n, \bar{K}_n$ oznaczają n -wierzchołkowe grafy, a mianowicie graf pełny i graf bez krawędzi, K_n^* zaś oznacza pełny n -wierzchołkowy digraf symetryczny. *Graf dwudzielny* $B(r, s)$ ma $r+s$ wierzchołków, które można podzielić

na dwie grupy odpowiednio po r i s wierzchołków parami niesąsiednich. Graf $B(r, s)$, w którym każdy wierzchołek z pierwszej grupy jest sąsiadem każdego wierzchołka z drugiej grupy, jest *pełnym grafem dwudzielnym* oznaczanym przez $K(r, s)$. *Kolem* C_n ($n \geq 3$) jest spójny n -wierzchołkowy graf regularny stopnia 2. *Łańcuch* P_n jest spójnym grafem n -wierzchołkowym ($P_1 = K_1$), w którym dla $n \geq 2$ dokładnie dwa wierzchołki są stopnia 1, a pozostałe — stopnia 2.

Podgrafem grafu G (*poddigrafe* digrafu D) jest graf (digraf), którego każdy element (czyli wierzchołek, krawędź lub łuk) jest elementem w G (w D). Jeśli T jest podzbiorem zbioru wierzchołków X grafu G , to G_T oznacza *podgraf indukowany* przez T , czyli maksymalny podgraf, którego zbiorem wierzchołków jest T ; $G - T$ ($= G_{X-T}$) oznacza podgraf indukowany przez $X - T$. *Grafem częściowym*, czyli *faktorem* grafu G nazywamy każdy podgraf zawierający wszystkie wierzchołki grafu G . k -*faktorem* jest faktor regularny stopnia k . *Pełnym przeciwfactorem* $\langle G \rangle$ grafu $G = \langle X, V \rangle$ jest graf pełny, którego zbiorem wierzchołków jest X .

Składową nazywamy każdy maksymalny podgraf (odpowiednio *poddigraf*) spójny. *Mostem* jest krawędź (łuk), której (-ego) usunięcie zwiększa ilość składowych. *Krawędź wisząca* jest mostem, którego jeden koniec ma stopień 1.

Graf jest *plaski*, czyli *splaszczalny*, gdy jego wierzchołki można przedstawić jako punkty, a krawędzie jako linie (łuki zwykłe) na płaszczyźnie (lub sferze), łączące punkty odpowiadające końcom tych krawędzi, przy czym różne linie mogą mieć wspólne co najwyżej końce.

Symbole $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_+$, $\mathbf{N}$ oznaczają zbiory liczb odpowiednio rzeczywistych, rzeczywistych nieujemnych oraz naturalnych. Dla $a \in \mathbf{R}$ symbole $\lfloor a \rfloor$ i $\lceil a \rceil$ oznaczają odpowiednio *podłogę* (czyli część całkowitą) i *pulap* liczby a (por. Knuth [66]), czyli liczby całkowite możliwie najbliższe a takie, że

$$\lfloor a \rfloor \leq a \leq \lceil a \rceil.$$

Symbol $:=$ oznacza definicję poprzedzającego go symbolu, symbol $\forall$ (czyt. dla każdego) oznacza *kwantyfikator ogólny*. Symbol $\blacksquare$ oznacza koniec dowodu lub twierdzenia.

1. Grafy Eulera

1.1. Uwagi wstępne. Jednym z najstarszych problemów teorii grafów jest *problem mostów królewieckich*, rozwiązany przez Eulera w roku 1736. Niech dany będzie pewien układ dróg wzajemnie przecinających się. Problem polega na wyznaczeniu drogi zamkniętej przechodzącej przez każdy odcinek dróg układu dokładnie jeden raz. Uogólnieniem problemu Eulera jest *problem chińskiego listonosza* sformułowany przez Mei-ko (Chińczyk, stąd nazwa problemu): listonosz ma obejść wszystkie przydzielone mu ulice i wrócić do urzędu, skąd wyszedł. Problem polega na wyznaczeniu listonoszowi najkrótszej drogi.

Przejdziemy teraz do podania dodatkowych definicji i sformułowania powyższych problemów w języku teorii grafów.

Niech $G = \langle X, V \rangle$ będzie grafem zwykłym. Łańcuch $[x_1, \dots, x_k]$ nazywamy *łańcuchem Eulera* od x_1 do x_k , jeśli zawiera każdą krawędź grafu G dokładnie jeden raz. Jeśli dodatkowo $x_1 = x_k$, to $[x_1, \dots, x_{k-1}, x_k]$ nazywany *cyklem Eulera*, a graf G — *grafem Eulera*.

Podobnie definiujemy *drogę* i *kontur Eulera* w digrafie D .

W paragrafie 1.2 podamy warunki konieczne i wystarczające na to, aby graf zwykły (odpowiednio digraf) miał łańcuch lub cykl (odpowiednio drogę lub kontur) Eulera, a w paragrafie 1.3 przedstawimy algorytm dla wyznaczania łańcucha lub drogi Eulera w grafie lub w digrafie.

Łańcuch zamknięty grafu G , zawierający każdą krawędź grafu co najmniej jeden raz, będziemy nazywać *cyklem pokrywającym* graf G .

Problem chińskiego listonosza polega na wyznaczeniu najkrótszego cyklu pokrywającego graf G . Jeśli, dodatkowo, każdej krawędzi przypiszemy długość, tj. rozważać będziemy *sieć* $G_c = \langle X, V; c \rangle$, gdzie c jest funkcją rzeczywistą, $c: V \rightarrow \mathbf{R}_+$, to problem chińskiego listonosza polega na wyznaczeniu najkrótszego cyklu w sieci G_c , pokrywającego graf tej sieci. Oczywiście, jeśli graf G jest grafem Eulera, to rozwiązaniem problemu chińskiego listonosza dla grafu jak i sieci jest cykl Eulera. W podobny sposób można sformułować zagadnienie chińskiego listonosza dla digrafu.

Powyższy problem pojawia się też w sytuacjach praktycznych, gdy chcemy wyznaczyć w sieci drogę optymalną przebiegającą przez każdą krawędź, na przykład przy oczyszczaniu ulic miasta (*garbage collection*), przy kontroli sieci gazowej, kolejowej czy też przy wyznaczaniu trasy autobusu szkolnego lub samochodu zaopatrzeniowca, który musi odwiedzić wszystkie ulice miasta (lub wydzielonej jego części).

W zastosowaniach, w których szukamy modelu grafowego dla sieci ulic miasta, pojawiają się *grafy mieszane*, tj. takie, w których pewne krawędzie mogą być przebiegane tylko w oznaczonym kierunku; odpowiadają one ulicom jednokierunkowym i nazywamy je wtedy łukami. Dla tego typu modeli otrzymujemy kolejne uogólnienia: problem drogi (konturu) Eulera i minimalnego konturu pokrywającego graf lub sieć dla przypadku grafów mieszanych.

Graf mieszany oznaczać będziemy przez $G = \langle X, U \cup V \rangle$, gdzie U jest zbiorem par uporządkowanych, a V zbiorem par nieuporządkowanych elementów ze zbioru X . *Stopniem* wierzchołka grafu mieszanego jest liczba łuków i krawędzi incydentnych z tym wierzchołkiem. Graf mieszany nazywamy *spójnym*, jeśli spójny jest graf zwykły $\langle X, W \rangle$, gdzie $\forall x, y \in X$ mamy $xy \in W \Leftrightarrow (x, y) \in U \vee (y, x) \in U \vee xy \in V$. Ciąg $[x_1, \dots, x_h]$ nazywamy *drogą* grafu mieszanego G , jeśli $(x_i, x_{i+1}) \in U$ lub $x_i x_{i+1} \in V$ ($i = 1, 2, \dots, h-1$). Graf mieszany nazywamy *eulerowskim*, jeśli ma kontur $[x_1, \dots, x_{h-1}, x_1]$ zawierający każdy element z U i V dokładnie jeden raz. Podobnie definiujemy *kontur pokrywający* i problem chińskiego listonosza dla grafu mieszanego G .

Rozważania tego rozdziału prowadzone dla grafów, digrafów i grafów mieszanych mogą być bez większego kłopotu rozszerzone na przypadek multigrafów, multidigrafów i multigrafów mieszanych.

1.2. Istnienie i liczba łańcuchów i dróg Eulera. W klasie grafów zwykłych grafy Eulera można scharakteryzować w następujący sposób:

TWIERDZENIE 1.1. *Dla spójnego grafu zwykłego G równoważne są następujące stwierdzenia:*

- (a) *G jest grafem Eulera;*
- (b) *każdy wierzchołek grafu G jest stopnia parzystego;*
- (c) *zbiór krawędzi grafu G można przedstawić w postaci sumy krawędziowo rozłącznych cykli prostych.* ■

Dowód tego twierdzenia znaleźć można m.in. w książkach [52] i [133]. W tej drugiej, równoważność stwierdzeń (a) i (b) udowodniona została przy użyciu algorytmu Hoàng Tuya (patrz następny paragraf).

W przypadku, gdy graf zwykły zawiera wierzchołki nieparzystego stopnia (wtedy ich ilość jest zawsze parzysta, w szczególności może być równa zeru), otrzymujemy następujące wnioski z twierdzenia 1.1:

WNIOSEK 1.1. *Jeśli spójny graf zwykły G ma $2k$ ($k \geq 1$) wierzchołków stopnia nieparzystego, to zbiór jego krawędzi można przedstawić w postaci sumy k krawędziowo rozłącznych łańcuchów prostych.* ■

WNIOSEK 1.2. *Jeśli spójny graf zwykły G zawiera dwa wierzchołki stopnia nieparzystego, to zbiór jego krawędzi można przedstawić w postaci łańcucha Eulera o końcach w tych wierzchołkach.* ■

Digrafy Eulera można scharakteryzować w podobny sposób:

TWIERDZENIE 1.2. *Dla słabo spójnego digrafu $D = \langle X, U \rangle$ równoważne są następujące stwierdzenia:*

- (a) *D jest digrafem Eulera;*
- (b) *dla każdego wierzchołka $x \in X$ zachodzi $\text{id}(x) = \text{od}(x)$;*
- (c) *zbiór łuków digrafu D można przedstawić w postaci sumy lukowo rozłącznych konturów prostych.* ■

Warunki na to, aby graf mieszany był eulerowski, podane zostały przez Forda i Fulkersona [40]:

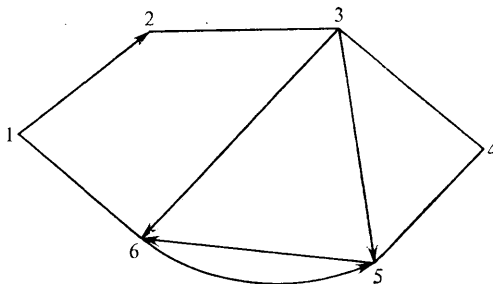
TWIERDZENIE 1.3. *Graf mieszany $G = \langle X, U \cup V \rangle$ jest grafem Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy:*

- (i) *G jest spójny,*
- (ii) *każdy wierzchołek grafu G jest parzystego stopnia,*
- (iii) *dla każdego podzbioru $Y \subseteq X$ różnica między liczbą łuków prowadzących z wierzchołków należących do zbioru Y do wierzchołków należących do zbioru $X - Y$, a liczbą łuków prowadzących z wierzchołków należących do zbioru $X - Y$ do wierzchołków należących do zbioru Y jest mniejsza lub równa liczbie krawędzi łączących wierzchołki ze zbioru Y z wierzchołkami ze zbioru $X - Y$.* ■

Dowód tego twierdzenia, a także sposób wyznaczania konturu Eulera lub określania podzbioru Y nie spełniającego założenia (iii) zostały uzyskane na gruncie teorii przepływów w sieciach i polegają na konstrukcji odpowiedniej sieci oraz sprawdzeniu, czy istnieje w niej dopuszczalny opływ (opływ zdefiniowany jest w [40]).

Łatwo zauważyć, że jeśli $U = \emptyset$ lub $V = \emptyset$, to twierdzenie 1.3 jest odpowiednio twierdzeniem 1.1(a), (b) lub twierdzeniem 1.2(a), (b).

PRZYKŁAD 1.1. Graf mieszany przedstawiony na rys. 1.1 spełnia założenia twierdzenia 1.3 i jeden z jego konturów Eulera jest postaci $[6, 1, 2, 3, 5, 6, 5, 4, 3, 6]$. Jeśli natomiast zamienimy łuk $(1, 2)$ na łuk $(2, 1)$ to podzbiór $Y = \{2, 3, 4\}$ nie spełnia założenia (iii) z twierdzenia 1.3 i tak zmieniony graf mieszany nie jest już eulerowski.



Rys. 1.1

Przy określaniu liczby cykli Eulera w grafie zwykłym skorzystać można z metody Tarry'ego (1886), która upraszcza problem sprowadzając go do policzenia cykli Eulera w multigrafach o prostej strukturze. Ponieważ w niniejszym opracowaniu rozważamy jedynie grafy zwykłe, więc tylko wspomnimy o tej metodzie, gdyż nawet w przypadku grafu zwykłego metoda ta musi być podana w klasie multigrafów.

Idea metody Tarry'ego jest następująca: Jeśli $G = \langle X, V \rangle$ jest eulerowskim grafem zwykłym, a $x \in X$ i $d(x) = 2r$, to liczba cykli Eulera w G jest równa sumie liczb cykli Eulera w $(2r-1)!!$ multigrafach, których zbiór wierzchołków jest $X - \{x\}$, a otrzymujemy je z G przez usunięcie wierzchołka x i krawędzi z nim incydentnych oraz przez uzupełnienie $(2r-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2r-1)$ sposobami otrzymanego podgrafu r krawędziami poprowadzonymi między tymi wierzchołkami, które były w G incydentne z x .

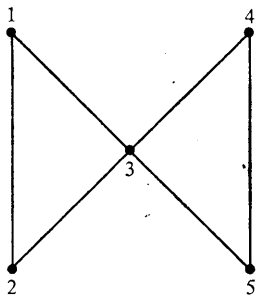
PRZYKŁAD 1.2. Dla grafu przedstawionego na rysunku 1.2, jeśli przyjąć $x = 3$, to liczba jego cykli Eulera jest równa sumie liczb cykli Eulera w trzech multigrafach przedstawionych na rysunku 1.3.

Szczegółowy opis metody Tarry'ego dla wyznaczania liczby cykli Eulera w multigrafach ogólnych znaleźć można w pracy [118].

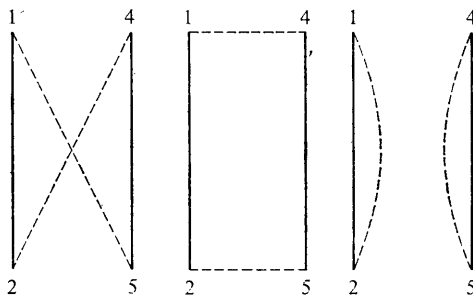
Podobną redukcję zagadnienia można zastosować przy wyznaczaniu liczby konturów Eulera w digrafie eulerowskim (patrz praca [110], gdzie bez powoływania się na nią zastosowano metodę Tarry'ego do wyznaczania liczby konturów Eulera w digrafie regularnym stopnia 4).

Przejdźmy teraz do digrafów. Dla ustalonego digrafu $D = \langle X, U \rangle$, oznaczmy przez $Od(D)$ macierz diagonalną o elementach $od(x_1), \dots, od(x_n)$. Niech $M_{od}(D) =$

$= \text{Od}(D) - A(D)$, gdzie $A(D)$ jest macierzą sąsiedztwa digrafu D . Zauważmy, że dla digrafu Eulera D w macierzy $M_{\text{od}}(D)$ suma elementów w każdej kolumnie i w każdym wierszu jest równa zero. Wynika stąd, że wszystkie dopełnienia algebraiczne macierzy $M_{\text{od}}(D)$ są równe.



Rys. 1.2



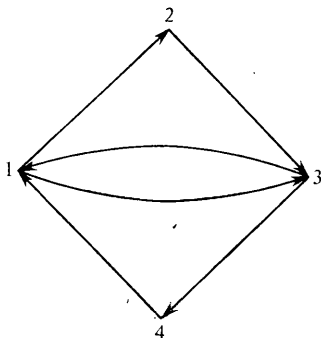
Rys. 1.3

Dla digrafów eulerowskich liczbę konturów Eulera określa następujące twierdzenie, którego elegancki dowód można znaleźć w [65]:

TWIERDZENIE 1.4. *Liczba konturów Eulera w digrafie eulerowskim D jest równa*

$$\delta \cdot \prod_{i=1}^n (d_i - 1)!$$

gdzie $d_i = \text{id}(x_i) = \text{od}(x_i)$, a δ jest wspólną wartością dopełnień algebraicznych elementów macierzy $M_{\text{od}}(D)$. ■



Rys. 1.4

PRZYKŁAD 1.3. Dla digrafu przedstawionego na rys. 1.4 mamy,

$$A(D) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{\text{od}}(D) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \delta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

i liczba konturów Eulera w tym digrafie jest równa

$$2(2-1)!(1-1)!(2-1)!(1-1)! = 2;$$

są nimi $[1, 2, 3, 1, 3, 4, 1]$ i $[1, 2, 3, 4, 1, 3, 1]$.

Określenie liczby konturów Eulera w mieszanym grafie Eulera jest problemem otwartym.

1.3. Algorytm wyznaczania łańcucha lub drogi Eulera. Jeśli w grafie zwykłym $G = \langle X, V \rangle$ wszystkie wierzchołki z wyjątkiem ewentualnie dwóch wierzchołków x i y są parzystego stopnia, to za pomocą następującego algorytmu można wyznaczyć odpowiednio cykl Eulera lub łańcuch Eulera z x do y lub stwierdzić niespójność badanego grafu. Sprawdzenie, czy graf zawiera co najwyżej dwa wierzchołki nieparzystego stopnia, można potraktować jako krok zerowy tego algorytmu.

Algorytm Hoàng Tuya.

K r o k 1. Jeśli stopień każdego wierzchołka jest liczbą parzystą, to wybrać dowolny cykl prosty grafu, a jeśli istnieją tylko dwa wierzchołki x i y stopnia nieparzystego, to wybrać łańcuch prosty z x do y i każdą krawędź wybranego cyklu lub łańcucha oznaczyć liczbą 0.

K r o k 2. Jeśli w rozpatrywanym grafie istnieją krawędzie nieoznaczone, to wśród nich wybrać krawędź u sąsiadującą z jedną z krawędzi już oznaczonych i wyznaczyć cykl prosty zawarty w podgrafie utworzonym z krawędzi nieoznaczonych i zawierający wybraną krawędź u (uzasadnienie istnienia takiego cyklu znaleźć można w [133]). Krawędzie tego cyklu oznaczyć kolejną liczbą. Jeśli natomiast wśród krawędzi nieoznaczonych nie istnieje nawet jedna krawędź sąsiednia z którąś z krawędzi już oznaczonych, to znaczy, że rozpatrywany graf nie jest spójny. W tym przypadku zakończyć algorytm z odpowiednią sygnalizacją.

Powtarzać krok 2 dopóty, dopóki rozpatrywany graf zawiera krawędzie nieoznaczone. W kolejnych iteracjach tego kroku krawędzie wyznaczanych kolejno cykli prostych numerujemy kolejnymi liczbami naturalnymi 1, 2, ...

Po oznaczeniu wszystkich krawędzi grafu, budujemy cykl lub łańcuch Eulera w następujący sposób:

Jeśli w kroku 1 cechą 0 oznaczono krawędzie cyklu, to za x_0 przyjmujemy dowolny wierzchołek tego cyklu; w przeciwnym razie za x_0 przyjmujemy x i x_0 traktujemy jako początkowy łańcuch długości 0.

Jeśli wyznaczony został już łańcuch postaci

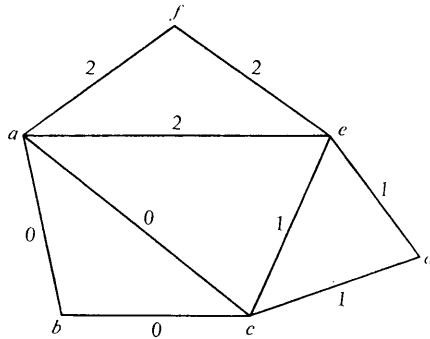
$$x_0, u_1, x_1, u_2, x_2, \dots, x_{k-1}, u_k, x_k,$$

w którym wszystkie krawędzie są różne, to algorytm kończymy, gdy $k = |V|$, a w przypadku $k < |V|$ za u_{k+1} przyjmujemy krawędź incydentną z x_k , różną od $u_1, \dots, u_k$ i oznaczoną największą cechą. Za x_{k+1} natomiast przyjmujemy koniec krawędzi u_{k+1} różny od x_k .

PRZYKŁAD 1.4. Rysunek 1.5 przedstawia eulerowski graf zwykły, którego krawędzie zostały oznaczone za pomocą algorytmu Hoàng Tuya. Po przyjęciu $x_0 = a$, otrzymujemy następujący cykl Eulera tego grafu: $a, af, f, fe, e, ea, a, ac, c, cd,$

$d, de, e, ec, c, cb, b, ba, a$. W pracy [128] przedstawiono realizację tego algorytmu w języku ALGOL 1204 dla maszyny cyfrowej ODRA 1204.

