



JACEK MAŃKO

Łódź

O zbiorach dwoistorozmytych i innych uogólnieniach zbioru rozmytego

(Praca wpłynęła do Redakcji 29.09.1993)

0. Wstęp. Ostatnie lata rozwoju matematyki przynosiły kolejne próby uogólnienia pojęcia zbioru traktowanego jako narzędzia służącego do opisu cech pewnych przedmiotów. Zbiór jest bowiem podstawowym pojęciem teorii mnogości, a ta jest bazą całej klasycznej matematyki opartej na standardowym aparacie logiki dwuwartościowej. W tradycyjnym ujęciu matematyki przez zbiór A w pewnej przestrzeni rozważań X rozumiemy obiekt postaci:

$$(1) \quad A = \{(x, \aleph_A(x)) : x \in X\},$$

gdzie $\aleph_A$ jest tzw. funkcją charakterystyczną zbioru A . Zgodnie z tym ujęciem element x może do zbioru A należeć ($\aleph_A(x) = 1$) lub nie należeć ($\aleph_A(x) = 0$) i innej możliwości nie ma. Ten sposób przedstawienia zbioru został uogólniony w roku 1965 przez L.A. Zadeha [36]. Uogólnienie to polega na dopuszczeniu możliwości należenia elementu do zbioru w pewnym stopniu, poczynawszy od wartości 1 (całkowita przynależność), aż po wartość 0 (całkowita nieprzynależność), poprzez wszystkie wartości pośrednie między 0 i 1 oznaczające częściową przynależność do zbioru. Taki zbiór nazywa się zbiorem rozmytym. Formalnie, zbiorem rozmytym A w przestrzeni X nazywamy obiekt postaci (np. [27]):

$$(2) \quad A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\},$$

gdzie $\mu_A : X \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ jest tzw. funkcją przynależności rozmytego zbioru A , a liczba $\mu_A(x) \in \langle 0, 1 \rangle$ oznacza stopień należenia elementu x do tego zbioru.

Zbiór rozmyty jest więc opisany, gdy zdefiniowana jest jego funkcja przynależności.

Podejście do teorii zbiorów rozmytych może być zatem podejściem funkcyjnym. Termin „zbiór rozmyty” nie traktuje się w tym miejscu jako formalny zbiór par postaci (2). W części prac dotyczących tej teorii (np. [18], [23]) utożsamia się pojęcia zbioru rozmytego i jego funkcji przynależności. W takim ujęciu termin „zbiór rozmyty” jest zarezerwowany jako termin dla specyficznej rodziny funkcji umożliwiających operacje na takich pojęciach, które w potocznym języku odpowiadają zbiorom sformułowanym nieprecyzyjnie bądź niejednoznacznie, a przecież nader często funkcjonującym w życiu.

Dla przykładu rozważmy w zbiorze $X = \langle 0, 1000 \rangle$ traktowanym jako przedział możliwej liczby lat osiąganых przez drzewa, zbiór A dębów „starych”. Funkcja przynależności tego zbioru może być następująca:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 15, \\ \frac{(x-15)^2}{100 + (x-15)^2} & \text{dla } 15 < x \leq 100, \\ 1 & \text{dla } x \geq 100. \end{cases}$$

W myśl tej funkcji każdy dąb o wieku młodszym niż 15 lat na pewno nie jest „stary”, dąb 20-letni jest „stary” w stopniu 0,2, a każdy dąb o wieku powyżej 100 lat jest rzeczywiście „stary” ($\mu_A(x) = 1$).

Rodzinę zbiorów rozmytych na X oznaczamy $FS(X)$. Dla $A, B \in FS(X)$ określamy podstawowe relacje i działania mnogościowe jak dla zbiorów zwykłych, a dla wygody czyni się to w języku funkcji przynależności tych zbiorów. Mamy zatem:

$$(3) \quad A \subset B \leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x),$$

$$(4) \quad A = B \leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x),$$

$$(5) \quad \mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x),$$

$$(6) \quad \mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x),$$

$$(7) \quad \mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

dla wszystkich $x \in X$. Symbole $\vee$ i $\wedge$ oznaczają, odpowiednio, operacje maksimum i minimum z dwóch liczb rzeczywistych.

