

ADAM CZORNIK

Gliwice

## Adaptacyjne sterowanie w stochastycznym układzie liniowym z kwadratowym funkcjonałem kosztów

(Praca wpłynęła do Redakcji 6.03.1996)

**Streszczenie.** Praca składa się z czterech części. W części pierwszej sformulowano i podano rozwiązanie zagadnienia sterowania optymalnego w liniowym układzie stochastycznym z kwadratowym funkcjonałem kosztów na skończonym i nieskończonym przedziale czasowym. Twierdzenie 1, podające postać sterowania optymalnego na skończonym przedziale czasowym, jest dobrze znane ([1], [5]), natomiast twierdzenie 2 jest uogólnieniem znanych rezultatów. Zwykle formuluje się je przy założeniach gwarantujących istnienie i jedność rozwiązania algebraicznego równania Riccatiego ([5], [4]). W tym sformułowaniu w jakim znajduje się w pracy można je znaleźć w [16] ale dla układu deterministycznego.

W części drugiej zbadano własności algebraicznego równania Riccatiego. Algebraiczne równanie Riccatiego odgrywa pierwszoplanową rolę w konstrukcji sterowania optymalnego i poświęcono mu wiele uwagi w pracach [2], [4], [13], [15]. Twierdzenie 5 pokazuje na jakie trudności możemy natrafić w procedurze adaptacyjnego sterowania, gdy nieznanne współczynniki równania Riccatiego będziemy zastępować ich ocenami. Problem ten obszerniej omówiono w [4] i [8]. Głównym wynikiem tej części pracy jest twierdzenie 6, które odgrywa zasadniczą rolę w konstrukcji i dowodzie optymalności sterowania adaptacyjnego.

W części trzeciej skonstruowano ocenę największego prawdopodobieństwa dla macierzy liniowej transformacji stanu. Estymator ten pojawił się po raz pierwszy w zagadnieniu sterowania optymalnego w pracy [12].

Wreszcie w czwartej, głównej części pracy podano algorytm sterowania adaptacyjnego oraz dowód jego optymalności (twierdzenie 10). Podany algorytm i dowód jego optymalności są modyfikacją wyników podanych w [6] i [7]. Obejmują one ogólniejsze przypadki niż w tych pracach, gdzie zakłada się znajomość domkniętego, spójnego i ograniczonego zbioru, do którego należy oceniany parametr, niemniej uzyskane rezultaty są jeszcze dalekie od analogicznych wyników uzyskanych w pracy [3] dla czasu dyskretnego.

**1. Stochastyczny regulator liniowo kwadratowy.** Niech na przestrzeni probabilistycznej  $(\Omega, \Sigma, P)$  zadany będzie  $n$  wymiarowy proces Wie-

nera  $W_t, t \geq 0$ , Oznaczmy przez  $M(k, l)$  zbiór wszystkich macierzy rzeczywistych wymiaru  $k$  na  $l$ . Rozważmy stochastyczne równanie różniczkowe liniowe

$$(1) \quad dx_t = (Ax_t + Bu_t)dt + CdW_t, \quad x_0 = x \in R^n,$$

gdzie  $x_t \in R^n, u_t \in R^m, A, C \in M(n, n), B \in M(m, n)$ . Funkcję  $u : [0, \infty) \rightarrow R^m$  będziemy nazywali sterowaniem. W [10], twierdzenie 4.10, udowodniono, że jeżeli

$$(2) \quad \int_0^t |u_s^{(i)}| ds < \infty$$

dla  $t > 0$ , gdzie  $u_t = (u_t^{(i)}, \dots, u_t^{(m)})$ , to równanie (1) ma dokładnie jedno rozwiązanie dane wzorem

$$(3) \quad x_t = \exp(At) \left[ x + \int_0^t \exp(-As) Bu_s ds + \int_0^t \exp(-As) C dW_s \right].$$

Każdą funkcję  $u : [0, \infty) \rightarrow R^m$  spełniającą warunek (2) będziemy nazywać sterowaniem dopuszczalnym. Wraz z równaniem (1) będziemy rozpatrywać tak zwany funkcjonal kosztów

$$(4) \quad J_T(u) = E \left[ \int_0^T (\langle Qx_s, x_s \rangle + \langle Ru_s, u_s \rangle) ds + \langle Fx_T, x_T \rangle \right],$$

gdzie  $F, Q \in M(n, n), R \in M(m, m)$ , a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  oznacza iloczyn skalarny. Ponadto  $F, Q, R$  są symetryczne,  $Q$  jest nieujemnie określona, a  $R$  i  $F$  dodatnio określone.

Problem regulatora liniowo kwadratowego na skończonym przedziale  $[0, T]$  polega na znalezieniu takiego sterowania dopuszczalnego  $u : [0, \infty) \rightarrow R^m$ , dla którego wartość funkcjonału kosztów  $J_T(u)$  jest minimalna. Sterowanie  $u$ , dla którego to minimum jest osiągane będziemy nazywać optymalnym. W [5] udowodniono następujące twierdzenie rozwiązujące problem regulatora liniowo kwadratowego na skończonym przedziale czasowym.

**TWIERDZENIE 1.** *Dla każdej macierzy symetrycznej nieujemnie określonej  $F$  istnieje rozwiązanie różniczkowego równania Riccatiego*

$$-\dot{P}(t) = Q + P(t)A + A'P(t) - P(t)BR^{-1}B'P(t)$$

*z warunkiem  $P(T) = F$ , ponadto macierz  $P(t)$  jest symetryczna i nieujemnie określona dla  $t \in [0, T]$ . Sterowanie optymalne istnieje oraz ma postać liniowego sprzężenia zwrotnego*

$$u_t = -R^{-1}B'P(t)x_t,$$

gdzie  $B'$  oznacza macierz transponowaną, a minimalna wartość funkcjonału kosztów wynosi

$$J_T(u) = \int_0^T \text{tr}(C'P(t)C)dt + \langle P(0)x_0, x_0 \rangle.$$

Zmieniając zmienną niezależną  $t$  na  $T - t$  możemy sformułować następujący wniosek:

WNIOSEK. Sterowanie optymalne ma postać

$$(5) \quad u_t = -R^{-1}B'P(T-t)x_t,$$

gdzie  $P(t)$  jest rozwiązaniem równania

$$(6) \quad \dot{P}(t) = -Q - P(t)A - A'P(t) - P(t)BR^{-1}B'P(t)$$

z warunkiem początkowym  $P(0) = F$  i minimalna wartość funkcjonału kosztów wynosi

$$(7) \quad J_T(u) = \int_0^T \text{tr}(C'P(t)C)dt + \langle P(T)x_0, x_0 \rangle.$$

Problem regulatora liniowo kwadratowego na nieskończonym przedziale czasowym  $[0, \infty)$  polega na znalezieniu takiego sterowania  $u_t$ , dla którego wartość

$$(8) \quad J(u) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \int_0^T (\langle Qx_s, x_s \rangle + \langle Ru_s, u_s \rangle) ds$$

jest minimalna. Podobnie jak poprzednio, sterowanie takie nazywać będziemy optymalnym. Rozwiązanie tego problemu związane jest z tak zwanym algebraicznym równaniem Riccatiego

$$(9) \quad Q + PA + A'P - PBR^{-1}B'P = 0,$$

w którym niewiadomą jest symetryczna, nieujemnie określona macierz  $P$ . Jeżeli  $\tilde{P}$  jest rozwiązaniem równania (9) takim, że  $\tilde{P} \leq P$ , nierówność ta rozumiana jest w sensie uporządkowania macierzy symetrycznych, dla każdego rozwiązania  $P$  tego równania, to rozwiązanie  $\tilde{P}$  będziemy nazywać rozwiązaniem minimalnym.