Łatwo zauważyć, że algorytm Hoàng Tuya może być z powodzeniem zastosowany do wyznaczania konturu lub drogi Eulera w digrafie Eulera lub w symetrycznym mieszanym grafie Eulera. Należy jedynie pamiętać, że jeśli w kroku 2 jako u wybrany zostanie łuk nieoznaczony, to należy wyznaczyć kontur zbudowany z łuków nieoznaczonych i zawierający łuk u .



Rys. 1.5

Natomiast dla dowolnego mieszanego grafu Eulera należy najpierw, korzystając z istnienia opływu dopuszczalnego, w odpowiednio zbudowanej sieci tak wyznaczyć orientację niektórych krawędzi, aby otrzymać symetryczny mieszany graf Eulera, a następnie zastosować algorytm Hoàng Tuya (patrz szczegóły w [40], a także w [34]).

Znane są inne algorytmy wyznaczania łańcucha Eulera w grafie Eulera (patrz np. [34]), ale w zasadzie podstawowy krok w każdym z algorytmów jest taki sam: wyznaczyć cykl (kontur) zbudowany z krawędzi (odpowiednio, łuków) nieoznaczonych, tj. nieużytych w krokach poprzednich. Różnice zachodzą natomiast między sposobami oznaczania lub rejestrowania użytych krawędzi i sposobami konstrukcji skutanego łańcucha Eulera.

1.4. Zagadnienie chińskiego listonosza. Niech $G_c = \langle X, V; c \rangle$ będzie siecią taką, że $G = \langle X, V \rangle$ jest grafem zwykłym, a $c: V \rightarrow \mathbb{R}_+$ funkcją rzeczywistą, przyporządkowującą krawędzi $v \in V$ liczbę nieujemną c_v , którą nazywać będziemy *dlugością krawędzi*. Przedstawimy teraz problem chińskiego listonosza dla sieci G_c w postaci, dla której opracowany został efektywny algorytm rozwiązania.

Oznaczmy przez $1 + y_v$ dla $v \in V$ częstość występowania krawędzi v w ustalonym cyklu pokrywającym graf G , tj. $1 + y_v$ jest więc ilością przejść przez krawędź v . Oczywiście, $y_v \geq 0$ ($v \in V$). Z definicji cyklu pokrywającego wynika, że dla każdego $x \in X$

$$\sum_{v \in V_x} (1 + y_v) \equiv 0 \pmod{2},$$

gdzie V_x oznacza zbiór krawędzi incydentnych z wierzchołkiem x .

Tak więc problem wyznaczania najkrótszego cyklu w G_c pokrywającego G równoważny jest z zagadnieniem

$$(1.1) \quad \text{zminimalizować } \sum_{v \in V} c_v y_v,$$

przy ograniczeniach

$$(1.2) \quad \sum_{v \in V_x} (1 + y_v) \equiv 0 \pmod{2} \quad (x \in X),$$

$$(1.3) \quad y_v \geq 0, \quad y_v \text{ — całkowite} \quad (v \in V).$$

Po wyznaczeniu liczb y_v , graf G zastępujemy multigrafem Eulera G' , który powstaje z G przez zastąpienie każdej krawędzi v jej $1 + y_v$ kopiami. Łańcuch Eulera w G' jest rozwiązaniem problemu chińskiego listonosza dla sieci G_c .

Sprowadzimy teraz zagadnienie (1.1)–(1.3) do zagadnienia programowania całkowitego, do tzw. *problemu skojarzenia (matching problem)*. Niech $B = (b_{xv})$ ($x \in X, v \in V$) oznacza *macierz incydencji* wierzchołek-krawędź grafu G , tj.

$$b_{xv} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x \text{ jest końcem krawędzi } v, \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Przy użyciu macierzy B możemy ograniczenie (1.2) zapisać w postaci

$$\sum_{v \in V} b_{xv} (1 + y_v) \equiv 0 \pmod{2} \quad (x \in X)$$

lub

$$\sum_{v \in V} b_{xv} y_v \equiv \sum_{v \in V} b_{xv} \pmod{2} \quad (x \in X).$$

Oczywiście, $\sum_{v \in V} b_{xv} = d(x)$. Niech $\sum_{v \in V} b_{xv} \pmod{2} = e_x$, czyli dla wężła nieparzystego stopnia mamy $e_x = 1$, a dla wężła parzystego $e_x = 0$. Możemy teraz problem (1.1)–(1.3) zapisać w postaci:

$$(1.4) \quad \text{zminimalizować } \sum_{v \in V} c_v y_v$$

przy ograniczeniach

$$(1.5) \quad \sum_{v \in V} b_{xv} y_v - 2s_x = e_x \quad (x \in X),$$

$$(1.6) \quad y_v \geq 0, \quad y_v \text{ całkowite} \quad (v \in V),$$

$$(1.7) \quad s_x \geq 0, \quad s_x \text{ całkowite} \quad (x \in X).$$

Widać, że jeśli $e_x = 0$ ($x \in X$), czyli jeśli G jest grafem Eulera, to rozwiązaniem problemu jest $y_v = 0$, $s_x = 0$ ($v \in V, x \in X$), a więc najkrótszy cykl w G_c pokrywający G jest cyklem Eulera w G .

Zagadnienie (1.4)–(1.7) jest szczególnym przypadkiem ogólnego problemu skojarzenia. Efektywny algorytm rozwiązywania (1.4)–(1.7) podany został w pracy [34].

Przejdziemy teraz do sformułowania problemu, w języku teorii grafów, z którego będzie można wywnioskować pewne własności najkrótszego cyklu w G_c pokrywającego G .

Dla sieci G_c budujemy sieć $F_{c*} = \langle \bar{X}, W; c^* \rangle$, gdzie $F = \langle \bar{X}, W \rangle$ jest grafem pełnym rozpiętym na zbiorze wierzchołków $\bar{X} \subseteq X$, które w G są nieparzystych stopni, a c^* jest funkcją rzeczywistą, $c^*: W \rightarrow \mathbf{R}_+$, taką, że $c^*(x y)$ jest długością najkrótszego łańcucha z x do y w G_c (patrz [115], gdzie podany jest algorytm wyznaczania wartości funkcji c^*).

Skojarzeniem dowolnego grafu zwykłego $E = \langle Y, Z \rangle$ nazywać będziemy podzbiór krawędzi $\bar{Z} \subseteq Z$ taki, że każdy wierzchołek z Y jest incydentny z dokładnie jedną krawędzią z $\bar{Z}$.

Zachodzą następujące twierdzenia:

TIWIERDZENIE 1.5. *Długość najkrótszego cyklu w G_c pokrywającego G jest równa $c(V) + \min c^*(\bar{W})$, gdzie minimum wzięte jest po wszystkich skojarzeniach $\bar{W}$ grafu $F = \langle \bar{X}, W \rangle$ sieci $F_{c*} = \langle \bar{X}, W; c^* \rangle$ otrzymanej z G_c . ■*

TIWIERDZENIE 1.6. *Najkrótsze łańcuchy w G_c odpowiadające minimalnemu skojarzeniu $\bar{W}_{\min}$ w sieci F_{c*} są w G_c krawędziowo rozłączne. ■*

Na podstawie tych twierdzeń, rozwiązanie optymalne problemu listonosza dla sieci G_c można wyznaczyć w następujący sposób:

(a) wyznaczyć wartości funkcji c^* , tj. określić długości najkrótszych łańcuchów w G_c między każdą parą węzłów stopni nieparzystych;

(b) wyznaczyć minimalne skojarzenie $\bar{W}_{\min}$ w sieci F_{c*} ; wtedy długość najkrótszego cyklu w G_c pokrywającego G jest równa $c(V) + c^*(\bar{W}_{\min})$;

(c) zastąpić graf G multigrafem G' , utworzonym z G przez zdublowanie krawędzi najkrótszych łańcuchów między tymi parami węzłów, które w minimalnym skojarzeniu $\bar{W}_{\min}$ połączone są krawędziami;

(d) cykl Eulera w multigrafie G' jest najkrótszym w G_c cyklem pokrywającym G .

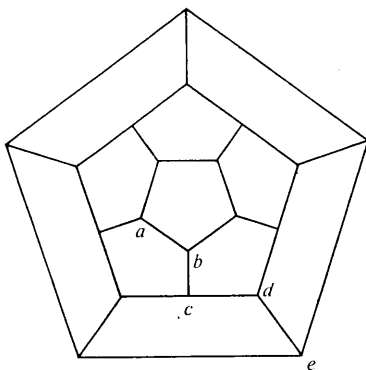
W pracy [46] przedstawiono grafową wersję problemu chińskiego listonosza: wyznaczyć najkrótszy w G cykl pokrywający G , czyli wyznaczyć w G_c najkrótszy cykl pokrywający G , gdzie dla każdej krawędzi $v \in V$ przyjęto $c(v) = 1$. Udowodniono m.in. twierdzenia 1.5 i 1.6 dla tego szczególnego przypadku, podano wartość funkcji $c^*(\bar{W}_{\min})$ dla niektórych klas grafów oraz sformułowano pewne własności rozwiązania optymalnego, które mogą posłużyć do jego wyznaczenia bez odwoływania się do algorytmu dla wyznaczania minimalnego skojarzenia.

W przeciwieństwie do przypadku grafu zwykłego problem listonosza dla grafu zorientowanego lub mieszanego może nie mieć rozwiązania.

W przypadku digrafu możemy zagadnienie sprowadzić do problemu wyznaczania przepływu o minimalnym koszcie w odpowiednio zbudowanej sieci, a następnie korzystając z algorytmu Forda–Fulkersona wyznaczyć przepływ minimalny lub stwierdzić, że nie istnieje rozwiązanie dopuszczalne. Podobnie postępujemy w przypadku grafu mieszanego. Szczegółowe rozważania znaleźć można w pracy [34].

2. Grafy Hamiltona

2.1. Wprowadzenie. Problematyka grafów hamiltonowskich zapoczątkowana została w roku 1859 przez matematyka irlandzkiego Williama Rowana Hamiltona, który postawił pytanie, jak powinien poruszać się podróżny po krawędziach dwunastościanu foremnego, by przejść przez każdy z 20 wierzchołków dokładnie jeden raz i wrócić do punktu wyjściowego. Rysunek 2.1 przedstawia graf tego dwunastościanu umieszczony na płaszczyźnie.



Rys. 2.1. Graf dwunastościanu foremnego

Zadanie sprowadza się do znalezienia tzw. *cyklu Hamiltona* w tym grafie, czyli cyklu prostego zawierającego wszystkie wierzchołki tego grafu.

Rozwiązanie tego problemu wskazane przez Hamiltona ma następującą elegancką postać (por. Berge [5], str. 186). Ponieważ rozważany graf jest kubiczny (czyli regularny stopnia 3), więc podróżny dochodzący po dowolnej krawędzi do jej wierzchołka końcowego ma do wyboru kierunek w lewo (wybór taki oznaczmy przez L) lub w prawo (wybór oznaczmy przez P).

Okazuje się, że każdy szukany cykl Hamiltona może być otrzymany za pomocą ciągu wyborów

$$(2.1) \quad \text{LLLPPPLPLPLLLPPPLPLP}$$

$\xleftarrow{1} \quad \xrightarrow{2} \quad \quad \quad \xleftarrow{3} \quad \xrightarrow{4}$

(znaczenie ponumerowanych strzałek podane jest niżej) lub ciągu otrzymanego przez odwrócenie tego ciągu lub za pomocą ciągu będącego cykliczną permutacją dowolnego z tych dwóch ciągów. W szczególności istnieją dokładnie cztery różne cykle hamiltonowskie w rozważanym grafie zawierające łańcuch $[a, b, c, d, e]$ (rys. 2.1), które można wyznaczyć zaczynając ruch od wierzchołka a po krawędzi ab i stosując się do ciągu wyborów, którego początek jest zaznaczony w (2.1) za pomocą jednej z czterech strzałek.

W dalszym ciągu cykl prosty lub łańcuch prosty, zawierający wszystkie wierzchołki danego grafu G nazywamy *cyklem Hamiltona* lub odpowiednio *łańcuchem*

Hamiltona grafu G . Analogicznie określamy *kontur hamiltonowski* i *drogę hamiltonowską* w digrafie. Graf (digraf) zawierający cykl (kontur) hamiltonowski nazywamy *grafem (digrafem) hamiltonowskim*.

Inne znane od dawna zadania, polegające na wyznaczaniu albo cykli Hamiltona, albo łańcuchów Hamiltona w specjalnych grafach, związane są z szachownicą. Wielu matematyków, m.in. de Moivre i Euler, zajmowało się pytaniem, jak obiecać całą szachownicę ruchem skoczka szachowego tak, aby każde jej pole dotknięte było dokładnie jeden raz. S. Jeleński [57] podaje, że według Jaenisch (lata pięćdziesiąte XIX w.) liczba różnych rozwiązań tego zadania przewyższa 31 milionów (!).

W badaniach operacyjnych rozważa się też problemy, w których chodzi o znajdowanie specjalnych dróg lub konturów hamiltonowskich w odpowiednich digrafach z obciążonymi łukami (tzn. z łukami, którym przyporządkowane są pewne liczby rzeczywiste). Mogą to być zadania polegające np. na ułożeniu optymalnego planu wykorzystania danej maszyny do produkcji pewnej ilości różnych wyrobów przy założeniu, że dane są różne koszty przejścia od produkcji jednego wyrobu do produkcji innego wyrobu. Szczególnym zadaniem analogicznego typu jest klasyczny problem komiwojażera, o czym będzie jeszcze mowa w następnej części.

Istnieje pewne podobieństwo między pojęciami np. cyklu Eulera i cyklu Hamiltona. Mianowicie cykl Eulera przechodzi przez każdą krawędź grafu jeden i tylko jeden raz, a cykl Hamiltona podobnie przechodzi przez każdy wierzchołek grafu. Analogia ta jest jednak dość słaba, gdyż cykl Eulera może wielokrotnie przechodzić przez wierzchołki grafu, gdy tymczasem cykl Hamiltona przechodzi przez dowolną krawędź co najwyżej jeden raz. Ponadto charakteryzacja zarówno grafów, jak i digrafów eulerowskich, jest bardzo prosta i użyteczna (tzn. umożliwia łatwe sprawdzenie, czy dany graf jest albo nie jest eulerowski). Dotychczas zaś brak prostej i użytecznej charakteryzacji grafów hamiltonowskich (zresztą nie jest pewne, czy taka w pełni zadowalająca charakteryzacja w ogóle istnieje).

2.2. Grafy hamiltonowskie i hipoteza czterech kolorów. Niewątpliwie najsłynniejszym otwartym problemem w teorii grafów jest *hipoteza czterech kolorów*⁽¹⁾, według której każdy płaski graf jest *4-chromatyczny*, tzn. jego wierzchołki można pomalować co najwyżej czterema kolorami, tak aby sąsiednie wierzchołki były różnokolorowe. Drugim z kolei otwartym problemem jest zagadnienie znalezienia eleganckiej oraz użytecznej charakteryzacji grafów hamiltonowskich. Od wielu lat problemy te skupiają uwagę i inspirują badania wielu matematyków. Nie są one nawet całkowicie niezależne. Wiadomo bowiem, że hipotezę czterech kolorów wystarczy rozważać tylko w klasie maksymalnych grafów płaskich, tzn. grafów maksymalnych ze względu na relację „jest faktorem grafu” w klasie grafów płaskich. Charakteryzację tych zaś grafów za pomocą własności hamiltonowskich w klasie wszystkich grafów n -wierzchołkowych, $n \geq 4$, podaje następujące twierdzenie:

(¹) W pracy [1b] ogłoszono udowodnienie tej hipotezy przy użyciu komputera.

TWIERDZENIE 2.1 (Skupień [101] i [100]). *n-wierzchołkowy graf jest maksymalnym grafem płaskim dokładnie wtedy, gdy jest spójnym grafem lokalnie hamiltonowskim mającym dokładnie $3n-6$ krawędzi, przy czym spójny n -wierzchołkowy graf lokalnie hamiltonowski nie może mieć mniej niż $3n-6$ krawędzi ($n \geq 4$). ■*

Graf G nazywamy *lokalnie hamiltonowskim* (lub ściślej *1-sąsiedzko hamiltonowskim*), gdy dla każdego wierzchołka x grafu G podgraf indukowany przez sąsiadów wierzchołka x jest niepusty i hamiltonowski.

Z pewnego twierdzenia G. D. Birkhoffa (por. [93]) i z twierdzenia 2.1 wynika, że hipotezę czterech kolorów wystarczy rozpatrywać w klasie 5-spójnych, płaskich grafów lokalnie hamiltonowskich, które są również hamiltonowskie, co wynika z twierdzenia Whitneya o hamiltonowości 4-spójnych maksymalnych grafów płaskich. Uogólnienie tego twierdzenia Whitneya ma następującą postać.

TWIERDZENIE 2.2 (Tutte [125]). *Każdy 4-spójny graf płaski jest hamiltonowski. ■*

W związku z tym twierdzeniem odnotujemy, że Duke znalazł jego analogon dla grafów wyższych rodzajów, przy czym na mocy definicji graf jest *rodzaju co najwyżej γ* , jeśli da się on umieścić bez przecinania się krawędzi na zamkniętej powierzchni orientowalnej rodzaju γ , czyli na sferze z γ uchami.

TWIERDZENIE 2.3 (Duke [33]). *Dla każdej liczby naturalnej γ istnieje taka liczba naturalna $c(\gamma)$, że każdy $c(\gamma)$ -spójny graf rodzaju co najwyżej γ jest hamiltonowski, przy czym $c(\gamma)$ spełnia następującą nierówność*

$$\left\lfloor \frac{1}{2}(5 + (16\gamma + 1)^{1/2}) \right\rfloor \leq c(\gamma) \leq \lfloor 3 + (6\gamma + 3)^{1/2} \rfloor$$

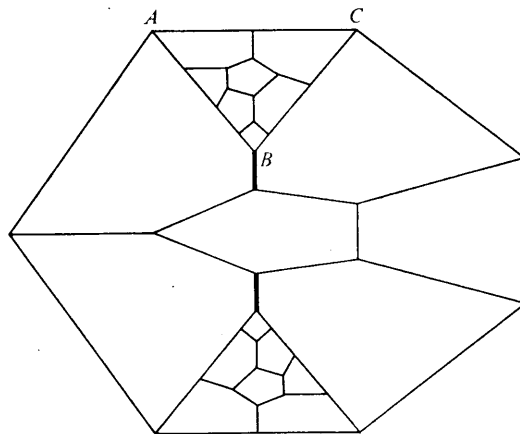
dla naturalnych $\gamma \geq 1$ (w szczególności $4 \leq c(1) \leq 6$). ■

Pierwotne sformułowanie hipotezy czterech kolorów dotyczyło kolorowania map na sferze (lub na płaszczyźnie, co jest równoważne). Można wykazać, że aby udowodnić lub obalić tę hipotezę, wystarczy rozpatrywać mapy wyznaczone przez 3-spójne grafy kubiczne, a nawet przez grafy kubiczne cykliczne 5-krawędziowo spójne. Graf nazywamy *cyklicznie (dokładnie) k -krawędziowo spójnym*, jeśli usunięcie mniej niż k dowolnych krawędzi nie dzieli grafu na 2 składowe, z których każda zawierałaby cykl (przy czym graf nie jest cyklicznie $(k+1)$ -krawędziowo spójny). Płaski graf kubiczny może być cyklicznie co najwyżej 5-krawędziowo spójny.

Wiadomo, że mapa wyznaczona na sferze przez hamiltonowski graf kubiczny jest *4-chromatyczna*, tzn. jej państwa można pomalować co najwyżej czterema kolorami tak, że sąsiednie państwa (tj. takie, których wspólna granica ma niezerową długość) pomalowane zostaną różnymi kolorami (kolejne państwa po jednej stronie cyklu Hamiltona można malować na przemian tylko dwoma kolorami). W związku z tym jeszcze w 1880 (lub 1884) roku P. G. Tait postawił hipotezę, że każdy cyklicznie 3-krawędziowo spójny płaski graf kubiczny (czyli z klasy $C3$) jest hamiltonowski. Z prawdziwości tej hipotezy wynikałoby oczywiście, że problem czterech kolorów ma pozytywne rozwiązanie. Hipoteza Taita jest jednak fałszywa. Mimo to w latach trzydziestych F. Schoblik (1929, 1930) i J. Chuard (1930, 1932) ogłaszali znalezienie dowodu tej hipotezy (por. Grünbaum [50], str. 1143). Pierwszy

kontrprzykład będący grafem 46-wierzchołkowym podał W. T. Tutte [123] w 1946 roku. Graf ten jest cyklicznie dokładnie 3-krawędziowo spójny. Obecnie znanych jest kilka 38-wierzchołkowych kontrprzykładów, będących płaskimi grafami kubicznymi cyklicznie dokładnie 3-krawędziowo spójnymi, które znalezione zostały niezależnie przez trzech matematyków: J. Bosáka [11], J. Lederberga i D. Barnette'a (por. [74] oraz [50], str. 1144). Butler [12] udowodniła, że te 38-wierzchołkowe grafy kubiczne są minimalnymi niehamiltonowskimi, płaskimi grafami kubicznymi, które są cyklicznie dokładnie 3-krawędziowo spójne.