Teoria zbiorów rozmytych znajduje szerokie zastosowanie w najróżniejszych dziedzinach życia, jak np. nauki przyrodnicze, w tym biologia i medycyna, nauki społeczne i ekonomiczne, nauki humanistyczne oraz techniczne. Są to zagadnienia obecnie niezwykle aktualne, a metody teorii zbiorów rozmytych znajdują zastosowania we wszystkich liczących się firmach, począwszy od tych, które produkują aparaty fotograficzne i kamery video, przez pralki i lodówki, do statków kosmicznych. Nic więc dziwnego, że ciągle podejmowane są próby jeszcze lepszego wykorzystania teorii zbiorów rozmytych, jej rozwoju i udoskonaleń oraz uogólnień. Niniejszy artykuł poświęcony jest w głównej mierze teorii zbiorów dwoistorozmytych [5], które stanowią

najnowsze uogólnienie teorii zbiorów rozmytych Zadeha. Idea takich zbiorów i dyskusja ich nazwy jest omówiona w rozdziale 1, rozdział 2 przedstawia podstawowe definicje z dziedziny zbiorów dwoistorozmytych i własności tych działań. Rozdział 3, ostatni, przedstawia dyskusję innych uogólnień zbioru rozmytego, daje też syntetyczny przegląd prac i artykułów na temat zbiorów dwoistorozmytych.

1. Idea zbioru dwoistorozmytego. Wśród wielu prac poświęconych zbiorom rozmytym pojawiają się koncepcje uogólniające pojęcie zbioru rozmytego. Jednym z takich uogólnień jest idea K. Atanassova z roku 1983 zbioru dwoistorozmytego [2]. W swoich pracach K. Atanassov używa angielskojęzycznej nazwy „intuitionistic fuzzy set”. W [5] uzasadnia proponowaną nazwę tą przyczyną, że w rodzinie tych nowych zbiorów nie jest prawdziwe prawo wyłączonego środka, podobnie jak to się dzieje w matematyce intuicjonistów. Wydaje się to jednak zbyt blahym powodem, by nazywać taki zbiór intuicjonistycznym, tym bardziej, że dla zbiorów rozmytych Zadeha także nie jest to prawo słuszne (a przecież Zadeh nie kojarzy zbioru rozmytego z intuicjonizmem). Z drugiej strony nazwa „intuitionistic fuzzy set” została wcześniej użyta w [35] i jest w pełni uzasadniona wprowadzoną tam intuicjonistyczną logiką rozmytą. Dlatego w tym artykule sugerujemy w miejsce „intuitionistic fuzzy set” używać nazwy „zbiór dwoistorozmyty” (ta nazwa została zaproponowana i konsekwentnie używana w [30]). Ideę takiego zbioru ilustruje poniższy przykład.

Niech zbiór $X = \{0, 10, 20, \dots, 100\}$ będzie zbiorem procentowych części pewnej kwoty pieniężnej (dotacji kapitału). Rozważmy wzięte z potocznego języka wyrażenie „sporo pieniędzy” i oznaczmy przez A zbiór procentowej części pieniędzy mającej znaczenie „sporo”. A jest oczywiście zbiorem rozmytym w X , a jego funkcja przynależności μ_A może się kształtować tak, jak pokazuje to tabela 1:

Tabela 1

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\mu_A(x)$	0,0	0,0	0,2	0,5	0,7	0,8	1	0,9	0,6	0,2	0,0

Funkcja ta jest przyjęta arbitralnie (istnieją jednak metody obiektywnego określania funkcji przynależności — np. [17]), ale jej charakter raczej prawidłowo odzwierciedla sens zwrotu „sporo pieniędzy”: stopnie przynależności stopniowo rosną od zera do jedynki dla $x = 60$, a potem maleją do zera, z racji tego, że im bliżej 100-u leży x , tym bardziej „sporo” staje się „dużą częścią pieniędzy”, aż do osiągnięcia poziomu „wszystkich pieniędzy”. Odpowiednia funkcja nieprzynależności do zbioru „sporo pieniędzy” jest, zgodnie z zadehowską definicją dopełnienia (wzór 7), opisana tabelą 2:

Tabela 2

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\mu_{A'}(x)$	1	1	0,8	0,5	0,3	0,2	0,0	0,1	0,4	0,8	1

Rodzi się przy tym pytanie, czy funkcja $\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x)$ właściwie oddaje sens zwrotu „to nie jest sporo pieniędzy”. W potocznym rozumieniu zwrot „nieprawda, że sporo pieniędzy” oznacza raczej „małą część” („niewiele”), czego funkcja $\mu_{A'}$ z tabeli 2 na pewno nie odzwierciedla. Funkcja ν_A przynależności zbioru rozmytego „niewiele pieniędzy” mogłaby być taka, jak w tabeli 3:

Tabela 3

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\nu_A(x)$	1	0,9	0,7	0,4	0,2	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Zatem zbiór A „spora część pieniędzy” jest pełniej opisany przez funkcje μ_A i ν_A niż μ_A i $\mu_{A'} = 1 - \mu_A$. Zawsze zachodzi jednak $0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$.

Przykład ten sugeruje sposób rozszerzenia koncepcji zbioru rozmytego. Oryginalny przykład takiego uogólnienia, tzn. przykład zbioru dwoistorozmytego, który nie jest zbiorem rozmytym w sensie Zadeha, podany jest w [5].

2. Podstawowe definicje i twierdzenia. Niżej podajemy podstawowe informacje dotyczące zbiorów dwoistorozmytych opierając się na pracy K. Atanassova [3].

DEFINICJA 1. Dwoistorozmytym zbiorem A w przestrzeni X nazywamy zbiór obiektów postaci

$$(8a) \quad A = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)) : x \in X\},$$

gdzie funkcje $\mu_A, \nu_A : X \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ są takie, że

$$(8b) \quad 0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$$

i określają, odpowiednio, stopień przynależenia i nieprzynależenia elementu x do dwoistorozmytego zbioru A .

Rodzinę zbiorów dwoistorozmytych na przestrzeni X oznaczać będziemy przez $BFS(X)$. (K. Atanassov w swoich pracach z oczywistego względu używa symbolu $IFS(X)$).

Zbiór rozmyty L w sensie Zadeha o funkcji przynależności μ_L jest zapisywany w symbolice zbiorów dwoistorozmytych jako

$$(9) \quad L = \{(x, \mu_L(x), 1 - \mu_L(x)) : x \in X\},$$

a zwykły nierozmyty zbiór K jako

$$(10) \quad K = \{(x, \aleph_K(x), 1 - \aleph_K(x)) : x \in X\}.$$

W szczególności, przyjmujemy ponadto:

DEFINICJA 2. Dwoistorozmyty zbiór $\emptyset = \{(x, 0, 1) : x \in X\}$ nazywamy pustym, a dwoistorozmyty zbiór $U = \{(x, 1, 0) : x \in X\}$ nazywamy pełnym.

Dla zbiorów dwoistorozmytych określa się podobne relacje i działania jak w rodzinie $F\mathcal{S}(X)$. Niech więc $A, B \in BFS(X)$.

DEFINICJA 3. Mówimy, że $A \subset B$, gdy dla wszystkich $x \in X$ $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ i $\nu_A(x) \geq \nu_B(x)$. Gdy $A \subset B$ i $B \subset A$, to $A = B$.

DEFINICJA 4. Sumę $A \cup B$ zbiorów A i B nazywamy taki dwoistorozmyty zbiór $A \cup B = \{(x, \mu_{A \cup B}(x), \nu_{A \cup B}(x)) : x \in X\}$, że

$$(11) \quad \mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \quad \text{i} \quad \nu_{A \cup B}(x) = \nu_A(x) \wedge \nu_B(x).$$

Przekrojem $A \cap B$ zbiorów A i B nazywamy taki dwoistorozmyty zbiór $A \cap B = \{(x, \mu_{A \cap B}(x), \nu_{A \cap B}(x)) : x \in X\}$, że

$$(12) \quad \mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \quad \text{i} \quad \nu_{A \cap B}(x) = \nu_A(x) \vee \nu_B(x).$$

Dopełnieniem A' zbioru A nazywamy taki zbiór $A' = \{(x, \mu_{A'}(x), \nu_{A'}(x)) : x \in X\}$, że

$$(13) \quad \mu_{A'}(x) = \nu_A(x) \quad \text{i} \quad \nu_{A'}(x) = \mu_A(x).$$

Oprócz operacji mnogościowych definiuje się w $BFS(X)$ także tzw. operacje algebraiczne.