TWIERDZENIE 2. Jeżeli istnieje rozwiązanie równania (9), to istnieje rozwiązanie minimalne  $\tilde{P}$  i sterowanie  $\tilde{u}$  dane w postaci liniowego sprzężenia zwrotnego

$$(10) \quad \tilde{u}_t = -R^{-1}B'\tilde{P}x_t$$

jest optymalne oraz minimalna wartość  $J(u)$  wynosi

$$J(\tilde{u}) = \text{tr}(C'\tilde{P}C).$$

D o w ó d. Dla dowodu istnienia rozwiązania minimalnego rozważmy równanie (1) z macierzą  $C = 0$ . Zauważmy dalej, że jeżeli  $P_1(t), P_2(t)$  są dwoma rozwiązaniami równania (6) i  $P_1(0) \leq P_2(0)$ , to dla dowolnego  $t \geq 0$  jest  $P_1(t) \leq P_2(t)$ . Jest tak dlatego, że minimalna wartość funkcjonału

$$J_t^1(x, u) = \int_0^t (\langle Qx_s, x_s \rangle + \langle Ru_s, u_s \rangle) ds + \langle P_1(0)x_t, x_t \rangle,$$

gdzie  $x$  oznacza zależność wartości funkcjonału od warunku początkowego w równaniu (1), jest nie większa od minimalnej wartości funkcjonału

$$J_t^2(x, u) = \int_0^t (\langle Qx_s, x_s \rangle + \langle Ru_s, u_s \rangle) ds + \langle P_2(0)x_t, x_t \rangle,$$

a na podstawie wniosku z twierdzenia 1 te minimalne wartości są równe odpowiednio  $\langle P_1(t)x, x \rangle$  i  $\langle P_2(t)x, x \rangle$ . Niech w szczególności  $P_1(0) = 0$  i  $P_2(0) = P$ . Wtedy  $P_2(t) \equiv P$  i dlatego  $P_1(t) \leq P$ . Z wniosku z twierdzenia 1 wynika też, że funkcja  $P_1(t)$  jest niemalejąca w sensie uporządkowania macierzy symetrycznych. Wynika stąd istnienie granicy  $\lim_{t \rightarrow \infty} P_1(t) = \tilde{P}$ . Przechodząc w równaniu (6) do granicy i uwzględniając, że  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{P}_1(t) = 0$  stwierdzamy, że  $\tilde{P}$  istotnie spełnia równanie (9) i jest to rozwiązanie minimalne. Dla dowodu drugiej części twierdzenia zauważmy, że z wniosku z twierdzenia 1 wynika równość

$$\int_0^T \text{tr}(C' \tilde{P} C) dt + \langle \tilde{P} x, x \rangle = E \left[ \int_0^T (\langle Q \tilde{x}_t, \tilde{x}_t \rangle + \langle R \tilde{u}_t, \tilde{u}_t \rangle) dt + \langle \tilde{P} \tilde{x}_T, \tilde{x}_T \rangle \right]$$

dla dowolnych  $T \geq 0, x \in R^n$ , gdzie  $\tilde{x}_t$  jest rozwiązaniem równania (1) odpowiadającym sterowaniu  $\tilde{u}_t$ , czyli

$$\int_0^T \text{tr}(C' \tilde{P} C) dt + \langle \tilde{P} x, x \rangle \geq E \int_0^T (\langle Q x_t, x_t \rangle + \langle R u_t, u_t \rangle) dt.$$

Dzieląc tą nierówność przez  $T$  i przechodząc do granicy otrzymujemy nierówność

$$J(\tilde{u}) \leq \text{tr}(C' \tilde{P} C),$$

Ponieważ jednak dla dowolnych  $T \geq 0, x \in R^n$  jest

$$\int_0^T \text{tr}(C' P_1(t) C) dt + \langle P_1(T)x, x \rangle \leq E \int_0^T (\langle Q \tilde{x}_t, \tilde{x}_t \rangle + \langle R \tilde{u}_t, \tilde{u}_t \rangle) dt,$$

czyli  $\text{tr}(C' \tilde{P} C) \leq J(\tilde{u})$  i ostatecznie  $\text{tr}(C' \tilde{P} C) = J(\tilde{u})$ . Dowód twierdzenia jest tym samym zakończony.

**2. Algebraiczne równanie Riccatiego.** Parę macierzy  $(A, B)$ ,  $A \in M(n, n)$ ,  $B \in M(m, n)$  nazywamy stabilizowalną, jeżeli istnieje taka macierz  $K \in M(m, n)$ , że  $A + BK$  jest macierzą stabilną, co znaczy, że części rzeczywiste jej wartości własnych są ujemne. Parę  $(A, B)$  będziemy nazywać obserwowalną, jeżeli istnieje taka macierz  $K \in M(n, m)$ , że  $A + KB$  jest macierzą stabilną. Wreszcie parę  $(A, B)$  będziemy nazywać sterowalną, jeżeli dla każdego  $x_0 \in R^n$  istnieje  $T \geq 0$  i funkcja  $u : [0, \infty) \rightarrow R^m$  taka, że rozwiązanie  $x(t)$  równania

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = 0,$$

spełnia warunek  $x(T) = x_0$ .

Równaniem Lapunowa nazywamy równanie

$$(11) \quad SA + A'S + Q = 0,$$

gdzie  $A, Q \in M(n, n)$ ,  $Q$  jest symetryczna i dodatnio określona, a  $S$  jest poszukiwanym rozwiązaniem. W [13] udowodniono następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 3 (Kryterium Lapunowa).** 1. *Jeżeli  $A$  jest macierzą stabilną, to rozwiązanie  $S$  równania (11) istnieje i jest macierzą symetryczną dodatnio określoną dla każdej dodatnio określonej macierzy  $Q$ .*

2. *Jeżeli istnieje dodatnio określone rozwiązanie równania (11) dla pewnej dodatnio określonej macierzy  $Q$ , to macierz  $A$  jest stabilna.*

Oznaczmy przez  $\sigma(A)$  spektrum macierzy  $A$ , oraz  $\alpha(A) = -\max\{Re(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$ . W następującym twierdzeniu  $\|A\|$  oznacza normę operatorową macierzy  $A$ .

**Twierdzenie 4.** *Jeżeli macierz  $A$  jest stabilna, macierze  $S$  i  $Q$  są symetryczne  $Q > 0$  oraz  $A, S, Q$  spełniają równanie (11), to*

$$(12) \quad \alpha(A) \geq \frac{1}{2} \|S\|^{-1} \|Q^{-1}\|^{-1}.$$

**Dowód.** Z punktu 1 twierdzenia 3 wynika, że  $S > 0$ . Równanie (11) zapiszemy w postaci

$$S(A + bI) + (A + bI)'S + Q - 2bS = 0, .$$

gdzie  $b$  jest dowolną liczbą dodatnią. Macierz  $Q - 2bS$  jest dodatnio określona, jeżeli

$$2b < \frac{\min[\sigma(Q)]}{\max[\sigma(S)]} = [\max[\sigma(Q^{-1})] \max[\sigma(S)]^{-1}]^{-1} = \|Q^{-1}\|^{-1}.$$

Z punktu 2 twierdzenia 3 wynika, że wówczas macierz  $A + bI$  jest stabilna, stąd

$$\lambda + \frac{1}{2} \|Q^{-1}\|^{-1} \|S\|^{-1} \leq 0,$$

gdzie  $\lambda \in \sigma(A)$ . Ostatnia nierówność równoważna jest jednak z nierównością (12), dowód twierdzenia jest więc zakończony.

WNIOSEK. *Niech  $(A_s)_{s \geq 0}$  będzie rodziną macierzy stabilnych taką, że  $\lim_{s \rightarrow \infty} A_s = A$  i  $A$  jest macierzą niestabilną. Wówczas rozwiązanie  $S_s$  równania*

$$S_s A_s + A_s' S_s + Q = 0,$$

gdzie  $Q > 0$ , spełnia warunek  $\lim_{s \rightarrow \infty} \|S_s\| = \infty$ .

Dowód. Wynika to natychmiast z nierówności (12) i faktu  $\lim_{s \rightarrow \infty} \alpha(A_s) = 0$ .

W [16] udowodniono, że warunkiem wystarczającym dla istnienia rozwiązania algebraicznego równania Riccatiego (9) jest stabilizowalność pary  $(A, B)$ . Nie jest to jednak warunek konieczny, a co za tym idzie warunek konieczny istnienia sterowania optymalnego w układzie (1) z funkcjonalem kosztów (2). Rzeczywiście, jeżeli para  $(A, B)$  jest stabilizowalna i  $P$  jest rozwiązaniem równania (9), to

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

jest rozwiązaniem równania

$$\hat{Q} + \hat{P} \hat{A} + \hat{A}' \hat{P} - \hat{P} \hat{B} \hat{R}^{-1} \hat{B}' \hat{P} = 0,$$

gdzie

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{R} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

i para  $(\hat{A}, \hat{B})$  nie jest stabilizowalna.

Następne dwa twierdzenia dotyczą asymptotycznego zachowania rozwiązania algebraicznego równania Riccatiego w zależności od granicznych wartości współczynników.