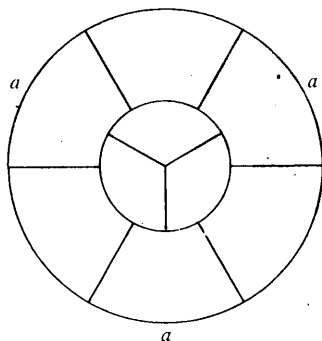
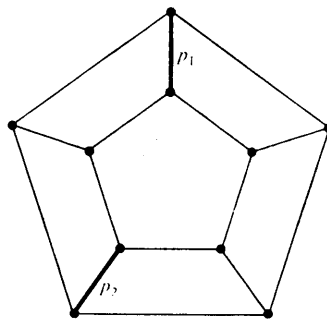
Jeden z tych grafów przedstawiony jest na rysunku 2.2, zaczerpniętym z książki Marshalla [83], str. 112. Jak podaje Bosák (p. Butler [12], str. 69) istnieje przynaj-



Rys. 2.2

mniej sześć takich grafów. Istotnie, tych sześć różnych grafów otrzymamy sklejając odpowiednio dwie kopie grafu N (rys. 2.3) z grafem pryzmy pięciokątnej (rysunek 2.4). Sposób sklejania podany jest w cytowanych wyżej pracach Bosáka i Lederberga.

Graf N , wskazany przez Tutte'a [123] w roku 1946, jest — jak stwierdza Bosák [11] — najmniejszym (a mianowicie 16-wierzchołkowym) 3-spójnym, płaskim grafem

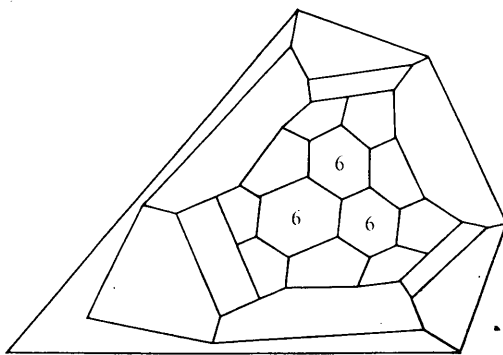
Rys. 2.3. Graf N 

Rys. 2.4. Graf pryzmy pięciokątnej

kubicznym i hamiltonowskim, mającym krawędź, przez którą przechodzi każdy cykl Hamiltona tego grafu. Ma on nawet 3 takie krawędzie. Są one oznaczone literą a na rysunku 2.3. Natomiast krawędzie p_1 i p_2 w grafie pryzmy (rys. 2.4) mają tę własność, że obie równocześnie nie należą do żadnego cyklu Hamiltona tego grafu.

Wspomniane wyżej sklejanie polega na tym, że usuwamy jeden z końców krawędzi a grafu N oraz jeden koniec krawędzi p_1 grafu pryzmy, otrzymując po trzy krawędzie wiszące, które skleamy parami po jednej krawędzi z każdego grafu, przy czym krawędź a skleamy z krawędzią p_1 . (Odnotujmy, że usuwając koniec krawędzi a grafu N otrzymamy istotnie podgraf grafu z rysunku 2.2, zawarty wewnątrz $\triangle ABC$ wraz z dodatkowymi krawędziami wiszącymi u wierzchołków A , B i C). Tak skonstruowany nowy graf skleamy analogicznie z drugą kopią grafu N , skleając w szczególności krawędź p_2 z krawędzią a . Tę podwójną operację sklejanie można zrealizować właśnie na 6 istotnie różnych sposobów.

Pozostaje otwarty problem, jakie jest minimalne n , dla którego istnieje niehamiltonowski płaski graf kubiczny, cyklicznie 4-krawędziowo spójny. Oczywiście, n musi być parzyste (bo w kubicznym n -wierzchołkowym grafie ilość krawędzi jest równa $3n/2$). Jak podaje Butler [12], D. Barnette i G. Wegner udowodnili ostatnio, że $n \geq 28$. Wcześniej udowodniono, że $n \geq 20$ (Lederberg [74]) oraz $n \geq 24$ (Butler [12] i P.R. Goodey, p. [12]). Autorzy tych dowodów korzystali w istotny sposób z wyników uzyskanych za pomocą komputerów, które użyto do generowania płaskich grafów kubicznych i do weryfikowania ich własności.



Rys. 2.5. Graf Grinberga

Najmniejszym ze znanych niehamiltonowskich grafów w klasie $C5$, czyli w klasie płaskich grafów kubicznych, które są cyklicznie 5-krawędziowo spójne, jest 44-wierzchołkowy graf podany przez Grinberga [49] (rys. 2.5), znaleziony później również przez Tutte'a (por. Grünbaum [50], str. 1145 oraz Berge [5], str. 224). Jak zauważyli Faulkner i Younger [35], usuwając z tego grafu jedną z trzech krawędzi, które są incydentne ze wspólnym wierzchołkiem trzech sześcioboków, otrzymamy — wskazany również przez Grinberga — 42-wierzchołkowy niehamiltonowski, płaski graf kubiczny, cyklicznie dokładnie 4-krawędziowo spójny, czyli z klasy $C4$ – $C5$. Inny 42-wierzchołkowy graf o tych samych własnościach, przypominający

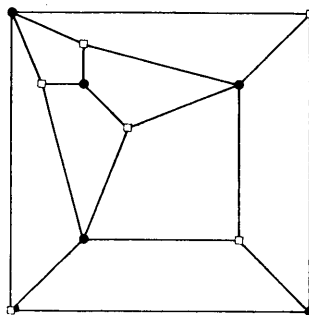
graf z rysunku 2.2, znaleźli Faulkner i Younger [35]. Posługując się komputerem stwierdzili oni również, że graf Grinberga (rys. 2.5) jest minimalny w klasie C5.

Tak więc wspomniany wyżej problem otwarty sprowadza się do pytania, czy w klasie C4–C5 istnieje niehamiltonowski graf mający n wierzchołków, gdzie kolejno $n = 28, 30, \dots, 40$.

Odnotujemy też, że istnienie płaskich i 3-spójnych grafów, które nie są hamiltonowskie, dowodzi, iż twierdzenie Tutte'a 2.2 jest w pewnym sensie ostre, tzn. jego założenie nie może być osłabione bez zmiany struktury logicznej tego założenia.

Znany jest również, skonstruowany przez T. Zamfirescu (p. Grünbaum [50], str. 1147 lub Berge [5], str. 224), 88-wierzchołkowy płaski, 3-spójny graf kubiczny bez łańcucha Hamiltona.

Barnette i Jucovič [2] udowodnili, że 11, 18 i 9 (11, 27 i 18) — to minimalne ilości n , m i f odpowiednio wierzchołków, krawędzi i ścian w wielościanie wypukłym (w wielościanie symplecjajnym), którego graf jest niehamiltonowski. Odnotujemy, że — zgodnie z twierdzeniem Steinitza (1922, por. [50]) — graf jest izomorficzny z grafem wielościanu dokładnie wtedy, gdy jest płaski i 3-spójny. Graf wielościanu symplecjajnego jest zaś maksymalnym grafem płaskim. Minimalny niehamiltono-



Rys. 2.6. Minimalny niehamiltonowski graf wielościanu

owski graf wielościanu przedstawia rysunek 2.6. Jest to graf niehamiltonowski jako graf dwudzielny $B(5,6)$. Dzieląc ściany tego grafu na trójkąty za pomocą przekątnych łączących wierzchołki będące kółkami, otrzymamy minimalny niehamiltonowski graf wielościanu symplecjajnego (por. Skupień [100]).

Dla wielościanów, których grafy nie zawierają łańcucha Hamiltona analogiczne minimalne ilości wynoszą 14, 24 i 12 (14, 36 i 24), co udowodnił Goodey [45], potwierdzając hipotezę Barnette'a i Jucoviča [2].

2.3. Warunki konieczne. Ponieważ problem charakteryzacji grafów hamiltonowskich (lub niehamiltonowskich) nie został rozwiązany w sposób zadowalający, więc szczególnego znaczenia nabierają próby znalezienia możliwie najmocniejszych warunków koniecznych lub możliwie najsłabszych warunków wystarczających na to, by graf był hamiltonowski. Aby sformułować kilka znanych warunków koniecznych, przyjmijmy następujące oznaczenia:

$k(G)$ jest liczbą składowych grafu G ;

$m(G)$ jest liczbą krawędzi grafu G ;

$m_G(R, T)$ jest liczbą krawędzi grafu G takich, że jeden koniec należy do R , drugi zaś do T przy założeniu, że R i T są rozłącznymi podzbiorami zbioru wierzchołków X (lub rozłącznymi podgrafami) grafu G .

Każdy graf hamiltonowski $G = \langle X, V \rangle$ spełnia następujące warunki konieczne:

(2.2) Graf G jest 2-spójny, czyli $\kappa(G) \geq 2$;

(2.3) $k(G - X_1) \leq \max \{1, |X_1|\}$ ($\forall X_1 \subset X, |X_1| \geq 3$), tzn. graf G jest 1-trwały (1-tough, por. Chvátal [25] i [26]);

(2.4) G ma 2-faktor, czyli graf częściowy regularny stopnia 2;

(2.5) Nie istnieje podział $X = R \cup S \cup T$ zbioru wierzchołków X na rozłączne (niekoniecznie niepuste) zbiory R, S, T takie, że

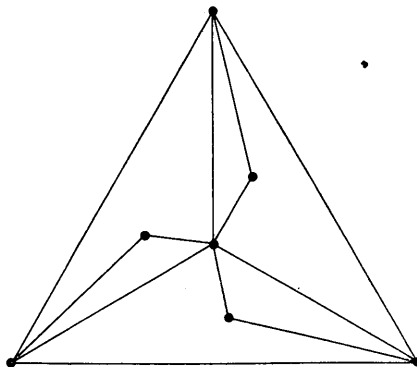
$$|S| + \frac{1}{2} m_G(R, T) - \frac{1}{2} q(R, T) < |T| - m(G_T),$$

gdzie $q(R, T)$ oznacza liczbę składowych H podgrafu G_R (indukowanego przez R) takich, że liczba krawędzi $m_G(H, T)$ jest nieparzysta;

(2.6) Nie istnieje podział $X = R \cup S \cup T$ taki, że

$$T \neq X \quad \text{oraz} \quad |S| + \frac{1}{2} m_G(R, T) < k(G_T).$$

Konieczność warunków (2.2), (2.3) i (2.4) jest oczywista, przy czym warunek (2.2) wynika z warunku (2.3), co oznacza, że warunek (2.3) jest mocniejszy od warunku (2.2). Warunek (2.5) zaś jest równoważny warunkowi (2.4) i jest szczególnym



Rys. 2.7. Przykład Chvátala

przypadkiem pewnego ogólnego warunku podanego przez Tutte'a [124]. Warunek (2.6) podany został przez Chvátala [26], który udowodnił także, że warunek ten jest mocniejszy od (2.5), a więc i od (2.4).

Każdy z tych pięciu warunków wystarcza na to, aby istniał cykl Hamiltona w grafie G mającym 3, 4 lub 5 wierzchołków. Minimalny (7-wierzchołkowy) nieha-

miltonowski graf, spełniający warunek (2.3) a znaleziony przez Chvátala, przedstawiony jest na rysunku 2.7.

Warto odnotować, że zaprzeczenie dowolnego spośród powyższych pięciu warunków jest warunkiem wystarczającym na to, by graf G nie był hamiltonowski. Jako taki warunek wystarczający szczególnie często wykorzystywane jest zaprzeczenie warunku (2.3).

Odnotujmy też, że bezpośrednie wzmocnienie warunku (2.2), czyli warunek postaci

$$\kappa(G) \geq \kappa_0 = \text{const},$$

dla żadnej stałej κ_0 nie gwarantuje istnienia cyklu Hamiltona w dowolnym grafie G . Istotnie, pełny graf dwudzielny $K(t, t+1)$ o spójności $\kappa = t$ jest niehamiltonowski dla każdego t , bo nie spełnia warunku (2.3) dla podzbioru X_1 złożonego z t wierzchołków pierwszej grupy w $K(t, t+1)$. Chvátal przypuszcza ([25], hipoteza 2.3), że możliwe jest bezpośrednie wzmocnienie warunku (2.3) dające warunek wystarczający istnienia cyklu Hamiltona.

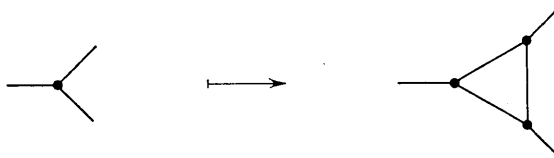
HIPOTEZA CHVÁTALA[25]. *Jeśli*

$$(2.7) \quad k(G - X_1) < \frac{2}{3} |X_1|$$

dla każdego podzbioru wierzchołków X_1 takiego, że $G - X_1$ jest grafem niespójnym (tzn. G jest grafem t -trwałym dla pewnego $t > 3/2$) i G ma przynajmniej 3 wierzchołki, to G jest grafem hamiltonowskim.

Korzystając z twierdzenia Tutte'a 2.2, Chvátal udowodnił, że hipoteza ta jest prawdziwa dla grafów płaskich.

Stałą $2/3$ w warunku (2.7) nie można zwiększyć, bo Chvátal podał 30-wierzchołkowy graf kubiczny niehamiltonowski, dla którego zachodzi równość w warunku (2.7). Jest to graf otrzymany ze znanego grafu Petersena (rys. 2.9) przez zastąpienie każdego wierzchołka trójkątem według schematu z rysunku 2.8.



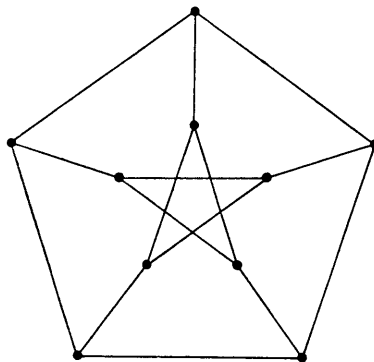
Rys. 2.8

Interesujący warunek konieczny na to, by graf płaski był hamiltonowski, znaleziony został niezależnie przez Grinberga [49] i W. P. Kozyriewa (por. Sachs [96]). Niehamiltonowskość grafu Grinberga (rys. 2.5) wynika właśnie z faktu, że nie spełnia on tego warunku koniecznego.

2.4. Grafy hipohamiltonowskie. W roku 1891 Petersen [94] udowodnił, że każdy graf kubiczny bez mostów ma 1-faktor i w konsekwencji jest krawędziowo rozłączną sumą 1-faktora i 2-faktora. Wynik ten nie może być wzmocniony, gdyż graf z ry-

sunku 2.9 wskazany przez Petersena i nazywany obecnie *grafem Petersena*, jest kubiczny, bez mostów i nie jest sumą trzech parami krawędziowo rozłącznych 1-faktorów. Graf Petersena jest również przykładem 3-spójnego grafu kubicznego (niepłaskiego), który nie jest hamiltonowski.

R. Sousselier zauważył (por. Berge [5], str. 223), że graf Petersena jest minimalnym *grafem hipohamiltonowskim*, czyli grafem niehamiltonowskim o tej własności, że odrzucenie z niego dowolnego wierzchołka wraz z incydującymi krawędziami daje graf hamiltonowski. Sousselier skonstruował również grafy hipohamiltonowskie rzędu $6p+4$ (przy czym graf Petersena odpowiada wartości $p = 1$) oraz rzędu 18 (por. [55]). Oprócz Sousseliera nieskończone rodziny grafów hipohamiltonowskich



Rys. 2.9. Graf Petersena

skonstruowali również Lindgren [80], Bondy [9], Chvátal [27], J. Doyen (por. [122]), Thomassen [120] oraz Collier i Schmeichel [28a]. Herz, Duby i Vigué w pracy [55] skonstruowali grafy hipohamiltonowskie rzędów 13 i 15 oraz udowodnili, że graf Petersena jest jedynym grafem hipohamiltonowskim wśród grafów rzędu ≤ 12 .

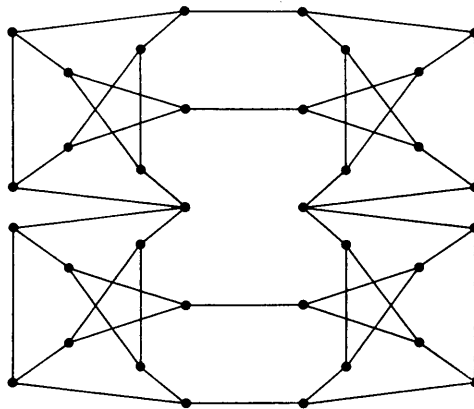
Jak podaje Thomassen [122], dla każdego $n \geq 13$ z wyjątkiem ewentualnie $n = 14$ i $n = 17$ istnieje graf hipohamiltonowski rzędu n . Collier i Schmeichel [28b] sprawdzili przy użyciu komputera, że nie ma grafów hipohamiltonowskich rzędu 14. Nie wiadomo więc tylko, czy istnieją grafy hipohamiltonowskie wśród grafów 17-wierzchołkowych.

W pracy [27] Chvátal udowodnił, że liczba nieizomorficznych grafów hipohamiltonowskich rzędu n zmierza do nieskończoności wraz z n . Collier i Schmeichel udowodnili w [28a], że liczba ta wzrasta przynajmniej wykładniczo.

W pracy [63] postawiony został problem, czy istnieją grafy bez łańcucha Hamiltona, z których odrzucenie dowolnego wierzchołka daje podgraf mający łańcuch Hamiltona. Konstrukcyjny dowód istnienia takich n -wierzchołkowych grafów podał Thomassen w pracy [120] dla $n = 34, 37, 39, 40$ i $n \geq 42$. Najmniejszy z tych grafów (34-wierzchołkowy) podany jest na rysunku 2.10.

W.P. Kozyriew [68] udowodnił niedawno, że nie istnieją grafy *hipo-hamiltonow-*

sko-spójne, czyli grafy, które same nie są hamiltonowsko spójne, lecz każdy ich podgraf indukowany otrzymany przez odrzucenie dowolnego jednego wierzchołka jest hamiltonowsko spójny. (Definicja Ore'go grafów hamiltonowsko spójnych czyli silnie 1-krawędziowo hamiltonowskich podana jest w następnym paragrafie).



Rys. 2.10. Przykład Thomassena

2.5. Własności wysoko hamiltonowskie i operacja zespolenia grafów. Wśród grafów hamiltonowskich wyróżniane są grafy wysoko hamiltonowskie, a w szczególności p -hamiltonowskie (Chartrand, Kapoor i Lick [17], q -krawędziowo hamiltonowskie (Kronk [69]) oraz (p, q) -hamiltonowskie i silnie (p, q) -hamiltonowskie (Skupień i Wojda [108]).

W dalszym ciągu zakładamy, że

$$0 \leq p \leq n-3, \quad 0 \leq q \leq n-1, \quad p+q \leq n-1, \quad n, p, q \in \mathbb{N},$$

przy czym n oznacza liczbę wierzchołków grafu G .

Graf G nazywamy p -hamiltonowskim, jeśli odrzucenie z G co najwyżej p dowolnych wierzchołków (wraz z incydującymi krawędziami) daje zawsze graf hamiltonowski.

G nazywamy grafem (silnie) q -krawędziowo hamiltonowskim, jeśli dla dowolnego układu rozłącznych łańcuchów prostych S , zawierającego co najwyżej q krawędzi i zawartego w grafie G (przeciwfaktorz $\langle G \rangle$), w grafie $G \cup S$ istnieje cykl hamiltonowski zawierający S . Graf G nazywamy (silnie) (p, q) -hamiltonowskim, jeśli dla dowolnego podzbioru X_1 zbioru wierzchołków X grafu G takiego, że $|X_1| \leq p$, graf $G - X_1$ jest (silnie) q -krawędziowo hamiltonowski.

Oczywiście, graf (silnie) $(p, 0)$ -hamiltonowski jest p -hamiltonowski, zaś (silnie) $(0, q)$ -hamiltonowski jest (silnie) q -krawędziowo hamiltonowski. Grafy silnie 1-krawędziowo hamiltonowskie nazywane są *hamiltonowsko spójnymi* (Ore [92]).

Pojęcie grafu silnie (p, q) -hamiltonowskiego jest uogólnieniem lub uszczególnieniem pewnych innych pojęć rozważanych w literaturze o grafach hamiltonowsko

spójnych (Berge [5], str. 217 i Las Vergnas [71], Chartrand, Kapoor i Kronk [16] oraz Lick [77]; por. [108], str. 464).