DEFINICJA 5. Sumą algebraiczną $A + B$ zbiorów A i B nazywamy taki dwoistorozmyty zbiór $A + B = \{(x, \mu_{A+B}(x), \nu_{A+B}(x)) : x \in X\}$, że

$$(14) \quad \begin{aligned} \mu_{A+B}(x) &= \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \quad \text{i} \\ \nu_{A+B}(x) &= \nu_A(x) \cdot \nu_B(x). \end{aligned}$$

Iloczynem algebraicznym $A \circ B$ zbiorów A i B nazywamy zbiór $A \circ B = \{(x, \mu_{A \circ B}(x), \nu_{A \circ B}(x)) : x \in X\}$ taki, że

$$(15) \quad \begin{aligned} \mu_{A \circ B}(x) &= \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \quad \text{i} \\ \nu_{A \circ B}(x) &= \nu_A(x) + \nu_B(x) - \nu_A(x) \cdot \nu_B(x). \end{aligned}$$

Przykłady innych operacji można znaleźć w [3], [5], [9].

DEFINICJA 6. Zbiory $A, B \in BFS(X)$ nazywamy rozłącznymi, gdy $A \cap B = \emptyset$ w sensie definicji 2.

TWIERDZENIE 1. Operacje $\cup$ i $\cap$ są łączne, przemienne, wzajemnie rozdzielne, idempotentne i spełniają prawa de Morgana.

TWIERDZENIE 2. Operacje $+$ i $\circ$ są łączne, przemienne i spełniają prawa de Morgana.

Twierdzenie 3. *Dla dowolnych $A, B, C \in BFS(X)$ zachodzą*

$$(16) \quad (A \cup B) \circ C = (A \circ C) \cup (B \circ C),$$

$$(17) \quad (A \cap B) \circ C = (A \circ C) \cap (B \circ C).$$

Twierdzenie 4. *Jeśli $A \in BFS(X)$, $\emptyset$ jest pustym zbiorem dwoistorozmyty, U oznacza dwoistorozmyty zbiór pełny, to*

$$(18) \quad A + \emptyset = A, \quad A + U = U,$$

$$(19) \quad A \circ \emptyset = \emptyset, \quad A \circ U = A.$$

Bardziej ogólnie mamy

Twierdzenie 5. *Każda z rodzin $(BFS(X), +)$ i $(BFS(X), \circ)$ jest półgrupą przemenną z zerem, jedynką i skracaniem.*

Twierdzenie 6. *Każdą z rodzin $(BFS(X), U)$ oraz $(BFS(X), \cap)$ jest półgrupą przemenną, idempotentną, z zerem, jedynką i skracaniem.*

Dowody tych twierdzeń wynikają z wprowadzonych definicji i własności operacji maximum-minimum dla liczb z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$.

Z wprowadzonego w rozdziale 1 przykładu zbioru dwoistorozmytego można zauważyć, że w klasie $BFS(X)$ nie są prawdziwe

$$(20) \quad A \cap A' = \emptyset \quad \text{ i } \quad A \cup A' = U$$

w myśl definicji 2.