TWIERDZENIE 5. *Jeżeli rodzina par stabilizowalnych  $(A_s, B_s)_{s \geq 0}$  spełnia warunek  $\lim_{s \rightarrow \infty} A_s = A$  i  $\lim_{s \rightarrow \infty} B_s = B$  oraz para  $(A, B)$  nie jest stabilizowalna, to rozwiązanie  $P_s$  równania*

$$(13) \quad Q + P_s A_s + A_s' P_s - P_s B_s R^{-1} B_s' P_s = 0,$$

gdzie  $Q > 0$ , spełnia warunek  $\lim_{s \rightarrow \infty} \|P_s\| = \infty$ .

Dowód. Oznaczmy

$$F_s = -Q^{-1} B_s' P_s,$$

Równanie (13) możemy wówczas zapisać w postaci

$$P_s (A_s + B_s F_s) + (A_s + B_s F_s)' P_s + Q + F_s' R F_s = 0.$$

Na mocy punktu 2 twierdzenia 3 macierz  $A_s + B_s F_s$  jest stabilna i z twierdzenia 4 wynika, że

$$\alpha(A_s + B_s F_s) \geq \frac{1}{2} \|P_s\|^{-1} \|(Q + F'_s R F_s)^{-1}\|^{-1},$$

skąd

$$(14) \quad \alpha(A_s + B_s F_s) \geq \min[\sigma(R)] \|P_s\|^{-1}.$$

Przypuśćmy, że istnieje ciąg  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  liczb rzeczywistych dodatnich rozbieżny do nieskończoności taki, że ciąg  $P_{s_n}$  jest ograniczony. Istnieje wówczas podciąg  $(s_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  ciągu  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  taki, że ciąg  $(P_{s_{n_k}})_{k \in \mathbb{N}}$  jest zbieżny oznaczmy jego granicę przez  $\hat{P}$ . Wówczas prawa strona nierówności (14) dąży do pewnej liczby dodatniej, a lewa do zera (na mocy niestabilizowalności pary  $(A, B)$ ). Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

W dalszych rozważaniach rozpatrujemy rodziny macierzy  $(A_s, B_s)_{s \geq 0}$  takie, że granice  $\lim_{s \rightarrow \infty} A_s$   $\lim_{s \rightarrow \infty} B_s$  istnieją. Istnieją zatem takie  $s_0 > 0$  i  $M > 0$ , takie, że  $\|A_s\| < M$  i  $\|B_s\| < M$  dla  $s > s_0$ . Bez straty ogólności w dalszych rozważaniach możemy założyć, że nierówności  $\|A_s\| < M$  i  $\|B_s\| < M$  zachodzą dla wszystkich  $s > 0$ .

Następne twierdzenie pokazuje, że minimalne rozwiązanie równania (9) jest ciągłą funkcją współczynników.

**Twierdzenie 6.** *Jeżeli rodzina par  $(A_s, B_s)_{s \geq 0}$  spełnia warunek  $\lim_{s \rightarrow \infty} A_s = A$  i  $\lim_{s \rightarrow \infty} B_s = B$  i macierz  $A - BR^{-1}B'P$  jest stabilna, to istnieje  $s_0 > 0$  takie, że dla  $s \geq s_0$  równanie (13) ma rozwiązanie i  $\lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{P}_s$  i  $\tilde{P}$  są odpowiednio minimalnymi rozwiązaniami równań (13) i (9).*

Dowód tego twierdzenia poprzedzimy kilkoma lematami.

**Lemat 1.** *Jeżeli rodzina macierzy  $(A_s)_{s \geq 0}$ , spełnia warunek  $\lim_{s \rightarrow \infty} A_s = A$ , to*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} e^{A_s t} = e^{At}$$

*i zbieżność jest niemal jednostajna.*

**Dowód.** Ustalmy  $T > 0$  i niech  $t \in [0, T]$ . Z definicji funkcji eksponent mamy

$$(15) \quad \|e^{A_s t} - e^{At}\| \leq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{T^l}{l!} \|A_s^l - A^l\|.$$

Łatwo zauważyć, że

$$\|A_s^{l+1} - A^{l+1}\| = \|A_s^l A_s - A_s^l A + A_s^l A - A^l A\| \leq \|A_s\|^l \|A_s - A\| + \|A\| \|A_s^l - A^l\|$$

więc

$$(16) \quad \|A_s^{l+1} - A^{l+1}\| \leq \|A_s - A\| \left[ \sum_{i=0}^l \|A_s\|^{l-i} \|A\|^i \right] \leq \|A_s - A\| (l+1) M^l,$$

gdzie  $M = \max\{\sup_{s \geq 0} \|A_s\|, \|A\|\}$ . Z (15) i (16) otrzymujemy  $\|e^{A_s t} - e^{At}\| \leq \|A_s - A\| T e^M$ , co kończy dowód.

LEMAT 2. Jeżeli rodzina par  $(A_s, B_s)_{s \geq 0}$  spełnia warunek  $\lim_{s \rightarrow \infty} A_s = A$  i  $\lim_{s \rightarrow \infty} B_s = B$ , wówczas  $\lim_{s \rightarrow \infty} P_s(t) = P(t)$  i zbieżność jest niemal jednostajna, gdzie  $P_s(t)$  i  $P(t)$  są rozwiązaniami równań

$$(17) \quad \frac{d}{dt} P_s(t) = Q + P_s(t) A_s + A'_s P_s(t) - P_s(t) B_s R^{-1} B'_s P_s(t), \quad P_s(0) = 0$$

i (6) z warunkiem początkowym  $P(0) = 0$ , odpowiednio.

Dowód. Ustalmy  $T$  i niech  $t \in [0, T]$ . Na podstawie lematu 1 istnieje  $M_1(T) > 0$  takie, że  $\sup_{s \in [0, \infty), t \in [0, T]} \|e^{A_s t}\| \leq M_1(T)$ . Z (17) wynika, że funkcja  $P_s(t)$  spełnia zależność

$$(18) \quad P_s(t) = \int_0^t e^{A'_s(t-x)} [Q - P_s(x) B_s R^{-1} B'_s P_s(x)] e^{A_s(t-x)} dx.$$

Z (18) otrzymujemy

$$(19) \quad \|P_s(t)\| \leq \int_0^t \|e^{A'_s(t-x)}\|^2 \|Q\| dx \leq M_1^2(T) \|Q\| T.$$

Odejmując stronami (17) i (6) mamy kolejno

$$\begin{aligned} \|P_s(t) - P(t)\| &\leq \int_0^t \|A'_s P_s(x) - A' P(x)\| dx + \int_0^t \|A_s P_s(x) - A P(x)\| dx \\ &\quad + \int_0^t \|P_s(x) B_s R^{-1} B'_s P_s(x) - P(x) B R^{-1} B' P(x)\| dx \\ &= 2 \int_0^t \|A_s P_s(x) - A P(x)\| dx + \int_0^t \|P_s(x) B_s R^{-1} B'_s P_s(x) \\ &\quad - P(x) B R^{-1} B' P(x)\| dx \\ &= 2 \int_0^t \|A_s P_s(x) + A_s P(x) - A_s P(x) - A_s P(x) - A P(x)\| dx \\ &\quad + \int_0^t \|P_s(x) B_s R^{-1} B'_s P_s(x) + P(x) B_s R^{-1} P_s(x) \\ &\quad - P(x) B_s R^{-1} B'_s P_s(x) - P(x) B R^{-1} B' P(x)\| dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2\|A_s\| \int_0^t \|P_s(x) - P(x)\| dx + 2\|A_s - A\| \int_0^t \|P(x)\| dx \\
&\quad - A\| \int_0^t \|P(x)\| dx + \int_0^t \|B_s R^{-1} B'_s P_s(x)\| \|P_s(x) - P(x)\| dx \\
&\quad + \int_0^t \|P(x)\| \|B_s R^{-1} B'_s P_s(x) - B R^{-1} B' P(x)\| dx \\
&\leq 2\|A_s\| \int_0^t \|P_s(x) - P(x)\| dx + 2\|A_s - A\| \int_0^t \|P(x)\| dx \\
&\quad + \|R^{-1}\| \sup_{\substack{s \in [0, \infty) \\ y \in [0, t]}} \|P_s(y)\| \int_0^t \|P_s(x) - P(x)\| dx \\
&\quad + \sup_{\substack{s \in [0, \infty) \\ y \in [0, t]}} \|P_s(y)\| \int_0^t \|P_s(x) - P(x)\| dx \\
&\quad + \sup_{\substack{s \in [0, \infty) \\ y \in [0, t]}} \|P_s(y)\| \int_0^t \|B_s R^{-1} B'_s P_s(x) + B_s R^{-1} B'_s P(x) \\
&\quad - B_s R^{-1} B'_s P(x) - B R^{-1} B' P(x)\| dx \\
&\leq 2 \sup_{s \in [0, \infty)} \|A_s\| \int_0^t \|P_s(x) - P(x)\| dx + 2T\|A_s - A\| \sup_{\substack{s \in [0, \infty) \\ y \in [0, t]}} \|P_s(y)\| \\
&\quad + \|R^{-1}\| \sup_{s \in [0, \infty)} \|B_s\|^2 \sup_{\substack{s \in [0, \infty) \\ y \in [0, T]}} \|P_s(y)\| \int_0^t \|P_s(x) - P(x)\| dx \\
&\quad + T \left( \sup_{\substack{s \in [0, \infty) \\ y \in [0, T]}} \|P_s(y)\| \right)^2 \|B_s R^{-1} B'_s - B R^{-1} B'\|,
\end{aligned}$$