Kronk [69] wprowadził również pojęcie grafu q -łańcuchowo hamiltonowskiego. G jest mianowicie grafem q -łańcuchowo hamiltonowskim, jeśli dowolny łańcuch prosty tego grafu o długości co najwyżej q jest zawarty w cyklu Hamiltona grafu G . Naturalnym uszczególnieniem tego pojęcia jest pojęcie grafu dowolnie hamiltonowskiego (*randomly Hamiltonian*) wprowadzone przez Chartranda i Kronka [18]. Graf G nazywany jest *dowolnie hamiltonowskim*, jeśli dowolny łańcuch prosty grafu G zawarty jest w cyklu Hamiltona tego grafu. n -wierzchołkowy graf G jest więc dowolnie hamiltonowski dokładnie wtedy, gdy jest $(n-1)$ -łańcuchowo hamiltonowski.

TWIERDZENIE 2.4 (Chartrand i Kronk [18]). *Graf G jest dowolnie hamiltonowski (tzn. $(n-1)$ -łańcuchowo hamiltonowski) wtedy i tylko wtedy, gdy $G = K_n$ (graf pełny) lub $G = C_n$ (koło) lub n jest parzyste i $G = K(n/2, n/2)$ (regularny pełny graf dwudzielny), gdzie $n \geq 3$. ■*

Uogólnienia lub uszczególnienia pojęcia grafu dowolnie hamiltonowskiego można znaleźć w następujących pracach: Chartrand i Kronk [18] i [19], Jolivet i Raynaud [62] oraz (z równoczesnym włączeniem do rozważań grafów nieskończonych przeliczalnych) Thomassen [119] i [121], a także Dirac i Thomassen [32].

Chvátal [26] wprowadził nazwę grafy r -cyklowalne (*r -cyclable*) dla grafów rozważanych w pracy Watkinsa i Mesnera [127]. Graf G jest mianowicie r -cyklowalny, jeśli dla każdego r wierzchołków istnieje w G cykl prosty zawierający te wierzchołki. Grafy r -cyklowalne są uogólnieniem zarówno grafów hamiltonowskich, jak również hipohamiltonowskich. Istotnie, n -wierzchołkowy graf hamiltonowski jest n -cyklowalny, niehamiltonowski co najwyżej $(n-1)$ -cyklowalny, hipohamiltonowski zaś — to graf taki i tylko taki, którego cyklowalność $\xi(G) = n-1$. *Cyklowalnością* $\xi(G)$ grafu G nazywa się maksymalną liczbę r taką, że graf G jest r -cyklowalny.

Z klasycznego twierdzenia Menger'a o spójności grafów wynika równoważność

$$\kappa(G) \geq 2 \quad \text{dokładnie wtedy, gdy} \quad \xi(G) \geq 2.$$

Dirac ([31], twierdzenie 9), udowodnił, że

$$\kappa(G) \geq 2 \quad \text{implikuje} \quad \xi(G) \geq \kappa(G).$$

Natomiast Watkins i Mesner znaleźli zadowalającą charakteryzację grafów, które nie są 3-cyklowalne. Udowodnili oni również następujące

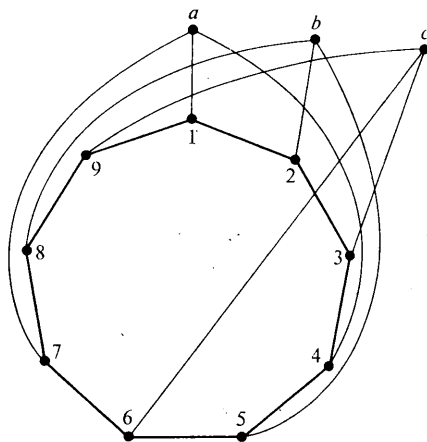
TWIERDZENIE 2.5 (Wathins i Mesner [127]). *Dla grafu $G = \langle X, V \rangle$ warunek $\xi(G) = \kappa(G) \geq 3$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\kappa(G)$ -elementowy podzbiór wierzchołków X_1 taki, że ilość składowych $k(G-X_1) \geq \kappa(G)+1$. ■*

Chvátal uważa, że nie powinno być szczególnie trudne znalezienie dobrej charakteryzacji grafów, które nie są 4-cyklowalne (wystarczy rozważyć grafy, dla których $\kappa = 2$ i $\xi = 3$). Nie wydaje się jednak możliwe zadowalające scharakteryzowanie wszystkich grafów niehamiltonowskich przez kolejne charakteryzowanie grafów, które nie są r -cyklowalne, $r = 4, 5, 6, \dots$. Poważne kłopoty wystąpią bowiem przy próbach znalezienia dobrej charakteryzacji w przypadku dużych wartości r .

Bondy [8], inspirowany przez wyniki dotyczące istnienia konturów o dowolnych długościach 3, 4, ..., n w każdym silnie spójnym turnieju o n wierzchołkach (p. twierdzenie Mosera udowodnione w pracy [53]), wprowadził pojęcie grafów pancyklicznych. Graf G o n wierzchołkach nazywamy *pancyklicznym*, jeśli dla każdego k , $3 \leq k \leq n$, zawiera cykl prosty o długości k . Wynika stąd, że każdy graf pancykliczny jest specjalnym grafem hamiltonowskim.

Warto teraz podać kilka znanych współzależności między powyższymi pojęciami. Koło n -wierzchołkowe C_n dla $n \geq 4$ jest prostym przykładem grafu, który jest q -krawędziowo hamiltonowski dla $0 \leq q \leq n-1$ i nie jest silnie q -krawędziowo hamiltonowski dla $q > 0$.

Ciekawym przykładem jest graf Z (rys. 2.11), znaleziony przez T. Zamfirescu i wskazany autorom przez J.C. Bermonda z Francji). Jest to graf 1-hamiltonowski i nie-2-hamiltonowski, 1-krawędziowo i 2-krawędziowo hamiltonowski oraz nie-3-krawędziowo hamiltonowski i wreszcie Z nie jest grafem silnie 1-krawędziowo hamiltonowskim (czyli hamiltonowsko spójnym). W dowodzie powyższych własności warto korzystać z faktu, że dowolne dwa wierzchołki w każdym ze zbiorów $\{a, b, c\}$



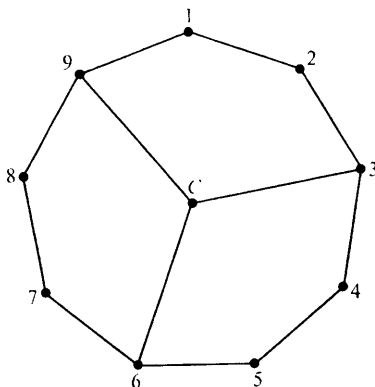
Rys. 2.11. Graf Zamfirescu Z

i $\{1, 2, \dots, 9\}$ są *podobne*, tzn. istnieje taki automorfizm grafu Z , który jeden z tych wierzchołków przeprowadza w wierzchołek pozostały. Analogicznie podobne są każde dwie krawędzie cyklu $[1, 2, \dots, 9, 1]$ i każde dwie spośród pozostałych krawędzi.

Graf Z nie jest 2-hamiltonowski, ponieważ usunięcie z Z wierzchołków a i b daje niehamiltonowski podgraf indukowany, przedstawiony na rysunku 2.12. Zauważmy, że podgraf ten ma łańcuchy Hamiltona, przy czym dla każdego z nich albo jednym z końców jest wierzchołek c , albo oba końce są sąsiadami jednego tylko spośród wierzchołków a i b . Stąd i z faktu, że wierzchołek c nie jest sąsiadem ani dla a , ani dla b , wynika też, że Z nie zawiera łańcucha Hamiltona o końcach a i b , czyli graf Z nie jest hamiltonowsko spójny. Graf Z nie jest 3-krawędziowo hamil-

tonowski, ponieważ żaden jego cykl Hamiltona nie przechodzi przez 3 krawędzie $[1, 2]$ $[4, 5]$ i $[7, 8]$.

Zauważmy następnie, że wprowadzone przez Kronka pojęcia n -wierzchołkowych grafów q -krawędziowo hamiltonowskich i q -łańcuchowo hamiltonowskich pokrywają się dla $q = 0, 1, n-1$, co jest oczywiste. Jest to prawdą również dla $q = n-2$, przy czym każdy n -wierzchołkowy graf $(n-2)$ -łańcuchowo hamiltonowski jest dowolnie hamiltonowski. Dwa rozważane pojęcia różnią się jednak dla $q = 2$



Rys. 2.12. Podgraf indukowany grafu Z

i dostatecznie dużych n . Wynika to z przykładu Kronka [69] (rys. 2.4), będącego grafem pryzmy 5-kątnej, w którym nie istnieje cykl Hamiltona przechodzący przez krawędzie p_1 i p_2 , chociaż graf ten jest 2-łańcuchowo hamiltonowski. Analogicznie jest dla $q = 3$, gdyż graf Z jest 3-łańcuchowo hamiltonowski i nie jest 3-krawędziowo hamiltonowski.

Zanim przejdziemy do dalszych przykładów, przytoczmy za Zykowem [132] użyteczną w dalszym ciągu definicję zespolenia (wg Zykowa — iloczynu) dwóch rozłącznych grafów. *Zespoleniem* dwóch rozłącznych grafów G_1 i G_2 nazywamy graf $G_1 * G_2$, który zawiera jedynie oba grafy G_1 i G_2 oraz wszystkie możliwe krawędzie, których jeden koniec jest wierzchołkiem w G_1 , a drugi — w G_2 .

Jako pierwszy w hamiltonowskiej teorii grafów operację zespolenia $*$ zastosował prawdopodobnie Ghouila-Houri [42], który analogicznie zdefiniowane symetryczne zespolenie digrafu z grafem trywialnym K_1 zastosował dla otrzymania i udowodnienia warunku wystarczającego istnienia drogi Hamiltona w digrafie (p. § 2.9). W analogicznym, lecz ogólniejszym celu zastosowano zespolenie grafu z grafem pełnym K_p w pracach [104], [105], [106], [61], przy czym w pracy [61] Jolivet rozważa również symetryczne zespolenie digrafu z pełnym digrafem symetrycznym K_p^* . Również w kilku innych pracach [16], [24], [107], [129] i [108] operacja zespolenia zastosowana została dla otrzymania lub zapisu grafów o specjalnych własnościach hamiltonowskich.

Operację zespolenia uogólnił Wagner [126] wprowadzając zespolenie p -elementowej rodziny grafów rozłącznych wg schematu zespolenia, którym może być dowolny graf p -wierzchołkowy F , którego wierzchołkom przyporządkowane są wzajemnie jednoznacznie grafy rodziny ($F = K_2$ w przypadku definicji Zykowa). Uogólnienie to odkrył na nowo i badał jego własności (również hamiltonowskie) Jolivet [58] oraz także [59], gdzie w szczególności $F = K_p$.

A.P. Wojda zauważył, że zespolenie grafu Petersena (rys. 2.9) z grafem K_1 jest grafem silnie 1-krawędziowo hamiltonowskim (czyli hamiltonowsko spójnym). Uogólnieniem tego spostrzeżenia jest następujący wynik:

TWIERDZENIE 2.6. *Zespolenie (n -wierzchołkowego) grafu hamiltonowskiego lub hipohamiltonowskiego G z grafem K_1 jest grafem silnie 1-krawędziowo pancyklicznym, tzn. dowolne dwa różne wierzchołki tego zespolenia są końcami łańcucha prostego o dowolnej długości l , gdzie $2 \leq l \leq n$.*

Wynika to w prosty sposób z faktu, że dowolny wierzchołek grafu G jest końcem łańcucha Hamiltona w G (por. [106a]). ■

TWIERDZENIE 2.7. *Jeśli graf G jest silnie q -krawędziowo hamiltonowski, to graf $G * K$ jest silnie $(q+r)$ -krawędziowo hamiltonowski. ■*

Twierdzenie to jako pierwszy udowodnił A.P. Wojda. Z dwóch ostatnich twierdzeń wynika

WNIOSEK 2.8. *Jeśli graf G jest hipohamiltonowski, to $G * K_r$ jest grafem silnie r -krawędziowo hamiltonowskim ($r \geq 1$). ■*

TWIERDZENIE 2.9 (Wojda [129a]). *Jeśli t, r, s są liczbami całkowitymi nieujemnymi, $t+r \leq n-3$, $t+r+s \leq n-2$, to każdy n -wierzchołkowy graf silnie $(t, r+s+1)$ -hamiltonowski jest silnie $(t+r, s)$ -hamiltonowski. ■*

WNIOSEK 2.10 (Wojda [129a]). *Każdy graf silnie $(p+1)$ -krawędziowo hamiltonowski jest p -hamiltonowski. ■*

Ostrość wniosku wynika z faktu, że jeśli G jest grafem hipohamiltonowskim, to na mocy wniosku 2.8 graf $G * K_{p+1}$ jest silnie $(p+1)$ -krawędziowo hamiltonowski, a nie jest oczywiście $(p+1)$ -hamiltonowski.

2.6. Własności quasi-hamiltonowskie. Obok własności czysto hamiltonowskich (polegających na istnieniu cykli lub łańcuchów hamiltonowskich) rozważane są również własności ogólniejsze i związane z nimi niezmienniki, które stanowią „miarę” niehamiltonowskości danego grafu.

Niedoborem hamiltonowskim, oznaczanym przez $s_H(G)$ (Skupień [105], [106]), w grafie G o $n \geq 3$ wierzchołkach nazywamy minimalną ilość nowych krawędzi, których dołączenie do G daje graf hamiltonowski. Ogólniej,

$$s_H(G) := \min \{p: \text{graf } G * K_p \text{ jest hamiltonowski}\}.$$

Zatem $s_H(K_1) = 2 = s_H(\overline{K_2})$, $s_H(K_2) = 1$, przy czym graf G jest hamiltonowski dokładnie wtedy, gdy $s_H(G) = 0$.

Analogiczny niezmiennik, $hc(G)$, wprowadzili Goodman i Hedetniemi [47a], przy czym $hc(G) = s_H(G)$ dla $G \neq K_1$ oraz $hc(K_1) = 1 = s_H(K_1) - 1$.

Jeśli $\pi_0(G)$ jest minimalną liczbą rozłącznych łańcuchów prostych w G (ewentualnie trywialnych K_1), zawierających wszystkie wierzchołki tego grafu, to

$$s_H(G) = \begin{cases} \pi_0(G) - 1 = 0 & \text{dla hamiltonowskiego } G, \\ \pi_0(G) + 1 = 2 & \text{dla } G = K_1, \\ \pi_0(G) & \text{dla pozostałych } G. \end{cases}$$

Oczywiście graf G ma łańcuch Hamiltona dokładnie wtedy, gdy $\pi_0(G) = 1$.

Majoranty dla s_H i π_0 oraz tylko dla π_0 są wskazane w pracach Skupienia [104], [105], [106] oraz Joliveta [61] i Bondy'ego i Chvátala [10].

Niezmiennik s_H i w pewnym stopniu również π_0 — to miary niehamiltonowości dowolnych (ewentualnie niespójnych) grafów. W przypadku grafów spójnych takimi miarami są: rząd hamiltonowski $o_H(G)$ zdefiniowany przez Joliveta [60] za pomocą pseudocykli hamiltonowskich, minimalna ilość wierzchołków wiszących (czyli stopnia 1) w drzewach częściowych danego grafu (por. Las Vergnas [72] i Bermond [7]) oraz minimalne wykładniki iteracji pewnych operacji na grafie (przejście do grafu krawędziowego $G \rightarrow L(G)$, do grafu totalnego $G \rightarrow T(G)$ oraz potęgowanie grafu; por. Skupień [106]).

Pseudocyklem hamiltonowskim C grafu G o $n \geq 3$ wierzchołkach nazywamy łańcuch zamknięty (na ogół nieelementarny) zawierający każdy wierzchołek grafu. Długością $l(C)$ pseudocyklu C nazywamy liczbę wyrazów w ciągu C będących krawędziami. *Rząd hamiltonowski* o_H jest określony następująco:

$$o_H(G) := \min \{l(C) - n : C \text{ jest pseudocyklem Hamiltona w } G\} \geq 0.$$

TWIERDZENIE 2.11 (Jolivet [60], [61]). *Jeśli G jest spójnym grafem o $n \geq 3$ wierzchołkach, to*

1° $0 \leq o_H(G) \leq n - 2$, przy czym jeśli G jest drzewem, to $o_H(G) = n - 2$, (patrz też Goodman i Hedetniemi [46a]);

2° jeśli G jest niehamiltonowski, to $\pi_0(G) \leq o_H(G)$, przy czym jeśli G ma wierzchołek stopnia $n - 1$, to $\pi_0(G) = o_H(G)$. ■

Grafem krawędziowym $L(G)$ danego grafu G (czyli grafem $L_\phi(G)$ w sensie [82]) nazywa się graf, którego wierzchołkami są krawędzie grafu G , przy czym dwa wierzchołki w $L(G)$ są sąsiednie, gdy są one sąsiednie jako krawędzie grafu G . W roku 1965 Chartrand wprowadził *indeks hamiltonowski* $h(G)$ grafu G jako minimalną liczbę nieujemną m taką, że m -ta iteracja operacji L na grafie G daje graf hamiltonowski $L^m(G)$. Udowodnił on również, że $h(G)$ istnieje i $h(G) \leq n - 3$ dla każdego spójnego n -wierzchołkowego grafu G różnego od P_n . W pracy [21] określono $h(G)$ dla drzew $G \neq P_n$ oraz podano oszacowania indeksu $h(G)$ dla innych grafów spójnych.

Zgodnie z definicją Behzada (por. Harary [51]), wierzchołkami *grafu totalnego* $T(G)$ są wierzchołki i krawędzie danego grafu G , przy czym dwa wierzchołki w $T(G)$ są sąsiednie, gdy są one sąsiednie lub incydentne jako elementy grafu G . Behzad i Chartrand [3] udowodnili, że jeśli $G \neq K_1$ jest grafem spójnym, to $T^2(G)$ jest grafem hamiltonowskim. Charakteryzację grafów G , dla których graf totalny $T(G)$ jest hamiltonowski, podali Fleischner i Hobbs [38].

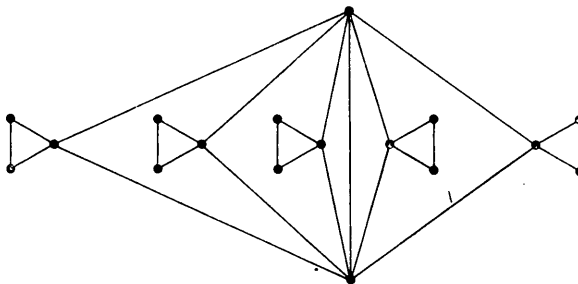
Własności hamiltonowskie potęg grafów omówione są w następnym paragrafie. Na zakończenie niniejszego paragrafu odnotujemy następującą obserwację wiążącą grafy eulerowskie z hamiltonowskimi:

TWIERDZENIE 2.12. *Jeśli graf G jest eulerowski, to graf $L(G)$ jest hamiltonowski.* ■

2.7. Własności hamiltonowskie potęg grafów. Graf F nazywamy k -tą potęgą grafu G , $k \geq 1$, i piszemy $F = G^k$, jeśli zbiory wierzchołków tych grafów są identyczne i macierz sąsiedztwa wierzchołków grafu F jest k -tą potęgą Boole'a macierzy sąsiedztwa wierzchołków grafu G . Przyjmujemy, że G jest podgrafem grafu G^k , przy czym $G^1 = G$. Oznacza to, że graf G^k otrzymujemy dołączając do G wszystkie krawędzie łączące pary niesąsiednich wierzchołków, których odległość w G nie przekracza k . Pierwszym wynikiem dotyczącym hamiltonowskich własności potęg grafów było następujące twierdzenie udowodnione w roku 1960.

TWIERDZENIE 2.13 (Sekanina [99]). *Sześcian dowolnego grafu spójnego mającego przynajmniej 3 wierzchołki jest hamiltonowsko spójny (w szczególności hamiltonowski).* ■

Twierdzenie to jest ostre w tym sensie, że istnieją spójne grafy, których kwadraty nie są hamiltonowskie. Hobbs [56] przypuszcza, że najmniejszym grafem eulerowskim, którego kwadrat nie jest hamiltonowski, jest 17-wierzchołkowy graf przedstawiony na rysunku 2.13.



Rys. 2.13. Przykład Hobbsa

Na konferencji z teorii grafów w Pradze w roku 1963 Sekanina postawił pytanie, jaka jest struktura grafu spójnego, którego kwadrat jest hamiltonowski. Znane są częściowe odpowiedzi na to pytanie. W szczególności Neuman [90] scharakteryzował drzewa, których kwadrat jest hamiltonowski lub hamiltonowsko spójny. Nadto Fleischner [36] scharakteryzował grafy kubiczne i pseudokubiczne (czyli o wierzchołkach ze stopniami 3 lub 1), których kwadraty są hamiltonowskie.