3. Inne uogólnienia. Omówione w tym artykule pojęcie zbioru dwoistorozmytego nie jest, jak wspomnieliśmy na początku, jedynym uogólnieniem zbioru rozmytego Zadeha (zobacz też [26]). Już w roku 1968 J.A. Goguen wprowadził pojęcie L -zbioru rozmytego [23] jako funkcję $\mu : X \rightarrow L$, gdzie L oznacza dowolną kratę. Była to pierwsza praca, w której wyraźnie przez zbiór rozmyty rozumiano funkcję przynależności. W roku 1971 J.G. Brown wysunął koncepcję B -rozmytego zbioru [16] jako funkcję $\mu : X \rightarrow B$ z dowolną algebrą Boole'a B . Szczególny przypadek tego podejścia wykorzystali w [1] R. Antoniewicz i W. Ostasiewicz przyjmując jako B iloczyn prosty dwuargumentowej algebry Boole'a $\{0, 1\}^n$. Następnie pojawiły się koncepcje zbioru rozmytego typu n [28] i rozmytych zbiorów przedziałowych [24], [37]. W roku 1977 K. Hirota wprowadził pojęcie zbioru probabilistycznego [25] łącząc teorię zbiorów rozmytych z probabilistyką. Przez zbiór probabilistyczny rozumiał on funkcję $\mu : X \times \Omega \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$, gdzie X jest dowolnym zbiorem, (Ω, B, P) jest przestrzenią probabilistyczną, a sama funkcja μ jest B -mierzalna. W roku 1981 Z. Pawlak zaproponował pojęcie zbioru przybliżonego [32], [33] (ang. "rough set") jako pary dwóch zbiorów zwykłych zwanych niższym i wyższym przybliżeniem takiego zbioru. W 1983 roku D. Dubois i

H. Prade wprowadzili pojęcie rozmytego zbioru dwuskładowego (ang. "two-fold fuzzy set") [19] jako parę zbiorów zwykłych powstałych, z jednej strony, z przekonania o oczywistości należenia elementów przestrzeni do takiego zbioru, a z drugiej strony z dopuszczenia możliwości ich należenia. Koncepcje zbioru rozmytego typu „rough” i typu „twofold” konfrontuje praca [20]. Mianowicie zbiór „rough” odpowiada idei zbioru, którego elementy są dobrze określone, ale które trudno scharakteryzować w ocenie posiadania przez nie pewnego atrybutu. Zbiór rozmyty „twofold” związany jest ze zbiorem tych obiektów, które są dobrze scharakteryzowane w relacji posiadania pewnej cechy, ale nieprecyzyjnie określone w relacji należenia do zbioru.

Na tym tle koncepcja K. Atanassova zbioru dwoistorozmytego jawi się jako kolejne uogólnienie idei Zadeha, uogólnienie oparte na specjalnej dwoistorozmytej logice [14], [15]. Koncepcja ta jest w dodatku stosunkowo prosta w budowie i zastosowaniu [3], [31] i ma pewne uzasadnienie w teorii oczywistości Shafera [34]. Chronologicznie biorąc, pojęcie zbioru dwoistorozmytego zostało wprowadzone w [2] w 1983 roku przez K. Atanassova oraz przedstawione przez S. Stoevę [3] w Poznaniu w październiku 1983 roku. Pierwszą pracą o większym zasięgu była praca [5] publikowana w 1986 roku w *Fuzzy Sets and Systems*. W kolejności ukazywały się artykuły poświęcone relacjom dwoistorozmytym [4], problematyce L -zbiorów dwoistorozmytych [6] i programowaniu [7], [13]. W pracy [21] po raz pierwszy zwrócono uwagę na problem zależności zbiorów dwoistorozmytych i stopnia tej zależności, a w [29] zawarte zostały pewne sugestie dotyczące mierzenia ich rozmytości i ostrości. W [8] K. Atanassov i G. Gargov opisali dwoistorozmyte zbiory przedziałowe, a w [9] pojawiły się dodatkowe operacje na zbiorach dwoistorozmytych. W [22] ukazała się dyskretna koncepcja prawdopodobieństwa na takich zdarzeniach. Mniej znane prace K. Atanassova i jego współpracowników drukowane są jako informacje instytutu Mikrosystemów w Sofii [10–13]. Całą serię artykułów o zbiorach dwoistorozmytych przedstawia zeszyt pokonferencyjny [31]. Problem mierzenia takich zbiorów entropowo, energetycznie, korelacyjnie i probabilistycznie w przypadku ogólnym omawia praca [30]. Najnowsze wysiłki K. Atanassova zmierzają w kierunku podbudowania teorii zbiorów dwoistorozmytych specyficzną logiką dwoistorozmytą [14], [15].