a zatem

$$(20) \quad \|P_s(t) - P(t)\| \leq f(T, s) + g(T) \int_0^t \|P_s(x) - P(x)\| dx,$$

gdzie

$$f(T, s) = 2T\|A_s - A\| \sup_{\substack{s \in [0, \infty) \\ y \in [0, T]}} \|P_s(y)\| +$$

$$\begin{aligned}
& + T \left( \sup_{\substack{s \in [0, \infty) \\ y \in [0, T]}} \|P_s(y)\| \right)^2 \|B_s R^{-1} B'_s - B R^{-1} B'\| \\
g(T) = & 2 \sup_{s \in [0, \infty)} \|A_s\| + \|R^{-1}\| \sup_{s \in [0, \infty)} \|B_s\|^2 \sup_{\substack{s \in [0, \infty) \\ y \in [0, t]}} \|P_s(y)\|.
\end{aligned}$$

Stosując lemat Gronwalla do (20) otrzymujemy  $\sup_{0 \leq t \leq T} \|P_s(t) - P(t)\| \leq f(T, s)e^{Tg(T)}$ . Ponieważ  $\lim_{s \rightarrow \infty} f(T, s) = 0$ , więc dowód lematu jest zakończony.

LEMAT 3. Niech  $P$  będzie minimalnym rozwiązaniem (9), a  $P(t)$  rozwiązaniem (6) z warunkiem początkowym  $P(0) \geq P$ . Wówczas dla każdego  $t \geq 0$ ,

$$(21) \quad \|P(t) - P\| \leq \|(P(0) - P)^{1/2}\|^2 \|e^{(A - BR^{-1}B'P)t}\|^2.$$

Dowód. Funkcja  $S(t) = P(t) - P$  spełnia równanie

$$\frac{d}{dt} S(t) = (A - BR^{-1}B'P)'S(t) + S(t)(A - BR^{-1}B'P) - S(t)BR^{-1}B'S(t).$$

Zatem

$$\begin{aligned}
S(t) = & (e^{(A - BR^{-1}B'P)t})' Y(0) (e^{(A - BR^{-1}B'P)t}) \\
& - \int_0^t (e^{(A - BR^{-1}B'P)(t-x)}) S(x) BR^{-1} B' S(x) (e^{(A - BR^{-1}B'P)(t-x)}) dx
\end{aligned}$$

więc, dla  $x \in R^n$

$$(22) \quad \langle S(t)x, x \rangle \leq \left\langle S(0)e^{(A - BR^{-1}B'P)t}x, e^{(A - BR^{-1}B'P)t}x \right\rangle.$$

Nieujemność  $S(0)$  pociąga za sobą nieujemność  $S(t)$  więc (22) implikuje (21).

LEMMA 4. Dla każdej macierzy  $A \in M(n, n)$  i dla każdego zbioru otwartego  $\sigma_0$  zawierającego  $\sigma(A)$  istnieje  $\varepsilon > 0$  takie, że jeżeli  $\|A - \tilde{A}\| < \varepsilon$  to  $\sigma(\tilde{A}) \subset \sigma_0$ .

Dowód tego twierdzenia, w ogólniejszym przypadku operatorów liniowych w przestrzeni Hilberta, znajduje się w [9].

LEMAT 5. Jeżeli rodzina par  $(A_s, B_s)_{s \geq 0}$  spełnia warunek  $\lim_{s \rightarrow \infty} A_s = A$  i  $\lim_{s \rightarrow \infty} B_s = B$ , macierz  $A - BR^{-1}B'P$  jest stabilna, gdzie  $P$  jest minimalnym rozwiązaniem (9), to istnieją liczby  $s_0 > 0$ ,  $M$  i  $\delta > 0$  takie, że dla każdego  $t \geq 0$  i  $s \geq s_0$ ,

$$(23) \quad \|e^{(A_s - B_s R^{-1} B'_s P)t}\| \leq M e^{-\delta t}.$$

Dowód. Ten lemat wynika z lematów 1 i 4 oraz z faktu, że dla dowolnej macierzy  $A$  następujące warunki są równoważne:

1. Macierz  $A$  jest stabilna
2. Dla każdego  $\lambda \in \sigma(A)$  jest  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$
3. Istnieją  $M$  i  $\delta > 0$  takie, że dla  $t \geq 0$   $\|e^{At}\| < Me^{-\delta t}$ .

Dowód twierdzenia 6. Istnieje  $s_0 > 0$  takie, że dla  $s \geq s_0$  para  $(A_s, B_s)$  jest stabilizowalna, zatem dla  $s \geq s_0$  równanie (13) ma rozwiązanie. Niech  $\tilde{P}_s$  będzie jego rozwiązaniem minimalnym. Z lematów 3 i 5 wynika istnienie liczb  $\tilde{M}$  i  $\delta > 0$  takich, że

$$\|P_s(t) - \tilde{P}_s\| \leq \tilde{M}e^{-\delta t}$$

dla  $s \geq s_0$  i  $t \geq 0$ . Ustalmy  $\varepsilon > 0$  na mocy (16) istnieje wówczas  $T(\varepsilon) > 0$  takie, że

$$\|P_s(T(\varepsilon)) - \tilde{P}_s\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{ i } \quad \|P(T(\varepsilon)) - \tilde{P}\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

dla  $s \geq s_0$ . Na mocy lematu 2  $\lim_{s \rightarrow \infty} \|P_s(T(\varepsilon)) - P(T(\varepsilon))\| = 0$ . Istnieje zatem  $s(\varepsilon, T(\varepsilon), s_0) > 0$  takie, że dla  $s > s(\varepsilon, T(\varepsilon), s_0)$

$$\|P_s(T(\varepsilon)) - P(T(\varepsilon))\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ostatecznie

$$\|\tilde{P}_s - \tilde{P}\| \leq \|\tilde{P}_s - P_s(T(\varepsilon))\| + \|P_s(T(\varepsilon)) - P(T(\varepsilon))\| + \|P(T(\varepsilon)) - \tilde{P}\| < \varepsilon,$$

co kończy dowód.

**3. Estymator największego prawdopodobieństwa.** Oznaczmy dla zadanego  $T > 0$  przez  $(C_T, B_T)$  przestrzeń funkcji ciągłych  $x : [0, \infty) \rightarrow R^n$  z  $\sigma$ -ciałem zbiorów borelowskich w topologii jednostajnej zbieżności. Niech na przestrzeni  $(\Omega, \Sigma, P)$  zadany będzie  $n$  wymiarowy proces Wienera  $W_t, t \geq 0$  i niech  $x_t, t \geq 0$  będzie rozwiązaniem stochastycznego równania różniczkowego

$$(25) \quad dx_t = \alpha_t(x)dt + dW_t, \quad x_0 = x \in R^n,$$

gdzie o procesie  $\alpha_t, t \geq 0$  zadanym na  $C_T$  zakładamy, że jest  $B_T$  mierzalny i

$$P\left(\int_0^T |\alpha_t(x)|dt < \infty\right) = 1.$$

Warunek ten gwarantuje istnienie i jednoznaczność rozwiązania równania (25). Oznaczmy dalej przez  $\mu_x$  i  $\mu_W$  miary na  $(C_T, B_T)$ , odpowiadające procesom  $x_t$  i  $W_t$ ;

$$\mu_x(B) = P\{\omega : x \in B\}, \quad \mu_W(B) = P\{\omega : W \in B\}$$

dla  $B \in B_T$ . Niech  $\mu_{t,x}, \mu_{t,W}$  będą ograniczeniami miar  $\mu_x$  i  $\mu_W$  na  $B_t = \sigma\{x : x_s, s \leq t\}$ . Przez  $\frac{d\mu_x}{d\mu_W}(t, x)$  oraz  $\frac{d\mu_W}{d\mu_x}(t, x)$  oznaczać będziemy gęstości, o ile one istnieją, miar  $\mu_{t,x}$  względem  $\mu_{t,W}$  oraz  $\mu_{t,W}$  względem  $\mu_{t,x}$ .