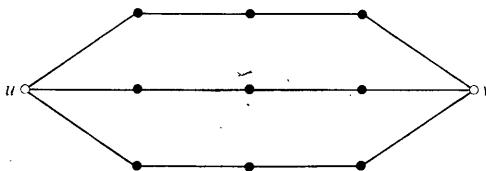
W roku 1966 na konferencji z teorii grafów w Tihany na Węgrzech Nash-Williams [85] postawił hipotezę (sformułowaną niezależnie również przez M.D. Plummera i przez L.W. Beinekego), że kwadrat dowolnego grafu 2-spójnego jest hamiltonowski. Hipoteza ta została udowodniona przez Fleischnera [37] w roku 1971. Silniejsze rezultaty, uzyskane przez zespół pięciu autorów w pracy [14], można sformułować następująco:

Twierdzenie 2.14 ([14]). Kwadrat G^2 dowolnego 2-spójnego grafu G rzędu ≥ 4 jest zarówno hamiltonowsko spójny, jak również 1-hamiltonowski. ■

Interesująca jest historia powstania pracy [14]. Początkowo jej autorzy pracowali w trzech oddzielnych grupach, a mianowicie Hobbs i Nash-Williams w Waterloo w Kanadzie, Jung w Berlinie Zachodnim, a Chartrand i Kapoor w Kalamazoo (Michigan) w USA. Gdy się okazało, że mniej więcej w tym samym czasie znaleźli tę samą metodę dowodu, zdecydowali się na opublikowanie jednej wspólnej pracy. W te same prace uzyskali również następujący wynik częściowo ogólniejszy:

Twierdzenie 2.15 ([14]). Jeśli graf G jest rzędu $\geq \kappa(G) + 2 \geq 4$, gdzie $\kappa(G)$ jest spójnością G , to graf G^2 jest $(\kappa(G) - 1)$ -hamiltonowski. ■

Teza ostatniego twierdzenia nie może być bezpośrednio wzmocniona w przypadku, gdy $\kappa(G) = 2$, ponieważ Zaks [131] podał dwie nieskończone rodziny 2-spójnych grafów, których kwadraty nie są 2-hamiltonowskie. Graf $G_{(n)}$ jednej z tych rodzin zawiera $3n + 2$ wierzchołków i składa się z n łańcuchów długości 4 łączących dwa ustalone wierzchołki u i v . Najmniejszy z tych grafów, $G_{(3)}$, przedstawiony jest na rysunku 2.14. Odnotujmy, że $G_{(3)} - \{u, v\}$ nie jest grafem hamiltonowskim.



Rys. 2.14. Graf $G_{(3)}$ (przykład Zaksa)

Twierdzenie 2.15 łącznie z pewnym wynikiem Hobbsa ([56], wniosek 4B) można ogólniej sformułować następująco:

Twierdzenie 2.16. Jeśli G jest spójnym grafem rzędu $\geq k + \kappa(G) \geq 4$, to dla każdego $k \geq 2$ graf G^k jest $(k + \kappa(G) - 3)$ -hamiltonowski. ■

Stąd jako wnioski otrzymujemy opublikowane wcześniej wyniki, a mianowicie twierdzenie G. Chartranda i S.F. Kapoora (1969) o tym, że sześcián G^3 dowolnego spójnego grafu G rzędu ≥ 4 jest 1-hamiltonowski, oraz ogólniejsze twierdzenie uzyskane przez V.N. Bhata i Kapoora (1971), a także przez P. Heinricha (1972), które mówi, że potęga G^k , $k \geq 3$, dowolnego spójnego grafu G rzędu $\geq k + 1$ jest $(k - 2)$ -hamiltonowska. Wnioskiem jest również twierdzenie Kapoora i D.R. Licka (1972), że potęga G^k , $k \geq 2$, dowolnego grafu 2-spójnego G rzędu $\geq k + 2$ jest $(k - 1)$ -hamiltonowska.

Następujące twierdzenie stanowi uzupełnienie wspomnianego twierdzenia Chartranda i Kapoora o sześcián G^3 :

Twierdzenie 2.17 (Schaar [97]). Sześcián G^3 dowolnego spójnego grafu G rzędu $n \geq 5$ bez nietrywialnych mostów (czyli mostów różnych od krawędzi wiszących) jest 2-hamiltonowski. ■

Hobbs uzyskał też inny interesujący wynik, który można wyrazić następująco.

Twierdzenie 2.18 ([56], wniosek 3B). *Jeśli $k \geq 3$ i G jest spójnym grafem rzędu $\geq k + \kappa(G) - 1$, to jego potęga G^k jest silnie $(k + \kappa(G) - 4, 1)$ -hamiltonowska. ■*

Warto również zwrócić uwagę na następujący wynik dotyczący własności hamiltonowskich potęg grafów wysoko hamiltonowskich.

Twierdzenie 2.19 (Chartrand i Kapoor [15]). *Jeśli G jest grafem p -hamiltonowskim rzędu $n \geq p + 3 \geq 3$, to jego potęga G^k jest $(p + 2k - 2)$ -hamiltonowska dla każdego $k \geq 1$ oraz $p + 2k \leq n - 1$. ■*

Na zakończenie niniejszego paragrafu warto podkreślić, że można oczekiwać wielu dalszych wyników dotyczących własności hamiltonowskich potęg grafów np. o danej spójności lub danych własnościach hamiltonowskich (p. np. [129b]). Kilka związanych z tym hipotez sformułował Hobbs w pracy [56]. Można również oczekiwać dalszych wyników charakteryzujących grafy, których potęgi mają określone własności hamiltonowskie. W związku z tym warto wspomnieć, że Schaar [97c] skorygował wynik Lindy Lesniak [75] i scharakteryzował grafy spójne, których sześciany są silnie $(1,1)$ -hamiltonowskie oraz 3-hamiltonowskie, zaś charakteryzację grafów, których p -ta potęga jest $(p-1)$ -hamiltonowska ($p \geq 3$), podali Schaar [97b] dla $p = 3$ i Heinrich ([53a], por. [97a]) dla $p \geq 4$.

2.8. Warunki wystarczające istnienia cykli i łańcuchów. W dalszym ciągu zakładamy, że n jest liczbą wierzchołków grafu G ($G = G_n$). Pierwszy warunek wystarczający na to, by graf G miał cykl Hamiltona, podany został przez Diraca w roku 1952. Jest to warunek D_{n0} otrzymany z następującego warunku przez przyjęcie $s = 0$.

$D_{ns}(G)$ (dla $-n \leq s \leq n-2$): *Każdy wierzchołek n -wierzchołkowego grafu G ma stopień*

$$d(x, G) \geq \frac{n+s}{2}.$$

Analogicznymi uogólnieniami warunków Orego z lat 1961 i 1960 są warunki następujące:

$O_{ns}^1(G)$ (dla $-1 \leq s \leq n-2$): *Graf G ma przynajmniej $\binom{n-1}{2} + 2 + s$ krawędzi;*

$O_{ns}^2(G)$ (dla $-n \leq s \leq n-1$): *Dla każdych dwóch niesąsiednich wierzchołków x i y grafu G*

$$d(x, G) + d(y, G) \geq n + s.$$

Jednym z najciekawszych warunków jest następujący warunek typu Chvátala (por. [104], [108], [5]), w którym $(d_i)_{i=1}^n$ jest ciągiem stopni grafu G , czyli niemalejącym ciągiem utworzonym ze stopni wszystkich wierzchołków w G :

$Ch_{ns}(G)$ (dla $-n \leq s \leq n-3$): *Dla każdego wskaźnika i , jeśli $\max\{1, -s\} \leq$*

$$i < \frac{n-s}{2}, \text{ to}$$

$$d_i > i + s \quad \text{lub} \quad d_{n-s-i} \geq n - i.$$

Łatwo widzieć, że każdy graf nie spełniający warunku Ch_{ns} ma ciąg stopni majorizowany przez ciąg stopni jednego z następujących grafów:

$$(2.8) \quad G(t) = G(t; n, s) = \bar{K}_t * K_{t+s} * K_{(n-s-2t)},$$

gdzie $\max\{1, -s\} \leq t < (n-s)/2$, $-n < s \leq n-3$, a schematem zespolenia jest P_3 .

Warunek typu Chvátala Ch_{ns} jest lepszy (czyli słabszy) nie tylko od powyższych warunków typu Diraca D_{ns} oraz Orego O_{ns}^1 i O_{ns}^2 , lecz również od pominiętych tutaj warunków typu Pósy, Erdösa, Bondy'ego oraz Skupienia-Wojdy (por. [104] i [108]).

Słabszym zarówno od tych wszystkich warunków jak i od warunków Las Vergenasa [71] i [72] jest najnowszy warunek Bondy'ego-Chvátala [10] dotyczący $(n+s)$ -domknięcia grafu G .

k -domknięciem $C_k(G)$ grafu G nazywamy najmniejszy przeciwfaktory grafu G , w którym każde dwa różne wierzchołki o sumie stopni $\geq k$ są sąsiednie. Własność P grafów n -wierzchołkowych nazywamy k -stabilną, jeśli z faktu, że dla dowolnych niesąsiednich wierzchołków u, v dowolnego grafu G o sumie stopni $\geq k$ graf G z dołączoną krawędzią uv ma własność P , wynika, że wyjściowy graf G też ma własność P . Stąd i z definicji k -domknięcia $C_k(G)$ wynika

LEMAT. *Jeśli własność P jest k -stabilna i $C_k(G)$ ma własność P , to graf G też ma własność P .* ■

Założmy, że

$$n \geq 3, \quad 0 \leq p \leq n-3, \quad 0 \leq q, \quad p+q \leq n-1, \quad -n < s < n.$$

Można udowodnić, że zarówno (p, q) -hamiltonowskość, jak i silna (p, q) -hamiltonowskość — to własności $(n+p+q)$ -stabilne. Stąd jako wnioski otrzymujemy rezultaty Bondy'ego i Chvátala, że p -hamiltonowskość jest $(n+p)$ -stabilna, a q -krawędziowa hamiltonowskość jest $(n+q)$ -stabilna. Nadto, na mocy powyższego lematu na to, by graf G był silnie (p, q) -hamiltonowski, wystarcza następujący warunek Bondy'ego-Chvátala dla $s = p+q \geq 0$:

$$BCh_{ns}(G) \text{ (dla } -n < s \leq n-1): C_{n+s}(G) = K_n.$$

Bondy i Chvátal udowodnili też, że własność

$$\pi_0(G) \leq s \quad (s \geq 1)$$

jest $(n-s)$ -stabilna. Zatem na mocy powyższego lematu dla $-n < s < 0$ warunek $BCh_{ns}(G)$ wystarcza na to, by $\pi_0(G) \leq (-s)$, a dla $s \leq 0$ — na to, by $s_H(G) \leq (-s)$. Można łatwo udowodnić, że warunki (zależne od s) zacytowane lub tylko wspomniane na początku tego paragrafu są mocniejsze od BCh_{ns} , a więc implikują te same własności grafu G .

Wszystkie wyżej wymienione warunki są możliwie najslabsze w tym sensie, że istotne osłabienie oszacowań liczbowych występujących w dowolnym z tych warunków daje warunek, który już nie jest wystarczający. Przykłady grafów, które potwierdzają to dla $s \leq n-3$ można znaleźć wśród grafów $G(t)$ (2.8). Zauważmy, że istotnie $G(t) = G(t; n, s)$ nie jest grafem (p, q) -hamiltonowskim dla $p+q = s \geq 0$, a dla $s < 0$ mamy

$$\pi_0(G(t; n, s)) = -s+1;$$

nadto

$$C_{n+s}(G(t)) = G(t).$$

W szczególności ponieważ $C_{n+s-1}(G(t)) = K_n$, więc $(n+s)$ -domknięcie w BCh_{ns} nie może być zastąpione przez $(n+s-1)$ -domknięcie.

W pracy Skupienia [103] podane zostało osłabienie pierwszego warunku Las Vergnasa [71] dla $s = 0$, które zapewnia hamiltonowskość koła C_5 , co oznacza, że dla $s = 0$ osłabienie to nie jest mocniejsze ani od drugiego warunku Las Vergnasa [72], ani od warunku Bondy'ego–Chvátala BCh_{n0} (w obu przypadkach dla $s = 0$). Sformułowania uogólnienia tego osłabienia dla $s \geq 0$ wskazał Wojda [129].

Aby podać inny interesujący warunek wystarczający, przyjmijmy, że $\alpha(G)$ oznacza maksymalną liczbę wierzchołków niezależnych w G , czyli wierzchołków, z których żadne dwa nie są sąsiednie. Przypomnijmy, że $\kappa(G)$ jest spójnością grafu G , przy czym G ma n wierzchołków, $n \geq 3$. Następujący warunek jest uogólnieniem warunków Chvátala i Erdősa [28].

$$ChE_{ns}(G) \text{ (dla } -n < s \leq 2): \alpha(G) - \kappa(G) \leq -s.$$

n -wierzchołkowy graf G spełniający ten warunek dla $s = -1, 0, 1$ odpowiednio ma łańcuch Hamiltona, jest hamiltonowski, względnie jest hamiltonowsko spójny (Chvátal–Erdős [28]), dla $s = 2$ — jest 2-krawędziowo hamiltonowski (Berge [5], str. 213), dla $s \leq 0$ — ma $s_H(G) \leq (-s)$ i dla $s < 0$ — ma $\pi_0(G) \leq (-s)$ (Skupień [105]). Ostatni z tych wyników, równoważny z nierównością

$$\pi_0(G) \leq \max\{1, \alpha(G) - \kappa(G)\},$$

udowodnioną również przez Joliveta [61], jest wzmocnieniem następującego wniosku z twierdzenia Gallai'ego i Milgrama [41]:

$$(2.9) \quad \pi_0(G) \leq \alpha(G).$$

Innego typu warunek wystarczający na to, by graf był hamiltonowski, występuje w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 2.20 (Goodman i Hedetniemi [47]). *Jeśli graf G jest 2-spójny i nie zawiera jako podgrafu indukowanego ani gwiazdy $K(1, 3)$, ani $K(1, 3)$ z dołączoną nową krawędzią (czyli trójkąta C_3 z dodatkową krawędzią wiszącą), to graf G jest hamiltonowski. ■*

Nie-silnie- (p, q) -hamiltonowskie n -wierzchołkowe grafy ekstremalne (czyli o maksymalnej liczbie krawędzi) znajdują się wśród grafów (2.8) $G(t; n, s)$.

Twierdzenie 2.21 (Skupień i Wojda [109] i [108]). *Jeżeli G jest ekstremalnym n -wierzchołkowym grafem, który nie jest silnie (p, q) -hamiltonowski, przy czym $p+q \leq n-3$, to*

$$G = K_1 * K_{1+p+q} * K_{n-p-q-2} \quad (n \geq 3)$$

lub dodatkowo

$$G = \overline{K_3} * K_{2+p+q} \quad \text{dla} \quad n = 5+p+q. \quad \blacksquare$$

Podstawiając tu $p = q = 0$, otrzymujemy twierdzenie Bondy'ego [9], które potwierdza kompletność listy ekstremalnych niehamiltonowskich grafów, podanej wcześniej przez Ore'go [91].

Nadmieńmy jeszcze, że Schmeichel i Hakimi udowodnili niedawno w pracy [98], że warunek Chvátala $\text{Ch}_{n0}(G)$ (dla $s = 0$) implikuje, że G jest albo pancykliczny, albo $G = K(n/2, n/2)$. Wcześniej Bondy [8] udowodnił, że warunek Orego $\text{O}_{n0}^2(G)$ (dla $s = 0$) implikuje tę samą tezę.

Jako uogólnienie problemów hamiltonowskich można uważać zagadnienia istnienia s -wierzchołkowych kół C_s lub łańcuchów P_s w grafie G . Nowe warunki wystarczające dla ich istnienia podali Bondy i Chvátal [10].

Kilka warunków wystarczających na to, by graf był lokalnie hamiltonowski (§ 2.2), opublikowanych zostało w pracy Skupienia [102], uogólnienia zaś — w [106b].

Warunki wystarczające na to, by nieskończony graf o przeliczalnej ilości wierzchołków zawierał jednostronnie lub dwustronnie nieskończony łańcuch Hamiltona, znalezione zostały przez Nash-Williamsa [88].

2.9. Warunki wystarczające istnienia konturów i dróg. W dalszym ciągu D oznacza digraf, n zaś ilość jego wierzchołków. Najstabszym z obecnie znanych warunków wystarczających dla istnienia konturu hamiltonowskiego w digrafie n -wierzchołkowym (niekoniecznie pełnym) D jest następujący warunek Meyniela [84]:

$M_{n0}(D)$: *D jest digrafem silnie spójnym, w którym dla każdych dwóch niesąsiednich wierzchołków x, y*

$$\text{od}(x) + \text{id}(x) + \text{od}(y) + \text{id}(y) \geq 2n - 1.$$

Mocniejszy jest warunek Ghouila-Houriego GH_{n0} , od którego z kolei mocniejszym jest warunek Nash-Williamsa NW_{n0} (dla $s = 0$), przy czym sformułowania tych warunków są następujące (p. [42], [86]):

$\text{GH}_{n0}(D)$: *D jest digrafem silnie spójnym, przy czym dla każdego jego wierzchołka x*

$$\text{od}(x) + \text{id}(x) \geq n$$

(osłabienie tego warunku podane jest w [44]);

$\text{NW}_{ns}(D)$ (dla $-n < s \leq n-2$): *Dla każdego wierzchołka x digrafu D*

$$\text{od}(x) \geq \frac{n+s}{2}, \quad \text{id}(x) \geq \frac{n+s}{2}.$$

Dla $s < 0$ warunek $\text{NW}_{ns}(D)$ implikuje

$$(2.10) \quad \bar{\pi}_0(D) \leq (-s),$$

tzn. *minimalna ilość $\bar{\pi}_0(D)$ rozłącznych dróg prostych w D zawierających wszystkie wierzchołki jest nie większa od $(-s)$ ($-n < s < 0$). Wynika to z implikacji*

$$\text{NW}_{ns}(D) \Rightarrow \text{NW}_{n+(-s),0}(D * K^*_{(-s)}) \Rightarrow (D * K^*_{(-s)}) \text{ ma kontur Hamiltona},$$

gdzie $s < 0$, $K^*_{(-s)}$ jest $(-s)$ -wierzchołkowym pełnym digrafem symetrycznym.

Nierówność (2.10) jest implikowana analogicznie przez następujące warunki:

$M_{ns}(D)$ (dla $-n < s < 0$): *Dla każdych dwóch wierzchołków niesąsiednich w D*

$$\text{od}(x) + \text{id}(x) + \text{od}(y) + \text{id}(y) \geq 2n - 1 + 2s;$$

$\text{GH}_{ns}(D)$ (dla $-n < s < 0$): Dla każdego wierzchołka x digrafu D

$$\text{od}(x) + \text{id}(x) \geq n + s.$$

Inny warunek wystarczający istnienia konturu Hamiltona, niezależny od powyższych warunków, zawarty jest w następującym twierdzeniu:

TWIERDZENIE 2.22 (Camion [13]). *W silnie spójnym digrafie pełnym istnieje kontur Hamiltona.* ■

W naturalny sposób można założyć, że każdy graf G jest równoważny symetrycznemu digrafowi $D = G^*$ o tym samym zbiorze wierzchołków, przy czym dwa wierzchołki są sąsiednie w G^* dokładnie wtedy, gdy są sąsiednie w G . Dzięki tej umowie powyższe warunki typu Meyniela M_{ns} oraz Ghouila–Houriego GH_{ns} i Nash–Williamsa NW_{ns} można uważać za osłabienia warunków odpowiednio typu Orego O_{ns}^2 oraz typu Diraca D_{ns} (§ 2.8) dla $s \leq 0$. Istotnie, wtedy bowiem

$$d(x, G^*) = \text{od}(x, G)^* + \text{id}(x, G^*) = 2d(x, G).$$

Uogólnieniem wzoru (2.9) jest oczywiście następujący wzór Gallaiego i Milgrama [41]:

$$\bar{\pi}_0(D) \leq \alpha(D).$$

Bermond [6] udowodnił, że warunek $\text{NW}_{ns}(D)$ dla $s \geq 0$ implikuje, że digraf D jest s -drogowo hamiltonowski, tzn. każda jego droga prosta o długości $\leq s$ jest zawarta w pewnym konturze Hamiltona w D .

Dowolnie hamiltonowskie digrafy, czyli n -wierzchołkowe digrafy $(n-1)$ -drogowo hamiltonowskie, scharakteryzowane zostały przez Chartranda, Kronka i Licka, którzy otrzymali następujące uogólnienie twierdzenia 2.4.

TWIERDZENIE 2.23 ([20]). *Digraf D o $n \geq 2$ wierzchołkach jest dowolnie hamiltonowski dokładnie wtedy, gdy $D = C_n^*$ (koło symetryczne) lub $n = rk$ i $D = D(r, k) = (X, U)$, gdzie*

$$X = \bigcup_{i=1}^r X_i, |X_i| = k \text{ oraz } (x, y) \in U \Leftrightarrow x \in X_i, y \in X_j \text{ oraz } j - i \equiv 1 \pmod{r}$$

(w szczególności $D(1, n) = K_n^*$, $D(2, k) = K^*(k, k)$, $D(n, 1)$ jest konturem). ■

2.10. Liczba cykli i konturów, łańcuchów i dróg Hamiltona.

TWIERDZENIE 2.24 (Berge [5], str. 189). *Liczby dróg hamiltonowskich w digrafie $D = (X, U)$ i w digrafie dopełniającym $\bar{D} = (X, X \times X - U)$ przystają modulo 2 (tzn. są równocześnie albo parzyste, albo nieparzyste).* ■

Przypomnijmy, że turniejem jest digraf pełny antysymetryczny.