W przypadku, gdy  $t = T$  indeks  $T$  będziemy pomijać. Fakt, że miara  $\mu_x$  jest bezwzględnie ciągle względem miary  $\mu_W$  będziemy oznaczać  $\mu_x \ll \mu_W$ . W [10], twierdzenie 7.7, udowodniono następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 7.** *Niech  $x_t, t \geq 0$  będzie rozwiązaniem równania (25). Wówczas*

$$P\left(\int_0^T \|\alpha_t(x)\|^2 dt < \infty\right) = 1$$

i

$$P\left(\int_0^T \|\alpha_t(W)\|^2 dt < \infty\right) = 1$$

wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mu_x \ll \mu_W$  i  $\mu_W \ll \mu_x$  i wówczas

$$\frac{d\mu_x}{d\mu_W}(t, x) = \exp\left(\int_0^t \langle \alpha_s(x), dx_s \rangle - \frac{1}{2} \int_0^t \|\alpha_s(x)\|^2 ds\right),$$

$$\frac{d\mu_W}{d\mu_x}(t, x) = \exp\left(-\int_0^t \langle \alpha_s(x), dx_s \rangle + \frac{1}{2} \int_0^t \|\alpha_s(x)\|^2 ds\right).$$

W dalszych rozważaniach będziemy rozpatrywać równanie (1) z macierzą  $C = I$ . Stosując twierdzenie 7 do równania (1) otrzymujemy

**Twierdzenie 8.** *Jeżeli  $x_t, t \geq 0$ , jest rozwiązaniem równania (1) odpowiadającym sterowaniu  $u_t, t \in [0, T]$ , w postaci liniowego sprzężenia zwrotnego*

$$u_t = k_t x_t$$

*oraz jeżeli funkcja  $k_t$  jest ograniczona, to*

$$(26) \quad \frac{d\mu_x}{d\mu_W}(t, x) = \exp\left(\int_0^t \langle Ax_s + Bu_s, dx_s \rangle - \frac{1}{2} \int_0^t \|Ax_s + Bu_s\|^2 ds\right).$$

Dalej będziemy zakładać, że sterowanie  $u_t$  ma postać  $u_t = k_t x_t$ , a funkcja  $k_t$  jest ograniczona.

W dalszym ciągu będziemy chcieli oceniać macierze  $A$  na podstawie obserwacji procesu  $x_t$ . Będziemy to robić metodą największego prawdopodobieństwa. Dla macierzy  $\hat{A} \in M(n, n)$  okreśmy funkcję wiarygodności

$$L_t(\hat{A}) = \exp\left(\int_0^t \langle \hat{A}x_s + Bu_s, dx_s \rangle - \frac{1}{2} \int_0^t \|\hat{A}x_s + Bu_s\|^2 ds\right).$$

Za ocenę  $\hat{A}(t)$  macierzy  $A$  w chwili  $t$  przyjmujemy tą macierz  $\hat{A}$ , dla której funkcja wiarygodności  $L_t(\hat{A})$  lub, co na jedno wychodzi  $\ln(L_t(\hat{A}))$  przyjmuje wartość maksymalną. Uzyskaną w ten sposób ocenę macierzy  $A$  nazywać będziemy estymatorem lub oceną największej wiarygodności. Macierz

$\hat{A}(t) = [\hat{a}_i(t)]$  spełnia zatem układ równań

$$(27) \quad \frac{\partial \ln(L_t)}{\partial \hat{a}_{ij}}(\hat{A}(t)) = 0.$$

Mamy

$$\frac{\partial \ln(L_t)}{\partial \hat{a}_{ij}} = \int_0^t \left\langle F_{ij}x_s, \sum_{k,l=1}^n \hat{a}_{kl} F_{kl}x_s + Bu_s \right\rangle ds,$$

gdzie  $F_{ij} \in M(n, n)$  jest macierzą złożoną z samych zer poza elementem stojącym na przecięciu  $i$ -tej kolumny i  $j$ -tego wiersza, który jest równy 1. Układ (27) ma zatem postać

$$\int_0^t \langle F_{ij}x_s, dx_s \rangle - \sum_{k,l=1}^n \hat{a}_{kl} \int_0^t \langle F_{ij}x_s, F_{kl}x_s \rangle ds - \int_0^t \langle F_{ij}x_s, Bu_s \rangle ds = 0$$

lub równoważnie

$$(28) \quad \int_0^t \langle F_{ij}x_s, dx_s \rangle - \sum_{l=1}^n \hat{a}_{il} \int_0^t \langle F_{ij}x_s, F_{il}x_s \rangle ds - \int_0^t \langle F_{ij}x_s, Bu_s \rangle ds = 0,$$

gdyż  $F_{ij}x$  jest wektorem złożonym z zer za wyjątkiem  $i$ -tego miejsca gdzie stoi  $j$ -ta współrzędna wektora  $x$ , a zatem  $\langle F_{ij}x_s, F_{kl}x_s \rangle = 0$  dla  $k \neq i$ .

Wprowadzając oznaczenia

$$G(t) = \left[ \int_0^t \langle F_{ij}x_s, dx_s \rangle \right]_{i,j=1,\dots,n}, \quad H(t) = \left[ \int_0^t \langle F_{ij}x_s, Bu_s \rangle ds \right]_{i,j=1,\dots,n},$$

$$X(t) = \int_0^t x_s x'_s ds,$$

układ równań (28) możemy zapisać w postaci macierzowej

$$(29) \quad G(t) - \hat{A}(t)X(t) - H(t) = 0.$$

Ponieważ macierz  $X(t)$  jest odwracalna ([1]) więc z równania (29) otrzymujemy następujący wzór na ocenę  $\hat{A}(t)$

$$(30) \quad \hat{A}(t) = G(t)X^{-1}(t) - H(t)X^{-1}(t).$$

Uwzględniając w układzie (28) zależność

$$dx_t = \sum_{k,l=1}^n a_{kl} F_{kl}x_t dt + Bu_t dt + dW_t,$$

stwierdzamy, że ocena  $\hat{A}(t)$  spełnia układ równań

$$\int_0^t \langle F_{ij}x_s, dW_s \rangle - \sum_{l=1}^n (a_{il} - \hat{a}_{il}) \int_0^t \langle F_{ij}x_s, F_{il}x_s \rangle ds = 0$$

lub równoważnie

$$(31) \quad \sum_{l=1}^n (a_{il} - \hat{a}_{il}) \frac{\int_0^t \langle F_{ij}x_s, F_{il}x_s \rangle ds}{\int_0^t \langle F_{ij}x_s, F_{ij}x_s \rangle ds} = \frac{\int_0^t \langle F_{ij}x_s, dW_s \rangle}{\int_0^t \langle F_{ij}x_s, F_{ij}x_s \rangle ds}.$$

Z definicji macierzy  $F_{ij}$  wynikają także równości

$$\langle F_{ij}x_s, F_{il}x_s \rangle = x_s^{(i)} x_s^{(l)}$$

i

$$\int_0^t \langle F_{ij}x_s, dW_s \rangle = \int_0^t x_s^{(j)} dW_s^{(j)},$$

gdzie indeks  $(j)$  oznacza  $j$ -tą współrzędną wektora. Układ (31) możemy zatem zapisać w postaci

$$(32) \quad \sum_{l=1}^n (a_{il} - \hat{a}_{il}) \frac{\int_0^t x_s^{(j)} x_s^{(l)} ds}{\int_0^t (x_s^{(j)})^2 ds} = \frac{\int_0^t x_s^{(j)} dW_s^{(j)}}{\int_0^t (x_s^{(j)})^2 ds},$$

co po oznaczeniu

$$\overline{G}(t) = \left[ \frac{\int_0^t \langle F_{ij}x_s, dW_s \rangle}{\int_0^t \langle F_{ij}x_s, F_{ij}x_s \rangle ds} \right]_{i,j=1,\dots,n}, \quad \overline{X}(t) = \left[ \frac{\int_0^t x_s^{(j)} x_s^{(l)} ds}{\int_0^t (x_s^{(j)})^2 ds} \right]_{j,l=1,\dots,n}$$

daje

$$(33) \quad (A - \hat{A}(t))\overline{X}(t) = \overline{G}(t).$$

#### 4. Adaptacyjne sterowanie regulatorem liniowo kwadratowym.

Załóżmy, że macierz  $A$  występująca w równaniu (1) nie jest znana. Problem adaptacyjnego sterowania regulatorem liniowo kwadratowym polega, jak poprzednio, na minimalizacji funkcjonalu (8). Minimalną wartość tego funkcjonalu podaje twierdzenie 2. Problem polega zatem na określeniu sterowania  $u_t$ , jedynie na podstawie obserwacji procesu i znajomości macierzy  $B$ , dla którego zachodzi

$$J(u_t) = \text{tr}(P),$$

gdzie  $P$  jest minimalnym rozwiązaniem algebraicznego równania Riccatiego (9).