TWIERDZENIE 2.25 (Rédei [95]). *Liczba dróg hamiltonowskich w turnieju jest nieparzysta.* ■

TWIERDZENIE 2.26 (C. A. B. Smith, por. Tutte [123]). *Liczba cykli Hamiltona zawierających daną krawędź w grafie kubicznym jest parzysta.* ■

WNIOSEK 2.26. *Hamiltonowski graf kubiczny ma co najmniej 3 cykle Hamiltona.* ■

Liczba tych cykli jest nie mniejsza od 4, gdy graf kubiczny jest dwudzielny. Zachodzi bowiem następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 2.27 (A. Kotzig, p. Bosák [11]). *Kubiczny graf dwudzielny ma parzystą liczbę cykli Hamiltona.* ■

Uogólniając twierdzenie Diraca o tym, że warunek $D_{n0}(G)$:
(2.11) $\forall x: d(x, G) \geq n/2$ ($n \geq 3$ jest liczbą wierzchołków w G)
implikuje, że G ma cykl Hamiltona, Nash-Williams otrzymał następujący wynik:

TWIERDZENIE 2.28 ([87]). *Graf G spełniający warunek (2.11) ma przynajmniej $\max\{1, [5(n + \varepsilon_n + 10)/224]\}$ krawędziowo rozłącznych cykli hamiltonowskich, gdzie $\varepsilon_n = 1$ dla n nieparzystych oraz $\varepsilon_n = 0$ dla n parzystych.* ■

TWIERDZENIE 2.29 (N. J. A. Sloane, por. Berge [5], str. 190). *Jeśli graf ma dwa cykle Hamiltona bez wspólnej krawędzi, to ma on co najmniej 3 cykle Hamiltona.*

Okazuje się, że ostatnie twierdzenie wynika z wniosku 2.26. ■

Lichtenbaum [76] podał wzór wyrażający liczbę kół Hamiltona dowolnego n -wierzchołkowego grafu G za pomocą macierzy sąsiedztwa wierzchołków $A = A_{\delta_0}$ grafu G .

Jeśli więc $A = (a_{jk})$, to dla wierzchołków j, k ($j, k = 1, 2, \dots, n$) mamy

$$a_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{gdy wierzchołki } j \text{ i } k \text{ są sąsiednie,} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Jeśli $\delta_1 \delta_2 \dots \delta_s$ oznacza s -elementową kombinację liczb $1, 2, \dots, n$ ($0 \leq s \leq n$), to $A_{\delta_0 \delta_1 \dots \delta_s}$ oznacza albo macierz A_{δ_0} dla $s = 0$, albo podmacierz macierzy A_{δ_0} otrzymaną przez usunięcie s wierszy i s kolumn o jednakowych numerach $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s$ dla $s \geq 1$.

Symbol $\text{sp } A_{\delta_0 \delta_1 \dots \delta_s}^n$ oznacza ślad n -tej potęgi macierzy $A_{\delta_0 \delta_1 \dots \delta_s}$, czyli sumę elementów na przekątnej głównej macierzy $A_{\delta_0 \delta_1 \dots \delta_s}^n$. Liczba kół Hamiltona w n -wierzchołkowym grafie G , $n \geq 3$, jest równa

$$(2.12) \quad \frac{1}{2n} \sum_{s=0}^{n-2} (-1)^s \sum_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_s} \text{sp } A_{\delta_0 \delta_1 \dots \delta_s}^n,$$

gdzie drugie (wewnętrzne) sumowanie rozciąga się na $\binom{n}{s}$ wszystkich kombinacji po s liczb spośród n liczb $1, 2, \dots, n$. Oczywiście liczba cykli Hamiltona (rozumianych jako ciągi) jest $2n$ razy większa od liczby kół Hamiltona w grafie G .

Żądając, by wyrażenie (2.12) było różne od zera, otrzymujemy następujący warunek konieczny i wystarczający na to, by graf G o $n \geq 3$ wierzchołkach, którego macierzą sąsiedztwa jest A_{δ_0} był hamiltonowski

$$\sum_{s=0}^{n-2} (-1)^s \sum_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_s} \text{sp } A_{\delta_0 \delta_1 \dots \delta_s}^n \neq 0.$$

Ponieważ jednak lewa strona ma zbyt skomplikowaną postać, wynik ten ma małe znaczenie praktyczne.

Analogiczny wzór, wyrażający liczbę kół Hamiltona grafu G za pomocą minorów głównych macierzy A sąsiedztwa wierzchołków, podany został przez Vrbę [125a].

3. Zagadnienie komiwojażera

3.1. Sformułowania, podstawowe wyniki, zastosowania

3.1.1. Teoria zagadnienia. Dana jest rzeczywista macierz kwadratowa $C = (c_{ij})$ stopnia n . *Drogą komiwojażera* będziemy nazywać dowolny ciąg $p+1$ liczb całkowitych spośród liczb $1, 2, \dots, n$, w którym każda z liczb całkowitych występuje co najmniej jeden raz oraz pierwsza i ostatnia są sobie równe. Innymi słowy, dana jest sieć $D_c = \langle X, U; c \rangle$, gdzie $D = \langle X, U \rangle$ jest digrafem pełnym, a c funkcją rzeczywistą, $c: U \rightarrow \mathbf{R}$. *Drogą komiwojażera* nazywać będziemy dowolną drogę zamkniętą digrafu D przechodzącą przez każdy wierzchołek co najmniej jeden raz. Drogę komiwojażera zapisywać będziemy albo w postaci ciągu wierzchołków

$$s = [i_1, i_2, \dots, i_{p-1}, i_p, i_1],$$

albo w postaci uporządkowanego zbioru łuków tej drogi

$$s' = ((i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{p-1}, i_p), (i_p, i_1)).$$

Przez *problem komiwojażera* (w skrócie oznaczać go będziemy często literami TSP od angielskiej nazwy zagadnienia *travelling salesman problem*) rozumiemy minimalizację długości drogi komiwojażera, tj.

$$\text{minimalizację } t = \sum_{(i,j) \in s'} c_{ij}$$

Aby zagadnienie miało rozwiązanie (tj. rozwiązanie skończone), będziemy zakładać, że w sieci D nie istnieje kontur ujemnej długości (patrz rozdział 3 w [115]). Zauważmy, że TSP dla sieci D_c opartej na dowolnym, niekoniecznie pełnym, digrafie D może być w prosty sposób sprowadzony do powyższego przypadku. Należy jedynie rozpatrywany digraf uzupełnić do digrafu pełnego, a dołączone łuki obciążyć tak dużą wagą, by gwarantowała ona, że żaden z łuków dołączonych nie znajdzie się w rozwiązaniu optymalnym.

Problem komiwojażera doczekał się bardzo wielu prac, ale znajomość teorii tego zagadnienia jest nadal niepełna. Należy to rozumieć w tym sensie, że w ogólnym przypadku rozwiązanie optymalne nie może być wyznaczone tak efektywnie, jak na przykład rozwiązanie problemu najkrótszej drogi [115]. Ostatnie prace (np. [64]) skłaniają nawet do głębokiego pesymizmu, wydaje się bowiem, że efektywna metoda rozwiązywania TSP nie istnieje. Określenie *metoda efektywna (algorytm efektywny)*, w tej pracy jak i w innych pracach tego cyklu oznacza, że zarówno czas obliczeń (lub liczba operacji podstawowych), jak i wymagana pamięć maszyny cyfrowej są wielomianami zmiennej N , gdzie N jest parametrem lub wektorem parametrów zagadnienia (jest to *efektywność w sensie Edmonsa*). W przypadku TSP za N można przyjąć liczbę n .

Podamy teraz kilka ważniejszych twierdzeń upraszczających problem lub umożliwiających konstrukcję metody rozwiązywania (patrz praca przeglądowa [4]).

TWIERDZENIE 3.1. *Jeśli macierz $C = (c_{ij})$ spełnia warunek trójkąta, tj. $\forall i, j, k$: $c_{ik} + c_{kj} \geq c_{ij}$, to istnieje najkrótsza droga komiwojażera przechodząca przez każdy wierzchołek dokładnie jeden raz.* ■

Tak więc, jeśli macierz C spełnia warunek trójkąta, to jednym z rozwiązań optymalnych dla TSP jest najkrótszy kontur Hamiltona w D_c . Jeśli natomiast macierz C nie spełnia warunku trójkąta, to zagadnienie można także uprościć:

(a) Wyznaczyć macierz $C^* = (c_{ij}^*)$ będącą macierzą najkrótszych dróg w sieci D_c między każdą parą wierzchołków. Oczywiście macierz C^* spełnia warunek trójkąta (patrz [115]).

(b) Wyznaczyć najkrótszy kontur Hamiltona w sieci $D_{c^*} = \langle X, U; c^* \rangle$, oznaczmy go przez $s^* = [i_1, i_2, \dots, i_n, i_1]$.

(c) Każdy łuk konturu s^* zastąpić najkrótszą drogą, tj. dla każdego $j = 1, 2, \dots, n$, gdzie przyjmujemy $n+1 = 1$, zamiast (i_j, i_{j+1}) wstawić wierzchołki najkrótszej drogi z i_j do i_{j+1} , oznaczmy tak utworzoną drogę przez $\bar{s}$.

Łatwo wykazać, że $\bar{s}$ jest najkrótszą drogą komiwojażera w sieci D_c .

Dzięki twierdzeniu 3.1, w dalszych rozważaniach możemy ograniczyć się do rozpatrywania najkrótszych konturów Hamiltona w D_c .

Jeśli miara odległości reprezentowana przez macierz C jest odległością w sensie Euklidesa, to twierdzenie 3.1 można wzmocnić.

TWIERDZENIE 3.2. *Jeśli C jest macierzą odległości w sensie Euklidesa, to istnieje nieprzecinająca się na płaszczyźnie najkrótsza droga komiwojażera w sieci D_c . ■*

Za Millerem i współautorami (patrz np. [111] i [67]) przedstawimy teraz problem komiwojażera jako zagadnienie programowania całkowitoliczbowego.

Niech x_{ij} będzie zmienną decyzyjną przyjmującą wartość 1, jeśli komiwojażer z punktu i przyjeżdża bezpośrednio do punktu j , a 0 — w przeciwnym razie ($i, j = 1, 2, \dots, n$).

Wtedy problem komiwojażera polega na minimalizacji

$$(3.1) \quad z(C) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij},$$

przy ograniczeniach

$$(3.2) \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

$$(3.3) \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$(3.4) \quad y_i - y_j + nx_{ij} \leq n-1 \quad (i \neq j; i, j \neq 1; i, j = 2, \dots, n),$$

$$(3.5) \quad x_{ij} = 0 \text{ lub } 1 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

gdzie y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) mogą przyjmować dowolne wartości rzeczywiste.

Ograniczenia (3.2), (3.3), (3.5) zapewniają, że każdy punkt będzie odwiedzany przez komiwojażera dokładnie jeden raz, natomiast ograniczenie (3.4) zostało dołączone, aby wyeliminować rozwiązania zawierające kontury o długości mniejszej lub równej $n-1$. Zagadnienie (3.1)–(3.3), (3.5) jest *problemem przydziału* (w skrócie AP — *assignment problem*).

Stąd otrzymujemy

TWIERDZENIE 3.3. Dla ustalonej macierzy C mamy

$$t_{\text{opt}}(\text{AP}) \leq t_{\text{opt}}(\text{TSP}),$$

gdzie $t_{\text{opt}}(\text{AP})$ i $t_{\text{opt}}(\text{TSP})$ oznaczają odpowiednio wartości rozwiązań optymalnych zagadnienia przydziału i zagadnienia komiwojażera z macierzą C . ■

Istnieje pewna grupa algorytmów rozwiązywania TSP bazujących na spostrzeżeniu, że rozwiązanie dopuszczalne dla TSP jest także rozwiązaniem dopuszczalnym dla AP. Algorytmy te stosują *metodę podziału i ograniczeń* do eliminowania w rozwiązaniu dopuszczalnym dla AP konturów o długości mniejszej niż n (patrz 3.2, a także przegląd [4]). Ograniczenia postaci (3.4), których w sformułowaniu (3.1)–(3.5) dla ustalonego problemu TSP o n punktach jest $\binom{n-1}{2} = (n^2 - 3n + 2)/2$, można zastąpić inną grupą ograniczeń mającą na celu to samo, tj. eliminację rozwiązań z konturami krótszymi niż n :

$$(3.6) \quad \sum_{i \in S} \sum_{j \in \bar{S}} x_{ij} \geq 1 \quad \text{dla każdego niepustego } S \subset \{1, 2, \dots, n\},$$

gdzie $\bar{S} = \{1, 2, \dots, n\} - S$.

Jak widać, dla ustalonego n liczba ograniczeń postaci (3.6) jest równa $2^n - 2$, a więc jest niewspółmiernie większa niż liczba ograniczeń postaci (3.4). Okazało się jednak, że metoda rozwiązywania TSP bazująca na sformułowaniu (3.1)–(3.3), (3.6) i (3.5) jest o wiele szybsza od metody wykorzystującej (3.1)–(3.5) (patrz [4], a także [30] i [29]).

Następne twierdzenie pozwala na pewne przekształcenie macierzy C bez zmiany zbioru rozwiązań optymalnych:

TWIERDZENIE 3.4. Niech $a = (a_1, \dots, a_n)$ i $b = (b_1, \dots, b_n)$ będą wektorami liczb rzeczywistych. Wtedy

$$z(C) = z(C') + \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{j=1}^n b_j, \quad \text{gdzie} \quad C' = (c_{ij} - a_i - b_j). \quad \blacksquare$$

Jako jedną z ciekawszych zależności można podać równoważne sformułowanie TSP jako *problemu wyznaczania najdłuższej drogi prostej* w sieci zawierającej kontur dodatniej długości (patrz [115], § 4.8). Ponieważ dla tego drugiego zagadnienia nie ma efektywnego algorytmu rozwiązywania, więc fakt ten ma znaczenie jedynie teoretyczne.

3.1.2. Zastosowania. W samym sformułowaniu problemu tkwi problem o znaczeniu praktycznym: wyznaczyć najkrótszą drogę dla komiwojażera (dostawcy, pracownika serwisu, inkasenta, listonosza, itp.), który musi obsłużyć n miejsc(-owości) i powrócić do miejsca wyjazdu. •

Bardzo szeroką grupę problemów sprowadzalnych do TSP stanowią problemy wyznaczania optymalnej kolejności wykonywania operacji (obróbki) na maszynach (*job and machine sequencing problems*). Niech danych będzie n prac (czynności), które muszą być wykonane na ustalonej (jednej) maszynie w sposób cykliczny, tj. po ostatniej pracy znowu ma nastąpić pierwsza. Oznaczmy przez τ_{ij} czas potrzebny

do przestrojenia maszyny z i -tej czynności na j -tą. Należy wyznaczyć kolejność wykonywania prac minimalizującą sumaryczny czas zużyty na zmiany oprzyrządowania maszyny. Jest to jak widać zagadnienie komiwojażera dla sieci D_τ .

W pracy [43] podany został specjalny, efektywny algorytm rozwiązywania tego zagadnienia dla specjalnej postaci wyrażeń τ_{ij}

$$\tau_{ij} = \int_{B_i}^{A_j} f(x) dx \quad \text{dla} \quad A_j \geq B_i$$

lub

$$\tau_{ij} = \int_{A_j}^{B_i} g(x) dx \quad \text{dla} \quad B_i > A_j,$$

gdzie A_i , B_i są dowolnymi liczbami rzeczywistymi ($i = 1, 2, \dots, n$), a $f(x)$ i $g(x)$ są funkcjami całkowalnymi spełniającymi warunek $f(x) + g(x) \geq 0$.

Natomiast w pracach [48] i [113] rozpatrzono specjalny przypadek ogólnego problemu optymalnego wykonania n prac na m maszynach. Wykazano tam, że dla tzw. procesu obróbki cieplnej (lub bez składowisk międzymaszynowych), tj. dla takiego procesu, w którym ustalona praca (element) musi być wykonana na kolejnych m maszynach bez przerw, optymalna (tj. o minimalnym czasie) kolejność wykonania n prac na m maszynach może być wyznaczona przez rozwiązanie TSP dla specjalnej macierzy, utworzonej z czasów przerw między pracami na ostatniej maszynie.

3.2. Algorytmy rozwiązywania TSP

3.2.0. Uwagi ogólne. W tym paragrafie oprzemy się na pracy [4].

W metodach rozwiązywania TSP wyróżnić można zwykle t r z y p o d s t a w o - w e e t a p y: generowanie wielkości początkowych, schemat generowania rozwiązania i kryterium zakończenia obliczeń. Metodę nazywać będziemy *dokładną*, jeśli kryterium zakończenia obliczeń powoduje przerwanie obliczeń wtedy i tylko wtedy, gdy otrzymane rozwiązanie jest rozwiązaniem optymalnym. Jeśli natomiast obliczenia mogą się zakończyć także w przypadku, gdy nie zostało otrzymane rozwiązanie optymalne, to metodę nazywać będziemy *przybliżoną*. W większości algorytmów metoda generowania wielkości początkowych i kryterium zakończenia obliczeń zależą od schematu generowania rozwiązania. Właściwa więc będzie klasyfikacja metod rozwiązywania TSP właśnie ze względu na ten drugi etap.

Można wyróżnić trzy zasadnicze i różniące się między sobą sposoby generowania rozwiązań polegające na

- (a) polepszeniu aktualnego rozwiązania;
- (b) konstrukcji rozwiązania;
- (c) eliminacji konturów krótszych w aktualnym rozwiązaniu.

W przypadku (a) punktem startowym metody jest dowolny kontur Hamiltona, a schemat generowania rozwiązania pozwala otrzymać rozwiązanie lepsze, będące w określonym sensie sąsiadem rozwiązania aktualnego. Zakończenie obliczeń na-

stępuje wtedy, gdy nie jest możliwe otrzymanie lepszego rozwiązania sąsiedniego. Metoda tego typu przedstawiona jest w 3.2.2.

W przypadku (b) punktem startowym jest jeden z wierzchołków, powiedzmy i_1 , a rozwiązanie jest generowane przez odpowiedni wybór różnych wierzchołków tak, aby ostatecznie otrzymać kontur Hamiltona $[i_1, i_2, \dots, i_n, i_1]$, i to jest kryterium zakończenia obliczeń. Metoda o tym schemacie generowania rozwiązania przedstawiona jest w 3.2.3.

I wreszcie przypadek (c), o którym wspominaliśmy już przy okazji sformułowania TSP jako zagadnienia programowania całkowitoliczbowego. Za punkt startowy przyjmujemy rozwiązanie optymalne dla zagadnienia przydziału. Jeśli istnieje rozwiązanie optymalne dla AP, będące konturem Hamiltona, to jest ono także rozwiązaniem optymalnym dla TSP, natomiast w przeciwnym przypadku stosujemy metodę eliminacji konturów krótszych, która może być metodą programowania liniowego lub typu podziału i ograniczeń (patrz dla przykładu [30] i [29], a także [4]).

Krytyczny przegląd algorytmów rozwiązywania TSP znaleźć można w pracy [4].

Jak już wspomnieliśmy w 3.1, dla ogólnej postaci macierzy C żadna ze znanych metod rozwiązywania TSP nie jest efektywna w sensie Edmondsa, tj. dla żadnego algorytmu nie istnieje stała p taka, że czas obliczeń lub/i wymagana pamięć maszyny cyfrowej są rzędu $O(n^p)$, gdzie n jest liczbą wierzchołków sieci D_c lub innym parametrem zagadnienia. Jedynie w szczególnych przypadkach udało się podać efektywną metodę rozwiązywania (patrz [112], [43] i [73] lub uprościć algorytm ogólny [22]).

3.2.1. Wyznaczanie oszacowań i rozwiązań początkowych. Dla ustalonej macierzy C oznaczmy przez t_l i t_u liczby spełniające nierówności $t_l \leq t_{\text{opt}} \leq t_u$, gdzie t_{opt} jest długością najkrótszego konturu Hamiltona w sieci D_c . Jedno z określeń wartości t_l podaliśmy już w twierdzeniu 3.3. Polepszenie tego oszacowania przedstawione zostało w pracy [23]. Przedstawiona tam metoda składa się z (a) *algorytmu Warshalla* (patrz [115]) dla sprowadzania macierzy do postaci spełniającej warunek trójkąta, (b) algorytmu rozwiązywania zagadnienia przydziału, (c) konstrukcji nowej macierzy dla (a) i (b) o wymiarach będących liczbą konturów w rozwiązaniu AP otrzymanym w (b). Obliczenia wykazały, że t_l otrzymane tą metodą różni się od t_{opt} przeciętnie o 5%.