Załóżmy, że macierze  $A$  i  $B$  występujące w równaniu (1) są takie, że istnieje rozwiązanie algebraicznego równania Riccatiego (9) i że macierz  $A - BR^{-1}B'P$  jest stabilna.

Zdefiniujemy teraz optymalną strategię sterowania adaptacyjnego. Niech  $P_t$  jest minimalnym rozwiązaniem równania

$$(34) \quad Q + P_t \hat{A}(t) + \hat{A}'(t)P_t - P_t B R^{-1} B' P_t = 0,$$

a

$$(35) \quad L_t = R^{-1} B' P_t$$

o ile para  $(\hat{A}(t), B)$  jest stabilizowalna. Określmy ciąg momentów Markowa  $(\tau_m)_{m=0,1,\dots}$ :

$$(36) \quad \begin{aligned} \tau_0 &= 0 \\ \tau_m &= \max\{\sigma_1^{(m)}, \dots, \sigma_n^{(m)}\}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\sigma_i^{(m)} = \inf \left\{ t : \int_0^t (x_s^{(j)})^2 ds > m \right\}, \quad i = 1, \dots, n$$

(jeżeli zbiór  $\{t : \int_0^t (x_s^{(j)})^2 ds > m\}$  jest pusty dla pewnego  $m$  to przyjmujemy  $\sigma_i^{(m)} = \infty$ ).

Sterowanie adaptacyjne okreśmy w postaci liniowego sprzężenia zwrotnego

$$(37) \quad u_t = k_t x_t,$$

gdzie

$$(38) \quad k_t = M_m \text{ jeżeli } t \in [\tau_m, \tau_{m+1}),$$

a

$$(39) \quad M_m = \begin{cases} L_{\tau_m} & \text{jeżeli para } (\hat{A}(\tau_m), B) \text{ jest stabilizowalna} \\ M_{m-1} & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

i  $M_0$  jest dowolną macierzą z  $M(n, n)$ .

LEMAT 6. Jeżeli sterowanie dane jest równaniami (35)–(39), to

$$P\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (x_s^{(j)})^2 ds = \infty\right) = 1, \quad \text{dla } j = 1, \dots, n,$$

Dowód. Ustalmy  $j_0 \in \{1, \dots, n\}$ . Dla procesu Wienera  $W_t^{(j_0)}$  zachodzą z prawdopodobieństwem 1 równości

$$(40) \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} W_t^{(j_0)} = -\infty \quad \text{i} \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} W_t^{(j_0)} = \infty.$$

Oznaczmy  $\Gamma = \{\omega \in \Omega : \liminf_{t \rightarrow \infty} x_{t-\infty}^{(j_0)}(\omega) = -\infty\}$  i  $N_t = A + Bk_t$ . Przypuśćmy, że istnieje pewien zbiór  $A \subset \Omega$ ,  $P(A) > 0$  taki, że

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (x_s^{(j_0)}(\omega))^2 ds < \infty \quad \text{dla } \omega \in A.$$

Doprowadzimy to założenie do sprzeczności. Z definicji momentów  $\sigma_{j_0}^{(m)}$  wynika, że dla dostatecznie dużych  $m$  mamy  $P(\sigma_{j_0}^{(m)} = \infty) > 0$  i wówczas,

na mocy definicji  $P(\tau_m = \infty) > 0$  i sprzężenie zwrotne  $k_t$  przyjmuje tylko skończenie wiele wartości w szczególności jest ograniczone. Ograniczona jest zatem i funkcja  $N_t$ . Zauważmy dalej, że dla  $\omega \in \Gamma$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (x_s^{(j_0)}(\omega))^2 ds = \infty.$$

Zatem  $P(\Gamma \cap \Lambda) = 0$ . Rozważmy zbiór  $\Gamma' = \Omega/\Gamma$  i oznaczmy przez  $e_j$  wektor w przestrzeni  $R^n$  złożony z zer za wyjątkiem  $j$ -tego miejsca gdzie stoi jedynka. Z ównania (1) wynika, że

$$x_t^{(j_0)} - x_0^{(j_0)} = \int_0^t \langle e_{j_0}, N_s x_s \rangle ds + W_t^{(j_0)}$$

biorąc z obu stron tej nierówności  $\liminf$  otrzymujemy na podstawie (40) i definicji zbioru  $\Gamma$ , że dla  $\omega \in \Gamma'$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \langle e_{j_0}, N_s x_s \rangle ds = \infty,$$

a zatem

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \langle e_{j_0}, N_s x_s \rangle ds = \infty,$$

a z ograniczoności  $N_t$  wynika, że

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \langle e_{j_0}, x_s \rangle ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (x_s^{(j_0)}(\omega))^2 ds = \infty,$$

a zatem  $P(\Gamma' \cap \Lambda) = 0$ . Wcześniej pokazaliśmy, że  $P(\Gamma \cap \Lambda) = 0$ , a ponieważ  $\Gamma \cup \Gamma' = \Omega$  (z dokładnością do zbioru o prawdopodobieństwie zero) więc  $P(\Lambda) = 0$ . Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

Z definicji momentów  $\tau_m$  i lematu 6 wynika następujący wniosek.

**WNIOSEK.** *Z prawdopodobieństwem jeden momenty Markowa  $\tau_m$  są skończone.*

**TWIERDZENIE 9.** *Jeżeli sterowanie dane jest równaniami (35)–(30), to ocena  $\hat{A}(t)$  parametru  $A$  jest silnie zgodna.*

W dowodzie tego twierdzenia będziemy korzystać z następującego lematu, którego dowód znajduje się w [11].

**LEMAT 7.** *Niech na przestrzeni probabilistycznej zadany będzie  $n$ -wymiarowy proces Wienera  $W_t$  oraz  $n$ -wymiarowy proces stochastyczny  $f_t$  taki,*

że

$$(41) \quad P\left(\int_0^T \langle f_t, f_t \rangle dt < \infty\right) = 1$$

dla  $0 < T < \infty$  i

$$(42) \quad P\left(\int_0^\infty \langle f_t, f_t \rangle dt = \infty\right) = 1,$$

Wówczas proces stochastyczny  $z_s = \int_0^{\tau_s} \langle f_s, dW_s \rangle$ , gdzie  $\tau_s = \inf\{t \geq 0 : \int_0^t \langle f_y, f_y \rangle dy > s\}$ , jest procesem Wienera i

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \langle f_y, f_y \rangle dW_y}{\int_0^t \langle f_y, f_y \rangle dy} = 0$$

Dowód twierdzenia 9. Trajektorie procesu  $x_t$  są z prawdopodobieństwem 1 ciągle zatem procesy  $x_s^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, n$  spełniają założenie (41) lematu 7. Z lematu 6 wynika, że spełniają one też założenie (42). Mamy zatem równości

$$(43) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t x_s^{(j)} dW_s^{(j)}}{\int_0^t (x_s^{(j)})^2 ds} = 0.$$

Teza twierdzenia wynika teraz z równości (33) oraz z faktu, że  $\det [\bar{X}(t)] > c$  dla pewnego  $c > 0$ .

Następne twierdzenie pokazuje, że sterowanie optymalne, o którym mowa w twierdzeniu 1, nie jest jedyne i dzięki temu możliwe jest optymalne sterowanie adaptacyjne w układzie (1) z funkcjonalem kosztów (8) i jednym z takich sterowań jest sterowanie określone równościami (35)–(39). Zauważmy jeszcze, że z twierdzeń 9 i 6 oraz definicji macierzy sprzężenia zwrotnego  $k_t$  wynika równość  $\lim_{t \rightarrow \infty} k_t = k_0$ , gdzie  $k_0 = -R^{-1}B'P$ , a  $P$  jest minimalnym rozwiązaniem algebraicznego równania Riccatiego (9).