Dla zagadnienia komiwojażera z symetryczną macierzą C za t_l można przyjąć:

(i) długość najkrótszego drzewa częściowego w sieci $\bar{D}_c$ opartej na wierzchołkach $\{2, \dots, n\}$ plus długość dwóch najkrótszych krawędzi wychodzących z wierzchołka 1.

W szczególnym przypadku najkrótsze drzewo częściowe w $\bar{D}_c$ plus te dwie krawędzie mogą tworzyć cykl Hamiltona (szczegóły podane są w [54]);

(ii) długość najkrótszego drzewa częściowego w sieci D_c plus $\max_j c_{js}$, gdzie s jest drugim najbliższym wierzchołkiem j (patrz [23]).

Oczywistą wadą oszacowań z dołu dla t_{opt} jest fakt, że nie odpowiada im na ogół żadne rozwiązanie dopuszczalne dla TSP. Inaczej jest dla t_u , gdyż zwykle każdemu oszacowaniu z góry odpowiada cykl Hamiltona o tej długości, ale niestety nie można

wskazać szybkiej metody dla otrzymania t_u bardzo bliskiego t_{opt} . Oczywiście każdy przybliżony i dokładny algorytm rozwiązania TSP daje oszacowanie t_u , nas jednak interesują w tym miejscu tylko te *uproszczone metody*, które niewielkim nakładem pracy pozwalają otrzymywać kontur Hamiltona o możliwie małej długości; każde inne postępowanie nazywać będziemy algorytmem przybliżonym lub dokładnym.

Przykładem takiej metody uproszczonej jest *metoda najbliższego sąsiada*: startujemy w dowolnym wierzchołku i_1 i jeśli utworzona została już droga $[i_1, i_2, \dots, i_k]$, to dla $k < n$ drogę tę przedłużamy do wierzchołka i_{k+1} różnego od $i_1, i_2, \dots, i_k$ oraz najbliższego i_k , a dla $k = n$ do drogi dołączamy i_1 i kończymy postępowanie. Jak widać, mamy w tej metodzie pewną swobodę w wyborze i_1 . Często za i_1 przyjmuje się numer wierzchołka, dla którego różnica między dwiema najmniejszymi długościami łuków wychodzących jest maksymalna.

3.2.2. Przybliżona metoda rozwiązywania TSP. Najbardziej znaną i efektywną, przybliżoną metodą rozwiązywania zagadnienia TSP z symetryczną macierzą C jest metoda zaproponowana przez Lina w pracy [78], a następnie rozwinięta w [79]. W tym paragrafie podamy jedynie ogólny schemat tej metody. Szczegółowy algorytm, modyfikacje i wyniki obliczeń znaleźć można w pracy [79], oraz [1] i [1a], gdzie zamieszczono także realizację tego algorytmu w języku ALGOL-1204 oraz wyniki obliczeń dla zamieszczanych w literaturze przykładów o wymiarach $n \leq 50$.

Zagadnienie komiwojażera zaliczyć można do grupy problemów kombinatorycznych, które najogólniej można sformułować następująco: wyznaczyć podzbiór W zbioru U spełniający warunek H i minimalizujący funkcję celu f . W przypadku TSP zbiorem U jest zbiór łuków rozpatrywanej sieci, warunek H oznacza, że łuki z W tworzą kontur Hamiltona, a $f(W)$ jest długością konturu Hamiltona.

Metoda zaproponowana przez Lina jest realizacją następującej idei metod przybliżonych dla rozwiązywania zagadnień kombinatorycznych scharakteryzowanych wyżej:

1. Wyznaczyć losowo rozwiązanie dopuszczalne, tj. pewien podzbiór W spełniający warunek H .
2. Wyznaczyć lepsze rozwiązanie dopuszczalne W' przez przekształcenie W .
3. Jeśli znaleziono rozwiązanie W' takie, że $f(W') < f(W)$, to zastąpić W przez W' i wrócić do 2.

4. Jeśli żadna transformacja W nie prowadzi do rozwiązania lepszego, to znaczy, że wyznaczone zostało minimum lokalne. Powtórzyć całe postępowanie dla innego, początkowego rozwiązania dopuszczalnego lub zakończyć obliczenia.

Zasadniczą częścią metody jest oczywiście krok 2, czyli polepszanie aktualnego rozwiązania dopuszczalnego. W algorytmie Lina metoda polepszania aktualnego rozwiązania dopuszczalnego polega na zamianie k elementów zbioru W na k elementów zbioru $U - W$, tak aby otrzymane rozwiązanie dopuszczalne W' było lepsze od W . Transformacje te wykonywane są tak długo, jak długo można znaleźć rozwiązanie lepsze od aktualnego. Cały problem sprowadza się teraz do podania sposobu wyboru właściwych elementów dla zamiany. W metodzie Lina liczba k elemen-

tów zamienianych nie jest ustalona, a same elementy $u_1, \dots, u_k$ ze zbioru W i $v_1, \dots, v_k$ ze zbioru $U - W$ wyznaczone są sukcesywnie tak, aby po zamianie otrzymać podzbiór będący rozwiązaniem dopuszczalnym i możliwie najlepszym w porównaniu z aktualnym. Kroki metody 1–4 można teraz zapisać bardziej szczegółowo:

K r o k 1. Wygenerować dopuszczalne rozwiązanie początkowe W .

K r o k 2. (a) $i := 1$.

(b) Wybrać u_i i v_i tak, aby otrzymać jak największe polepszenie rozwiązania, gdy zastąpimy $u_1, u_2, \dots, u_i$ przez $v_1, v_2, \dots, v_i$, gdzie $u_i \in W - \{u_1, u_2, \dots, u_{i-1}\}$, a $v_i \in U - W - \{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$.

(c) Jeśli żadne polepszenie nie może być już dokonane, to przejść do kroku 3; w przeciwnym razie $i := i + 1$ i wrócić do kroku 2 (b).

K r o k 3. Jeśli największe polepszenie rozwiązania otrzymano dla $i = k$, to podstawić $W := W - \{u_1, u_2, \dots, u_k\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ i wrócić do kroku 2; jeśli natomiast nie zostało znalezione żadne polepszenie, to przejść do kroku 4.

K r o k 4. Powtórzyć postępowanie od kroku 1 lub zakończyć obliczenia.

Bardzo szczegółowy opis algorytmu realizującego tę metodę znaleźć można w pracy [1]. Realizacja tej metody w języku ALGOL-60, wyniki badań jej efektywności, a także szczegółowy opis algorytmu zamieszczone zostaną także w przygotowanym do druku drugim tomie książki [70].

3.2.3. Dokładna metoda rozwiązania TSP. Jako przykład metody dokładnej wybraliśmy tzw. *metodę bisekcji* (połowienia przedziału) dla zagadnienia komiwojażera (patrz [116]).

Niech, jak w 3.2.1, t_l i t_u oznaczają odpowiednio dolne i górne oszacowania długości najkrótszego konturu Hamiltona w sieci D_c . Będziemy zakładać, że c jest funkcją o wartościach całkowitych oraz że liczby t_l i t_u są całkowite.

Algorytm.

K r o k 1. $t \leftarrow \lfloor t_l + 0.5(t_u - t_l) \rfloor$.

K r o k 2. $t_u \leftarrow t'$, jeśli $t_{\text{opt}} \leq t$,
 $t_l \leftarrow t$ w przeciwnym razie,

gdzie $t'(t' \leq t)$ jest długością konturu Hamiltona otrzymanego w wyniku sprawdzania nierówności $t_{\text{opt}} \leq t$, jeśli nierówność ta jest spełniona.

Powtarzać kroki 1 i 2 aż do otrzymania wymaganej dokładności, tj. aż $t_u - t_l \leq \varepsilon$, gdzie ε jest ustaloną liczbą nieujemną. ■

Zauważmy, że liczba iteracji kroków 1 i 2 nie przekracza $\log_2(t_u - t_l)$, gdzie t_u i t_l są początkowymi oszacowaniami wartości t_{opt} .

Efektywność przedstawionego algorytmu zależy od (a) efektywności metod wyznaczania początkowych wartości t_u i t_l , oraz od (b) efektywności metody sprawdzania nierówności $t_{\text{opt}} \leq t$. Metodom wyznaczania t_u i t_l poświęciliśmy już 3.2.1 i przyjąć możemy, że w powyższym algorytmie zastosowano do obliczenia t_l i t_u jedną z istniejących metod efektywnych. Inaczej jest jednak w przypadku (b). Nierówność $t_{\text{opt}} \leq t$ może być sprawdzana metodą zaproponowaną w pracy [89].

Zdefiniujemy dla ustalonego t sieć $D_{c,v} = \langle X, V; c, v \rangle$, którą można otrzymać z sieci D_c przez dodatkowe określenie funkcji $v: X \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{0\}$ takiej, że $\sum_{i=1}^n v_i = -t$.

Za długość konturu $[i_1, i_2, \dots, i_k, i_1]$ w sieci $D_{c,v}$ przyjmujemy $\sum_{j=1}^k c_{ij_{j+1}} + \sum_{j=1}^k v_{ij_j}$, gdzie przyjęliśmy $i_{k+1} = i_1$. Można łatwo wykazać, że dla sieci D_c spełniona jest nierówność $t_{\text{opt}} \leq t$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w $D_{c,v}$ niedodatni kontur Hamiltona. Dla zbadania istnienia takiego konturu i ewentualnego jego wykrycia można zastosować bezpośrednią metodę wyznaczania niedodatnich konturów Hamiltona w sieci $D_{c,v}$ (patrz [89], a także § 4.3 w [115]). Metoda ta pozwala stwierdzić, czy istnieje kontur Hamiltona o długości nie większej niż t , a jeśli tak, to jednocześnie wyznaczyć go (w algorytmie oznaczyliśmy długość tego konturu przez t'). Niestety, żadna z metod wykrywania niedodatniego konturu Hamiltona nie jest efektywna w przyjętym sensie.

Algorytm bisekcji dla TSP przetestowano na maszynie cyfrowej. Okazało się, że czas obliczeń zależy w znacznej mierze od sposobu podziału $(-t)$ na niedodatnie składniki całkowite $v_1, v_2, \dots, v_n$ i tylko niewiele od wartości oszacowań początkowych t_l i t_u . Najlepszy podział $(-t)$ tworzą liczby $v_1, v_2, \dots, v_n$ takie, że v_i jest proporcjonalne do $-\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_{ij}/(n-1)$.

Okazało się także, co łatwo można było przewidzieć, że czas badania nierówności $t_{\text{opt}} \leq t$ jest odwrotnie proporcjonalny do $|t - t_{\text{opt}}|$, tzn. był tym większy, im t było bliższe t_{opt} .

Z innymi, dokładniejszymi metodami rozwiązywania TSP zapoznać się można w cytowanym już wielokrotnie przeglądzie [4]. Jedną z najczęściej wymienianych dokładnych metod rozwiązywania TSP jest metoda Little'a i współautorów. Szczegółowy jej opis znaleźć można w książce [67], a w [117] zamieszczony został tekst procedury *travsalprobl* w języku ALGOL-1204 realizujący tę metodę.

3.2.4. Efektywność algorytmów rozwiązywania TSP. W tym paragrafie zamieścimy kilka informacji o istniejących w Polsce (oczywiście, tylko o tych znanych autorom) maszynowych realizacjach algorytmów rozwiązywania TSP (w chwili ukazania się tej pracy będzie to zapewne informacja mało aktualna).

Dla m.c. Odra-1204: 1. W Instytucie Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego opracowano: (i) Algorytm metody Little'a i współautorów (znajduje się on w [117]). Ze względu na małą pamięć operacyjną maszyny można rozwiązywać zagadnienia dla $n \leq 20$. (ii) Algorytm metody przybliżonej Lina [1]. Wykonano obliczenia testujące ten algorytm dla zagadnień o wymiarach $n \leq 50$. W większości przypadków (np. dla wszystkich zagadnień o $n \leq 20$) otrzymano rozwiązanie optymalne. (iii) Algorytmy metody bisekcji i metody Nettera (patrz 3.2.3 i [89]). 2. W Instytucie Automatyki PAN w Warszawie opracowano algorytm metody zapropono-

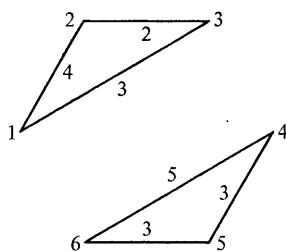
wanej przez Walukiewicza. 3. W Centrum Obliczeniowym PAN opracowano powtórnie metodę Little'a i współautorów.

Dla m.c. Odra serii 1300 istnieje program biblioteczny realizujący metodę Lina, jednak w materiałach dostarczonych przez firmę brak wyników testowania.

3.2.5. Przykład. W tym paragrafie przedstawimy wyniki obliczeń wykonanych metodami omawianymi w poprzednich paragrafach. Niech macierz C będzie postaci

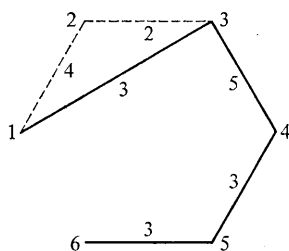
$$C = \begin{bmatrix} \infty & 4 & 3 & 7 & 7 & 6 \\ 4 & \infty & 2 & 5 & 7 & 7 \\ 3 & 2 & \infty & 5 & 6 & 6 \\ 7 & 5 & 5 & \infty & 3 & 5 \\ 7 & 7 & 6 & 3 & \infty & 3 \\ 6 & 7 & 6 & 5 & 3 & \infty \end{bmatrix}$$

Łatwo sprawdzić, że macierz ta spełnia warunek trójkąta, jeśli symbole ∞ zastąpimy przez 0.



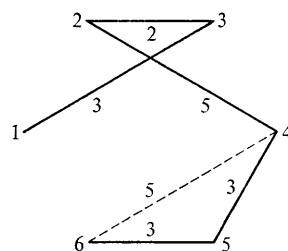
$t_l = 20$

Rys. 3.1



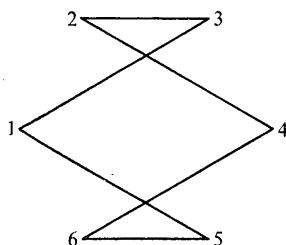
$t_l = 20$

Rys. 3.2



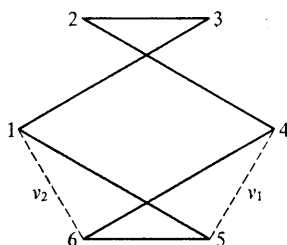
$t_l = 21$

Rys. 3.3

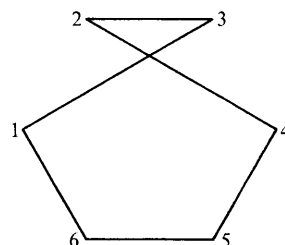


$t_u = 25$

Rys. 3.4



Rys. 3.5



$t_{opt} = 22$

Rys. 3.6

Na rysunku 3.1 przedstawione jest rozwiązanie zagadnienia przydziału, wartość jego jest 20. Stosując metodę z pracy [23] możemy otrzymać $t_l = 22$. Na rysunkach 3.2. i 3.3 przedstawiono oszacowanie z dołu otrzymane odpowiednio metodami (i) i (ii) z 3.2.1. Na rysunku 3.4 przedstawiono oszacowanie z góry otrzymane metodą najbliższego sąsiada z punktem startowym $i_1 = 5$ ($i_2 = 6$). Na rysunku 3.5 pokazano krok przybliżonej metody Lina, po wykonaniu którego otrzymujemy rozwiąza-

nie optymalne przedstawione na rys. 3.6. Natomiast metodą bisekcji otrzymujemy rozwiązanie optymalne po dwóch badaniach nierówności $t_{\text{opt}} \leq t$.

3.3. Zagadnienie m komiwojażerów. W tym rozdziale zaansujemy jedynie, że zagadnienie komiwojażera doczekało się już wielu uogólnień, nazywanych wspólnie *zagadnieniami m komiwojażerów* (m -TSP).

Na przykład: Dla sieci D_c rzędu n i ustalonej liczby $m < n$ wyznaczyć kontury zawierające każdy wierzchołek z wyjątkiem pierwszego dokładnie jeden raz i przechodzące przez wierzchołek 1 oraz minimalizujące sumaryczną długość łuków tworzących te kontury. W pracy [111] podano sformułowanie tego zagadnienia w języku programowania całkowitoliczbowego oraz algorytm rozwiązania typu podziału i ograniczeń. Natomiast w pracy [130] uogólniono TSP jeszcze bardziej.

Niech danych będzie n miast i m komiwojażerów. Oznaczmy przez $C^s = (c_{ij}^s)$ macierz kosztów (lub czasów) przejazdów s -tego komiwojażera ($s = 1, 2, \dots, m$). Należy wyznaczyć rozbiecie zbioru miejscowości N na podzbiory $N_1, N_2, \dots, N_m$

takie, że $N_i \subseteq N$ i $\bigcup_{i=1}^m N_i = N$ oraz w każdym podzbiorze określić kontur Hamiltona tak, aby zminimalizować sumę

$$(3.7) \quad \sum_{s=1}^m \sum_{(i,j) \in N_s} c_{ij}^s \rightarrow \min$$

lub wyrażenie

$$(3.8) \quad \max_{1 \leq s \leq m} \sum_{(i,j) \in N_s} c_{ij}^s \rightarrow \min.$$

Ograniczenia na podzbiory $N_1, N_2, \dots, N_m$ mogą mieć postać

$$(3.9) \quad |N_i| > 1,$$

$$(3.10) \quad N_i \cap N_{i_2} = \emptyset, \quad i_1, i_2 = 1, 2, \dots, m; \quad i_1 \neq i_2,$$

$$(3.11) \quad N_{i_1} \cap N_{i_2} = \{i^*\}, \quad |N_{i_1} \cap N_{i_2}| = 1, \quad i_1, i_2 = 1, 2, \dots, m; \quad i_1 \neq i_2.$$

Różne kombinacje funkcji celu (3.7)–(3.8) i ograniczeń (3.9)–(3.11) doprowadzają nas do następujących problemów:

PROBLEMY 3.1 i 3.2. Dla liczby komiwojażerów nie większej niż m określić rozbiecie dopuszczalne $N_1, N_2, \dots, N_m$ i kontury Hamiltona w podzbiorach N_i ($i = 1, 2, \dots, m$) spełniające (3.7), (3.9), (3.10) lub odpowiednio (3.8)–(3.10).

PROBLEMY 3.3 i 3.4. Dla ustalonej liczby komiwojażerów m określić wierzchołek $i^* \in N$, dopuszczalne rozbiecie $N_1, N_2, \dots, N_m$ i kontury Hamiltona w N_i ($i = 1, 2, \dots, m$) spełniające (3.7), (3.9) i (3.11) lub odpowiednio (3.8), (3.9) i (3.11).

PROBLEMY 3.5 i 3.6. Szczególny przypadek problemów 3.3 i 3.4. Zakładamy, że i^* jest ustalonym wierzchołkiem z N .

W pracy [130] dla problemów 3.1–3.6 wykazano najpierw pewne własności rozwiązań dopuszczalnych, a następnie przedstawiono algorytm rozwiązywania,

będący realizacją metody typu podziału i ograniczeń, podobnej do metody Little'a i współautorów dla 1-TSP.

Problemy 3.1–3.6 można uzupełnić następującymi problemami.

PROBLEMY 3.7 i 3.8. Wyznaczyć liczbę komiwojażerów m , rozbić $N_1, N_2, \dots, N_m$ zbioru N i punkt startowy i^* spełniające (3.7), (3.9) i (3.11) lub odpowiednio (3.8), (3.9) i (3.11).

PROBLEMY 3.9. Jakie są zależności między wartościami rozwiązań optymalnych dla problemów 3.1–3.8?

Znane uogólnienia TSP zostały zebrane w pracy przeglądowej [116 a].

Literatura -

- [1] A. Adra biński, *Heurystyczny algorytm rozwiązywania zagadnienia komiwojażera*, Praca magisterska, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław 1974.
- [1a] —, *Algorithm 45. A heuristic algorithm for the travelling salesman problem*, Zastosow. Matem. 15 (1976), str. 223–244.
- [1b] K. Appel i W. Haken, *A proof of the Four Color Problem*, Discrete Math. 16(1976), str. 179–180.
- [2] D. Barnette i E. Jucovič, *Hamiltonian circuits on 3-polytopes*, J. Comb. Theory 9 (1970), str. 54–59.
- [3] M. Behzad i G. Chartrand, *Total graphs and traversability*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 15 (1966), str. 117–120.
- [4] M. Bellmore i G. L. Nemhauser, *The travelling salesman problem: a survey*, Operations Res. 16 (1968), str. 538–558.
- [5] C. Berge, *Graphs and Hypergraphs*, North-Holland/Amer. Elsevier, 1973.
- [6] J. C. Bermond, *Graphes orientés fortement k-connexes et graphes k-arc-hamiltoniens*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, 271 (1970), str. 141–144.
- [7] —, *Arbres maximaux ayant au plus h sommets pendants*, ibid. 274 (1972), str. 1878–1881.
- [8] J. A. Bondy, *Pancyclic graphs I*, J. Comb. Theory B11 (1971), str. 80–84.
- [9] —, *Variations on the Hamiltonian theme*, Canad. Math. Bull. 15 (1972), str. 57–62.
- [10] —, V. Chvátal, *A method in graph theory*, Discrete Math. 15 (1976), str. 111–135.
- [10a] M. Borowiecki, Z. Skupień i L. Szamkołowicz (red.), *Graphs, hypergraphs and block systems*, Proc. Symp. held in Zielona Góra, September 1976.
- [11] J. Bosák, *Hamiltonian lines in cubic graphs*, w: *Théorie des graphes* (red. P. Rosenstiehl; Journées Internat. d'Étude in Rome 1966), Dunod, Paris 1967; str. 35–46.
- [12] J. W. Butler, *Hamiltonian circuits on simple 3-polytopes*, J. Comb. Theory B15 (1973), str. 69–73.
- [13] P. Camion, *Chemins et circuits hamiltoniens des graphes complets*, C. R. Acad. Sci. Paris 249 (1959), str. 2151–2152.
- [14] G. Chartrand, A. M. Hobbs, H. A. Jung, S. F. Kapoor i C. St. J. A. Nash-Williams, *The square of a block is Hamiltonian connected*, J. Comb. Theory B16 (1974), str. 290–292.
- [15] —, S. F. Kapoor, *On hamiltonian properties of powers of special hamiltonian graphs*, Colloq. Math. 29 (1974), str. 113–117.
- [16] —, —, H. V. Kronk, *A generalization of hamiltonian-connected graphs*, J. Math. Pures Appl. 48 (1969), str. 109–116.
- [17] —, —, D. R. Lick, *n-Hamiltonian graphs*, J. Comb. Theory 9 (1970), str. 308–312.
- [18] —, H. V. Kronk, *Randomly traceable graphs*, SIAM J. Appl. Math 16 (1968), str. 696–700.

- [19] —, —, *On a special class of Hamiltonian graphs*, Comm. Math. Helvetici 44 (1969), str. 84–88.
- [20] —, —, D. R. Lick, *Randomly hamiltonian digraphs*, Fund. Math. 65 (1969), str. 223–226.
- [21] —, C. E. Wall, *On the hamiltonian index of a graph*, Studia Sci. Math. Hungar. 8 (1973), str. 43–48.
- [22] N. Christofides, *Large scheduling problems with bivalent costs*, Computer J. 16 (1973), str. 262–264.
- [23] —, *Bounds for the travelling-salesman problem*, Operations Res. 20 (1972), str. 1044–1056, Errata, ibid. 22 (1974), 1121.
- [24] V. Chvátal, *On Hamilton's ideals*, J. Comb. Theory B12 (1972), str. 163–168.
- [25] —, *Tough graphs and Hamiltonian¹ circuits*, Discrete Math. 5 (1973), str. 215–228.
- [26] —, *New directions in Hamiltonian graph theory*, w *New Directions in the Theory of Graphs* (red. F. Harary), Acad. Press, New York and London 1973. str. 65–95.
- [27] —, *Flip-flops in hypohamiltonian graphs*, Canad. Math. Bull. 16 (1973), str. 33–41.
- [28] —, P. Erdős, *A note on Hamiltonian circuits*, Discrete Math. 2 (1972), str. 111–113.
- [28a] J. B. Collier i E. F. Schmeichel, *New flip-flop constructions for hypohamiltonian graphs*, Discrete Math.
- [28b] —, —, *Systematic searches for hypohamiltonian graphs*, maszynopis.
- [29] G. B. Dantzig, *On a linear programming, combinatorial approach to the travelling-salesman problem*, Operations Res. 7 (1959), str. 58–66.
- [30] —, D. R. Fulkerson i S. M. Johnson, *Solution of a large scale travelling-salesman problem*, ibid. 2 (1954), str. 393–410.
- [31] G. A. Dirac, *In abstrakten Graphen vorhandene vollständige 4-Graphen und ihre Unterteilungen*, Math. Nachr. 22 (1960), str. 61–85.
- [32] —, C. Thomassen, *Graphs in which every finite path is contained in a circuit*, Math. Ann. 203 (1973), str. 65–75.
- [33] R. A. Duke, *On the genus and connectivity of Hamiltonian graphs*, Discrete Math. 2 (1972), str. 199–206.
- [34] J. Edmonds i E. J. Johnson, *Matchings, Euler tours and the Chinese postman*, Math. Programming 5 (1973), str. 88–124.
- [35] G. B. Faulkner i D. H. Younger, *Non-Hamiltonian cubic planar maps*, Discrete Math. 7 (1974), str. 67–74.
- [36] H. Fleischner, *Die Bestimmung der kubischen Graphen mit Hamiltonischem Quadrat*, Math. Nachr. 55 (1973), str. 213–221.
- [37] —, *The square of every two-connected graph is Hamiltonian*, J. Comb. Theory B16 (1974), str. 29–34.
- [38] —, A. M. Hobbs, *Hamiltonian total graphs*, preprint.
- [39] M. M. Flood, *The travelling-salesman problem*, Operations Res. 4 (1956), str. 61–75.
- [40] L. R. Ford i D. R. Fulkerson, *Przepływy w sieciach*, PWN, Warszawa 1969, str. 83–86.
- [41] T. Gallai i A. N. Milgram, *Verallgemeinerung eines graphentheoretischen Satzes von Rédei*, Acta Sci. Math. (Szeged) 21 (1960), str. 181–186.
- [42] A. Ghouila-Houri, *Une condition suffisante d'existence d'un circuit hamiltonien*, C. R. Acad. Sci. Paris 251 (1960), str. 495–497.
- [43] P. C. Gilmore i R. E. Gomory, *Sequencing a one state-variable machine: a solvable case of the travelling salesman problem*, Operations Res. 12 (1964), str. 655–679.
- [44] М. К. Гольдберг, Л. Л. Левицкая i Л. М. Сатановский (M. K. Goldberg, L. L. Lewickaja i L. M. Satanowski) *Об одном усилении теоремы Гуйа-Ури*, сб. Вычисл. мат. и вычисл. тех., вып. 2, Харьков 1971, str. 56–61.
- [45] P. R. Goodey, *Hamiltonian paths on 3-polytopes*, J. Comb. Theory B12 (1972), str. 143–152.

- [46] S. Goodman i S. Hedetniemi, *Eulerian walks in graphs*, SIAM J. Comput. 2 (1973), str. 16–27.
- [46a] —, —, *On Hamiltonian walks in graphs*, *ibid.* 3 (1974), str. 214–221.
- [47] —, —, *Sufficient conditions for a graph to be Hamiltonian*, J. Comb. Theory B16 (1974), str. 175–180.
- [47a] —, —, *On the Hamiltonian completion problem*, w: *Graphs and combinatorics* (red. R. A. Bari i F. Harary), Springer, Berlin 1974, str. 262–272.
- [48] J. Grabowski i M. M. Sysło, *On a machine sequencing problem (I)*, Zastosow. Matem. 13 (1973), str. 339–345.
- [49] Э. Я. Гринберг (E. Ja. Grinberg), *О плоских однородных графах степени три без гамильтоновых циклов*, Латв. Мат. Ежегодн. 4, Рига 1968, str. 51–58.
- [50] B. Grünbaum, *Polytopes, graphs, and complexes*, Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), str. 1131–1201.
- [51] F. Harary, *Graphs and matrices*, SIAM Review 9 (1967), str. 83–90.
- [52] —, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.
- [53] —, L. Moser, *The theory of round robin tournaments*, Amer. Math. Monthly 73 (1966), str. 231–246.
- [53a] P. Heinrich, *Zur Struktur von Potenzen zusammenhängender Graphen*, praca doktorska, Bergakademie Freiberg 1972.
- [54] M. Held i R. M. Karp, *The travelling-salesman problem and minimum spanning trees*, Operations Res. 18 (1970), str. 1138–1162.
- [55] J. C. Herz, J. J. Duby i F. Vigué, *Recherche systématique des graphes hypo-hamiltoniens*, w: *Théorie des graphes* (red. P. Rosenstiehl; Journées Internat. d'Étude in Rome 1966), Dunod, Paris 1967; str. 153–159.
- [56] A. M. Hobbs, *Some Hamiltonian results in powers of graphs*, J. Res. Nat. Bur. Standards 77B (1973), str. 1–10.
- [57] S. Jeleński, *Lilavati*, PZWS, Warszawa 1964; str. 283.
- [58] J. L. Jolivet, *Joint d'une famille de graphes simples*, Cahiers Centre Étud. Recherche Opér. (Bruxelles) 15 (1973), str. 319–325.
- [59] —, *Sur le joint d'une famille de graphes*, Discrete Math. 5 (1973), str. 145–158.
- [60] —, *Hamiltonian pseudocycles in graphs*, Proc. Fifth Southeast. Conf. (Boca Raton, Florida, 1974).
- [61] —, *Indice de partition en chaînes d'un graphe simple et pseudo-cycles hamiltoniens*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, 279 (1974), str. 479–481.
- [62] —, H. Raynaud, *Sur quelques problèmes de parcours hamiltoniens arbitraires dans les graphes finis*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, 270 (1970), str. 1670–1672.
- [63] S. F. Kapoor, H. V. Kronk i D. R. Lick, *On detours in graphs*, Canad. Math. Bull. 11 (1968), str. 195–201.
- [64] R. M. Karp, *Reducibility among combinatorial problems*, w: *Proceedings of the Symposium on the Complexity of Computer Computations* (red. R. E. Miller i J. W. Thatcher), Plenum Press, New York 1972; str. 85–103.
- [65] P. W. Kasteleyn, *Graph theory and crystal physics*, w: *Graph Theory and Theoretical Physics* (red. F. Harary), Academic Press, London, 1967; str. 44–110.
- [66] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming; v. 1, Fundamental Algorithms*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968; str. 37.
- [67] A. A. Korbut i J. J. Finkelsztein, *Programowanie dyskretne*, PWE, Warszawa 1974, str. 27–28, 172–176, 197–202, 228–230.
- [68] В. П. Козырев (W. P. Kozuriew), *Нахождение всех гамильтоновых цепей графа и изучение гамильтоново связанных графов*, Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 16 (1976), str. 767–775.
- [69] H. V. Kronk, *Variations on a theorem of Pósa*, w: *The Many Facets of Graph Theory* (red. G. Chartrand i S. F. Kapoor); Lect. Notes Math. 110, Springer Verlag, 1969; str. 193–197.

- [70] J. Kucharczyk i M. M. Sysło, *Algorytmy optymalizacji w języku ALGOL-60*, PWN, Warszawa 1975.
- [71] M. Las Vergnas, *Sur l'existence des cycles hamiltoniens dans un graphe*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, 270 (1970) str. 1361–1364.
- [72] —, *Sur une propriété des arbres maximaux dans un graphe*, ibid. 272 (1971), str. 1297–1300.
- [73] E. L. Lawler, *A solvable case of the travelling salesman problem*, Math. Programming 1 (1971), str. 267–269.
- [74] J. Lederberg, *Hamilton circuits of convex trivalent polyhedra (up to 18 vertices)*, Amer. Math. Monthly 74 (1967), str. 522–527.
- [75] L. Lesniak, *Graphs with 1-Hamiltonian-connected cubes*, J. Comb. Theory B14 (1973), str. 148–152.
- [76] Л. М. Лихтенбаум (L. M. Lichtenbaum), *О гамильтоновых циклах связного графа*, Кибернетика, No. 4, 1968, str. 72–75.
- [77] D. R. Lick, *n-hamiltonian connected graphs*, Duke Math. J. 37 (1970), str. 387–392.
- [78] S. Lin, *Computer solutions of the travelling salesman problem*, Bell System Tech. J. 44 (1965), str. 2245–2269.
- [79] —, B. W. Kernighan, *An effective heuristic algorithm for the traveling-salesman problem*, Operations Res. 21 (1973) str. 498–516.
- [80] W. F. Lindgren, *An infinite class of hypohamiltonian graphs*, Amer. Math. Monthly 74 (1967), str. 1087–1089.
- [81] J. D. C. Little, K. G. Murty, D. W. Sweeney i C. Karel, *An algorithm for the travelling salesman problem*, Operations Res. 11 (1963), str. 972–989.
- [82] A. Marczyk i Z. Skupień, *Characterizing line graphs of general graphs*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 22 (1974), str. 235–241.
- [83] C. W. Marshall, *Applied Graph Theory*, Wiley-Interscience, New York 1971.
- [84] M. Meyniel, *Une condition suffisante d'existence d'un circuit hamiltonien dans un graphe orienté*, J. Comb. Theory B14 (1973), str. 137–147.
- [85] C. St. J. A. Nash-Williams, *Problem 48*, w: *Theory of Graphs* (red. P. Erdős i G. Katona), Akadémiai Kiadó, Budapest 1968, str. 367.
- [86] —, *Hamilton circuits in graphs and digraphs*, w: *The Many Facets of Graph Theory* (red. G. Chartrand i S. F. Kapoor), Lect. Notes. Math. 110, Springer Verlag, 1969; str. 237–243.
- [87] —, *Edge-disjoint Hamiltonian circuits in graphs with vertices of large valency*, w: *Studies in Pure Math.* (red. L. Mirsky), Academic Press, London and New York 1971, str. 157–183.
- [88] —, *Hamiltonian lines in infinite graphs with few vertices of small valency*, Aequat. Math. 7 (1972), str. 59–81.
- [89] J. P. Netter, *An algorithm to find elementary negative-cost circuits with a given number of arcs — the travelling-salesman problem*, Operations Res. 19 (1971), str. 234–237.
- [90] F. Neuman, *On a certain ordering of the vertices of a tree*, Časopis Pěst. Mat. 89 (1964), str. 323–339.
- [91] O. Ore, *Arc coverings of graphs*, Ann. Mat. Pura Appl. 55 (1961), str. 315–321.
- [92] —, *Hamilton-connected graphs*, J. Math. Pures Appl. 42 (1963), str. 21–27.
- [93] —, J. Stemple, *Numerical calculation of the four-color problem*, J. Comb. Theory 8 (1970), str. 65–78.
- [94] J. Petersen, *Die Theorie der regulären Graphen*, Acta. Math. 15 (1891), str. 193–220.
- [95] L. Rédei, *Ein kombinatorischer Satz*, Acta Sci. Math. (Szeged) 7 (1934), str. 39–43.
- [96] H. Sachs, *Ein von Kozyrev und Grinberg angegebener nicht-hamiltonscher kubischer planarer Graph*, w: *Beiträge zur Graphentheorie* (red. H. Sachs, H. J. Voss i H. Walther; Internat. Kolloq. in Manebach) Leipzig 1968, str. 127–130.
- [97] G. Schaar, *Eine Eigenschaft der dritten Potenz brückenloser Graphen*, Math. Nachr. 51 (1971), str. 189–196.

- [97a] —, *Zur Charakterisierung der Graphen, deren p -te Potenz $(p-1)$ -hamiltonisch ist $(p \geq 3)$* , XVIII Intern. Wiss. Koll. TH Ilmenau 1973, str. 23–25.
- [97b] —, *Eine Charakterisierung der Graphen, deren dritte Potenz 2-hamiltonisch ist*, Math. Nachr. 66 (1975), str. 145–154.
- [97c] —, *On 3-Hamiltonian cubes of connected graphs*, V. Hung. Combinat. Colloq. in Keszthely 1976 (to appear).
- [98] E. F. Schmeichel i S. L. Hakimi, *Pancyclic graphs and a conjecture of Bondy and Chvátal*, J. Comb. Theory B17 (1974), str. 22–34.
- [99] M. Sekanina, *On an ordering of the set of vertices of a connected graph*, Spisy Přírod. Fak. Univ. Brno 412 (1960), str. 137–142.
- [100] Z. Skupień, *Locally Hamiltonian graphs and Kuratowski theorem*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 13 (1965), str. 615–619.
- [101] —, *Locally Hamiltonian and planar graphs*, Fund. Math. 58 (1966), str. 193–200.
- [102] —, *Problemy i twierdzenia dotyczące grafów hamiltonowskich*, Zeszyty Nauk. AGH 208, Mat.-Fiz.-Chem. z. 2 (1969), str. 23–30.
- [103] —, *Sufficient conditions for Hamiltonian graphs*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 19 (1971), str. 901–905.
- [104] —, *Hamiltonian circuits and path covering of vertices in graphs*, Colloq. Math. 30 (1974), str. 295–316.
- [105] —, *Path partitions of vertices and hamiltonity of graphs*, w: *Recent Advances in Graph Theory* (red. M. Fiedler, Proc. Symp. Prague, June 1974), Academia, Praha 1975, str. 481–491.
- [106] —, *Hamiltonian shortage, path partitions of vertices and matching in a graph*, Math. Colloq. 36(1976), str. 305–318.
- [106a] —, *Homogeneously traceable and Hamiltonian connected graphs*, maszynopis.
- [106b] —, *On generalizations of locally Hamiltonian graphs*, w [10a], str. 263–271.
- [107] —, A. P. Wojda, *Sufficient conditions for λ -edge Hamiltonian graphs*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 19(1971), str. 391–396.
- [108] —, —, *On highly Hamiltonian graphs*, ibid. 22 (1974), str. 463–471.
- [109] —, —, *Extremal non- (p, q) -Hamiltonian graphs*, maszynopis.
- [110] C. A. B. Smith i W. T. Tutte, *On unicursal paths in a network of degree 4*, Amer. Math. Monthly 48 (1941), str. 233–237.
- [111] J. A. Svestka i V. E. Huckfeldt, *Computational experience with an m -salesman travelling salesman algorithm*, Management Sci. 19(1973), str. 790–799.
- [112] M. M. Sysło, *A new solvable case of the travelling salesman problem*, Math. Programming 4 (1973), str. 347–348.
- [113] —, *On some machine sequencing problems (II)*, Zastosow. Matem. 14 (1974), str. 93–97.
- [114] —, *Stosowana teoria grafów I. Zastosowanie teorii grafów w metodach numerycznych*, Matematyka Stosowana 5 (1975), str. 69–87.
- [115] —, *Stosowana teoria grafów II. Problemy ekstremalnych dróg w grafach i sieciach*, Archiwum Automatyki i Telemechaniki 20 (1975), str. 287–300.
- [116] —, *A bisection method for the travelling salesman problem*, Zastosow. Matem. 16 (1977), str. 59–62.
- [116a] —, *Generalizations of the standard travelling salesman problem*, Zastosow. Matem. (w druku).
- [117] *Systemy programowania m.c. ODRA 1204, część 1204–VIII–13*, Elwro, Wrocław 1971.
- [118] В. С. Шишов i Хо Ба Тхуан (W. S. Syszow i Ho Ba Thuan), *Замечания о методе Тарри подсчета эйлеровых циклов*, Кибернетика, №. 4, 1968, str. 76–80.
- [119] C. Thomassen, *On randomly Hamiltonian graphs*, Math. Ann. 200(1973), str. 195–208.
- [120] —, *Hypohamiltonian and hypotraceable graphs*, Discrete Math. 9 (1974), str. 91–96.
- [121] —, *Graphs in which every path is contained in a Hamiltonian path*, Preprint Ser. Mat. Inst. Aarhus Univ. 1972/73, No. 20.
- [122] —, *On hypohamiltonian graphs*, Discrete Math. 10 (1974), str. 383–390.

- [123] W. T. Tutte, *On Hamiltonian circuits*, J. London Math. Soc. 21 (1946), str. 98–101.
- [124] —, *A short proof of the factor theorem for finite graphs*, Canad. J. Math. 5 (1954), str. 347–352.
- [125] —, *A theorem on planar graphs*, Trans. Amer. Math. Soc. 82 (1956), str. 99–116.
- [125a] A. Vrba, *Counting hamiltonian circuits*, w [10a], str. 319–323.
- [126] K. Wagner, *Zum Basisproblem für Graphen, insbesondere für die nicht in die projektive Ebene einbettbaren Graphen*, J. Comb. Theory 2 (1967), str. 168–185.
- [127] M. E. Watkins i D. M. Mesner, *Cycles and connectivity in graphs*, Canad. J. Math. 19 (1967), str. 1319–1328.
- [128] M. Wodecki, *Wyznaczanie drogi Eulera w grafie*, Praca magisterska, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław 1974.
- [129] A. P. Wojda, *Sufficient conditions for a graph to be q -connected and q -edge Hamiltonian*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 22 (1974), str. 229–234.
- [129a] —, *On strongly (p, q) -Hamiltonian graphs*, Graph Theory Newsletter 5, No. 5 (1976), str. 1–3.
- [129b] —, *Hamiltonity of powers of Hamiltonian graphs*, w [10a], str. 325–332.
- [130] Ю. А. Зак (Ju. A. Zak), *Алгоритмы решения задач „ n -комивояжеров”*, Кибернетика, No. I, 1972, str. 99–106.
- [131] J. Zaks, *Non-Hamiltonian square-minus-two*, El. Math. 29 (1974), str. 33–35.
- [132] А. А. Зыков (A. A. Zykov), *О некоторых свойствах линейных комплексов*, Мат. Сб. 24 (1949), str. 163–188.
- [133] —, *Теория конечных графов*, Наука, Новосибирск 1969, str. 134–144.