**Twierdzenie 10.** Niech  $x_t$  będzie rozwiązaniem równania (1) odpowiadające sterowaniu  $u_t = k_t x_t$ . Załóżmy, że  $\lim_{t \rightarrow \infty} k_t = k_0$ , gdzie  $k_0 = -R^{-1}B'P$ , a  $P$  jest minimalnym rozwiązaniem algebraicznego równania Riccatiego (9). Wówczas jeżeli macierz  $A + Bk_0$  jest stabilna, to

$$(44) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t [\langle Qx_s, x_s \rangle + \langle Ru_s, u_s \rangle] ds = \text{tr}(P).$$

W dowodzie tego twierdzenia będziemy korzystać z pojęcia lokalnego martyngału i nierówności Dooba-Kolmogorowa dla lokalnych martyngałów.

Proces rzeczywisty  $M_t$ ,  $t \geq 0$ , nazywamy lokalnym martyngałem względem rodziny  $\sigma$ -ciał  $F_t$ ,  $t \geq 0$ , jeżeli istnieje rosnący ciąg momentów Markowa  $\tau_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  względem rodziny  $\sigma$ -ciał  $F_t$ ,  $t \geq 0$  taki, że  $P(\tau_n \leq n) = 1$  dla

każdego  $n$ ,  $P(\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \infty) = 1$  oraz proces  $M_{\min(t, \tau_n)}, t \geq 0$  jest martingalem i  $\sup_{t \geq 0} E(M_{\min(t, \tau_n)}) < \infty$  dla każdego  $n$ . W [10] udowodniono, że dla procesu  $n$  wymiarowego  $f_t, t \geq 0$ , takiego że

$$(45) \quad P\left(\int_0^t \|f_s\|^2 ds < \infty\right) = 1$$

dla każdego  $t \geq 0$ , proces  $\int_0^t \langle f_s, dW_s \rangle$  dla  $t \geq 0$  jest lokalnym martingalem. Dla lokalnych martingalów zachodzi następująca nierówność Dooba-Kolmogorowa

$$P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \frac{1}{T} |M_t| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 T^2} E \max(M_T, 0)$$

i jeżeli  $M_t = \int_0^t \langle f_s, dW_s \rangle$  dla  $t \geq 0$ , a  $f_t, t \geq 0$ , spełnia (25), to

$$(46) \quad P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \frac{1}{T} |M_t| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 T^2} E \int_0^T \|f_s\|^2 ds.$$

Przed dowodem twierdzenia 10 udowodnimy jeszcze cztery lematy.

LEMAT 8. *Istnieje dodatnio określona macierz  $S$  i liczba  $t_0 > 0$  takie, że*

$$(47) \quad \langle x, x \rangle + 2 \langle S(A + Bk_t)x, x \rangle < 0$$

dla  $x \in R^n, x \neq 0$  i  $t > t_0$ .

Dowód. Ponieważ  $\lim_{t \rightarrow \infty} k_t = k_0$  i macierz  $A + Bk_0$  jest stabilna to istnieje  $t_0 > 0$  takie, że macierze  $A + Bk_t$  są stabilne dla  $t > \tilde{t}_0$  (lemat 4). Ustalmy dowolnie macierz dodatnio określoną  $V$  i rozważmy równania

$$(48) \quad S(A + Bk_0) + (A + Bk_0)'S + V + I = 0,$$

$$(49) \quad S_t(A + Bk_t) + (A + Bk_t)'S_t + V + I = 0.$$

Na mocy twierdzenia 3 punkt 1 równanie (48) ma rozwiązanie dodatnio określone  $S$  i równanie (49) ma rozwiązanie dodatnio określone  $S_t$  dla  $t > \tilde{t}_0$ . Z równań (48) i (49) wynikają nierówności

$$(50) \quad \langle x, x \rangle + 2 \langle S(A + Bk_0)x, x \rangle = -\langle Vx, x \rangle < 0,$$

$$(51) \quad \langle x, x \rangle + 2 \langle S_t(A + Bk_t)x, x \rangle = -\langle Vx, x \rangle < 0,$$

dla  $x \in R^n, x \neq 0$  i  $t > \tilde{t}_0$ . Ale ponieważ  $\lim_{t \rightarrow \infty} k_t = k_0$  i  $\lim_{t \rightarrow \infty} S_t = S$ , więc

$$\langle x, x \rangle + 2 \langle S(A + Bk_t)x, x \rangle < 0$$

począwszy od pewnego  $t_0 > \tilde{t}_0$ .

LEMAT 9. Jeżeli  $\lim_{t \rightarrow \infty} k_t = k_0$  i macierz  $A + Bk_0$  jest stabilna, a  $x_s$  jest rozwiązaniem równania (1) odpowiadającym sterowaniu  $u_t = k_t x_t$ , to

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_t}{t} = 0$$

z prawdopodobieństwem 1, gdzie  $M_t = \int_0^t \langle Px_s, dW_s \rangle$ , a  $P$  jest macierzą dodatnio określoną.

Dowód. Ponieważ proces  $M_t$ ,  $t \geq 0$  jest lokalnym martyngałem więc zachodzi dla niego nierówność Dooba-Kolmogorowa

$$P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \frac{1}{T} |M_t| > \varepsilon\right) \leq \frac{4}{\varepsilon^2 T^2} E \int_0^T \langle Px_s, x_s \rangle ds.$$

Niech  $T_n = 2^n$  dla  $n = 1, 2, \dots$ . Z równości (50) i lematu Borela-Cantelliego mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T_n} \frac{1}{T_n} |M_t| = 0.$$

Weźmy  $\varepsilon > 0$  i niech  $\Lambda \subset \Omega$  oraz  $N$  naturalne takie, że  $P(\Lambda) > 1 - \varepsilon$  i dla  $n \geq N$

$$\sup_{0 \leq t \leq T_n} \frac{1}{T_n} |M_t(\omega)| < \varepsilon$$

dla  $\omega \in \Lambda$ . Wybierzmy  $T > 2^N$ . Istnieje wówczas takie  $n$ , że  $2^{n-1} \leq t < 2^n$ . Dla  $\omega \in \Lambda$  mamy wtedy

$$\frac{|M_t(\omega)|}{2^n} < \varepsilon \quad \text{ i } \quad \frac{|M_t(\omega)|}{2^{n-1}} < 2\varepsilon.$$

Tak więc dla  $t > 2^N$  i  $\omega \in \Lambda$  mamy

$$\frac{|M_t(\omega)|}{t} < 2\varepsilon.$$

Zatem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|M_t(\omega)|}{t} = 0$$

z prawdopodobieństwem 1.

LEMAT 10. Jeżeli  $\lim_{t \rightarrow \infty} k_t = k_0$  i macierz  $A + Bk_0$  jest stabilna, to

$$(52) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \langle x_s, x_s \rangle ds < \infty$$

z prawdopodobieństwem 1, gdzie  $x_t$  jest rozwiązaniem równania (1) odpowiadającym sterowaniu  $u_t = k_t x_t$ .

Dowód. Niech  $S$  będzie macierzą o jakiej mowa w lemacie 8. Stosując wzór Ito do procesu  $\langle Sx_t, x_t \rangle$  otrzymujemy

$$(53) \quad \begin{aligned} \langle Sx_t, x_t \rangle - \langle Sx_0, x_0 \rangle &= 2 \int_0^t \langle x_s, S(A + Bk_s)x_s \rangle ds \\ &\quad + 2 \int_0^t \langle Sx_s, dW_s \rangle - t \operatorname{tr}(S). \end{aligned}$$

Oznaczmy

$$\begin{aligned} M_t &= 2 \int_0^t \langle Sx_s, dW_s \rangle = \langle Sx_t, x_t \rangle - \langle Sx_0, x_0 \rangle \\ &\quad - 2 \int_0^t \langle x_s, S(A + Bk_s)x_s \rangle ds - t \operatorname{tr}(S) \end{aligned}$$

i

$$N_t = \int_0^t \langle x_s, x_s \rangle 2 \langle S(A + Bk_t)x_s, x_s \rangle ds.$$

Równanie (53) możemy zapisać wówczas w postaci

$$(54) \quad M_t + N_t + \langle Sx_0, x_0 \rangle + t \operatorname{tr}(S) = \langle Sx_t, x_t \rangle + \int_0^t \langle x_s, x_s \rangle ds.$$

Ponieważ funkcja podcałkowa definiująca  $N_t$  jest dla  $t > t_0$  ujemna więc

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t} \leq 0$$

z prawdopodobieństwem 1.

Oznaczmy

$$\Lambda = \left\{ \omega : \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \langle x_s, x_s \rangle ds = \infty \right\}.$$

Pokażemy, że  $P(\Lambda) = 0$ . Przypuśćmy, że jest przeciwnie. Mamy na mocy lematów 6 i 7 dla prawie wszystkich  $\omega \in \Lambda$

$$(55) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_t(\omega)}{\int_0^t \langle x_s(\omega), x_s(\omega) \rangle ds} = 0,$$

ponadto

$$(56) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle Sx_0(\omega), x_0(\omega) \rangle}{\int_0^t \langle x_s(\omega), x_s(\omega) \rangle ds} = 0,$$

i

$$(57) \quad \frac{\text{tr}(S)}{\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \langle x_s(\omega), x_s(\omega) \rangle ds} = 0.$$

Dzieląc równość (54) przez  $t$ , a następnie przez  $\frac{1}{t} \int_0^t \langle x_s, x_s \rangle ds$  i przechodząc do granicy oraz uwzględniając (55), (56) i (57) otrzymamy, że dla  $\omega \in \Lambda$   $0 \geq 1$ . Dlatego  $P(\Lambda) = 0$  i

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \langle x_s, x_s \rangle ds < \infty$$

z prawdopodobieństwem 1.

LEMAT 11. Przy założeniach lematu 10 równość

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \langle x_s, x_s \rangle = 0$$

zachodzi z prawdopodobieństwem 1.

Dowód. Niech  $x_t, y_t, t \geq 0$  będą rozwiązaniami równań

$$dx_t = (A + Bk_t)x_t dt + dW_t$$

$$dy_t = (A + Bk_0)y_t dt + dW_t$$

Proces  $z_t = x_t - y_t$  spełnia wówczas równanie

$$(58) \quad dz_t = [(A + Bk_0)z_t + B(k_t - k_0)x_t]dt.$$

Ponieważ macierz  $A + Bk_0$  jest stabilna więc równanie

$$dz_t = (A + Bk_0)z_t dt$$

jest stabilne, a zatem macierz fundamentalną  $\phi$  równania (48) można oszacować  $\|\phi(t)\| \leq be^{-at}$  dla pewnych  $a, b > 0$ . ponadto

$$z_t = \phi(t) \int_0^t \phi^{-1}(s) B(k_s - k_0)x_s ds,$$

zatem

$$\langle z_t, z_t \rangle \leq \sup_{0 \leq s \leq t} \|\phi(t)\| \int_0^t \|k_s - k_0\| \langle x_s, x_s \rangle ds,$$

co wobec  $\lim_{t \rightarrow \infty} k_t = k_0$  i lematu 10 daje  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \langle z_t, z_t \rangle = 0$ . Ze stabilności macierzy  $A + Bk_0$  wynika także równość  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \langle y_t, y_t \rangle = 0$ , więc  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \langle x_t, x_t \rangle = 0$ .

Dowód twierdzenia 10. Niech  $P$  będzie minimalnym rozwiązaniem algebraicznego równania Riccatiego (9). Stosując wzór Ito do procesu

$\langle Px_t, x_t \rangle$  otrzymujemy

$$\langle Px_t, x_t \rangle - \langle Px_0, x_0 \rangle = 2 \int_0^t \langle x_t, P(A + Bk_s, x_s) \rangle ds + 2 \int_0^t \langle Px_s, dW_s \rangle - t \operatorname{tr}(P).$$

Oznaczmy

$$(59) \quad \begin{aligned} M_t &= 2 \int_0^t \langle Px_s, dW_s \rangle = \langle Px_t, x_t \rangle - \langle Px_0, x_0 \rangle \\ &\quad - 2 \int_0^t \langle x_s, P(A + Bk_s)x_s \rangle ds + t \operatorname{tr}(P). \end{aligned}$$

Ponieważ  $P$  jest rozwiązaniem równania (9) i na mocy definicji  $k_0$  mamy

$$2 \langle Px, Ax \rangle + \langle x, Qx \rangle - \langle k_0x, Rk_0x \rangle = 0$$

i

$$\langle Px, Bkx \rangle = - \langle k_0x, Rk_0x \rangle$$

dla dowolnych  $x \in R^n$  i  $k \in M(n, n)$ . Równanie (59) możemy zatem napisać w postaci

$$(60) \quad \begin{aligned} M_t &= \int_0^t \langle Qx_s, x_s \rangle ds + \langle Px_t, x_t \rangle - \langle Px_0, x_0 \rangle - t \operatorname{tr}(P) \\ &\quad + 2 \int_0^t \langle k_0x_s, Rk_sx_s \rangle ds - \int_0^t \langle k_0x_s, Rk_0x_s \rangle ds. \end{aligned}$$

Dodając i odejmując  $\int_0^t \langle k_sx_s, Rk_sx_s \rangle ds$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} M_t &= tJ_t(u) - t \operatorname{tr}(P) + \langle Px_t, x_t \rangle - \langle Px_0, x_0 \rangle \\ &\quad - \int_0^t \langle R(k_s - k_0)x_s, (k_s - k_0)x_s \rangle ds, \end{aligned}$$

gdzie

$$J_t(u) = \frac{1}{t} \int_0^t [\langle Qx_t, x_t \rangle + \langle Ru_t, u_t \rangle] dt.$$

Zauważmy, że z lematów 9 i 11 wynikają równości

$$(61) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E(M_t) = 0$$

$$(62) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \langle Px_t, x_t \rangle = 0.$$

Dzieląc równość (60) przez  $t$ , biorąc wartość oczekiwaną i przechodząc do

granicy otrzymamy po uwzględnieniu równości (61), (62) i

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t (R(k_s - k_0)x_s, (k_s - k_0)x_s) ds = 0$$

teżę twierdzenia, a ostatnia równość wynika z równości  $\lim_{t \rightarrow \infty} k_t = k_0$  i lematu 10.

### Literatura

- [1] M. Arato, *Linear stochastic systems with constant coefficients a statistical approach*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1982.
- [2] H. F. Chen, *Recursive estimation and control for stochastic Systems*, John Wiley, New York, 1985.
- [3] H. F. Chen i L. Guo, *Optimal stochastic adaptive control with quadratic index*, Int. J. Control 43 (1986), 869–881.
- [4] A. Czornik i W. Sragovich, *Об асимптотическом поведении алгебраического уравнения Риккати для непрерывного времени*, Автоматика и Телемеханика 8 (1995), 90–92.
- [5] M. N. A. Davis, *Линейное оценивание и стохастическое управление*, Наука, 1984.
- [6] T. E. Duncan and B. Pasik-Duncan, *Adaptive control of continuous time linear systems*, Mathematical Control Signal Systems 3 (1990), 45–60.
- [7] T. E. Duncan, P. Mandl and B. Pasik-Duncan, *Control Theory Methods for Consistency in Some Least Squares Identification Problems*, IEEE Transactions on Automatic Control 8 (1993), 1289–1292.
- [8] В. Г. Гайцгори, А. А. Первозвански, *Декомпозиция, агрегирование и приближенная оптимизация*, Наука, 1979.
- [9] P. R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, D. Van Nostrand Company, 1967.
- [10] R. Sz. Lipser, A. N. Szirajew, *Statystyka procesów stochastycznych*, PWN Warszawa 1981.
- [11] R. S. Lipser and A. N. Shiryayev, *Statistic of Random Processes II Applications*, Springer-Verlag, 1978.
- [12] P. Mandl, *The use of optimal stationary policies in adaptive control of linear systems*, Proc. Symp. to Honour Jerzy Neyman, Warszawa 1974, 223–243.
- [13] W. M. Wonham, *Linear multivariable control; a geometric approach*, Springer-Verlag, New York, 1979.
- [14] W. M. Wonham, *On pole assignment in multi-input controllable linear systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, 12 (1987), 660–665.
- [15] J. Zabczyk, *Remarks on the algebraic Riccati equation in Hilbert space*, Applied Mathematics and Optimization 2 (1976), 251–258.
- [16] J. Zabczyk, *Zarys matematycznej teorii sterowania*, PWN, Warszawa, 1991.

**Adaptive control of continuous time linear stochastic system with  
quadratic cost functional**

An adaptive control problem for linear, continuous time stochastic system is described and solved in this paper. The unknown parameters in the model appear affinely in the drift term of the stochastic differential equation. The parameter estimates given by the maximum likelihood method are used to define the feedback gain. It is proved that the parameter estimates are strongly consistent and the cost functional reaches its minimum, i.e. the adaptive control is optimal. In this paper the continuity of the solution of the algebraic Riccati equation as a function of coefficient is also verified. The continuity is important for applications to problems in adaptive control.