Oznaczenia pomocnicze:

BUSEFAL — Bullerin pour les Sous Ensembles Flous et Leurs Applications

FSS — Fuzzy Sets and Systems, an International Journal

IM-MFAIS — Institute For Microsystems, Mathematical Foundations of Artificial Intelligence, Sofia, Bulgaria

LITERATURA

- [1] R. Antoniewicz i W. Ostasiewicz, *Koncepcja rozmytego rachunku prawdopodobieństwa*. Badania operacyjne w praktyce gospodarczej (materiały konferencyjne

- Maków, 1981), Akademia Ekonomiczna, Katowice 1982, 5–12.
- [2] K. Atanassov, *Intuitionistic fuzzy sets*, VII ITKR'S Scientific Session, Sofia, June 1983.
- [3] K. Atanassov i S. Stoeva, *Intuitionistic fuzzy sets*, Proc. Polish Symposium on Interval and Fuzzy Mathematics in Poznań in 1983, Instytut Matematyki Politechniki Poznańskiej, Poznań 1985, 23–26.
- [4] K. Atanassov, *Intuitionistic fuzzy relations*, w: L. Antonov, Ed., III International School „Automation and Scientific Instrumentation”, Varna 1984, 56–57.
- [5] K. Atanassov, *Intuitionistic fuzzy sets*, FSS 20, 1986, 87–96.
- [6] K. Atanassov i S. Stoeva, *Intuitionistic L-fuzzy sets*, w: R. Trappl, Ed., Cybernetics and System Research 2, Elsevier Sci. Publ., Amsterdam 1984, 539–540.
- [7] K. Atanassov i S. Stoeva, *Intuitionistic fuzzy programs*, Proc. of the Second Polish Symp. on Interval and Fuzzy Mathematics in Poznań in 1985, Instytut Matematyki Politechniki Poznańskiej, Poznań 1987, 13–16.
- [8] K. Atanassov i G. Gargov, *Interval valued intuitionistic fuzzy sets*, FSS 31, 1989, 343–349.
- [9] K. Atanassov, *More on intuitionistic fuzzy sets*, FSS 33, 1989, 37–45.
- [10] K. Atanassov, *Geometrical interpretation of the element of the intuitionistic fuzzy objects*, IM-MFAIS-1-1989.
- [11] K. Atanassov, *Two variants of intuitionistic modal logic*, IM-MFAIS-3-1989.
- [12] K. Atanassov, *Four new operators over intuitionistic fuzzy sets*, IM-MFAIS 4 1989.
- [13] K. Atanassov, H. Georgiev, A. Drumev i I. Kozalarski, *Intuitionistic fuzzy PROLOG*, IM-MFAIS-5-1989.
- [14] K. Atanassov i G. Gargov, *Intuitionistic fuzzy logic*, Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences, 43, 3, 1991, 9–12.
- [15] K. Atanassov i G. Gargov, *Intuitionistic fuzzy logic-part II*, wydawnictwo [14], 44, 7, 1991.
- [16] J.G. Brown, *A note on fuzzy sets*, Inform. Control 18, 1971, 32–39.
- [17] H. Diskhant, *About membership function estimation*, FSS 5, 1981, 141–147.
- [18] J. Drewniak, *Podstawy teorii zbiorów rozmytych*, skrypt Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 1984.
- [19] D. Dubois i H. Prade, *Twofold fuzzy sets*, J. Fuzzy Math. (Chiny) 3/4, 1983, 53–76.
- [20] D. Dubois i H. Prade, *Twofold fuzzy sets and rough sets — some issues in knowledge representation*, FSS 23, 1987, 3–18.
- [21] T. Gerstenkorn i J. Mańko, *Correlation of intuitionistic fuzzy sets*, FSS 44, 1991, 39–43.
- [22] T. Gerstenkorn i J. Mańko, *Probability of intuitionistic fuzzy sets*, BUSEFAL 45, 1991, 128–136.
- [23] J. Goguen, *L-fuzzy sets*, J. Math. Anal. Appl. 18, 1967, 145–174.
- [24] M. Gorzalczyk, *A method of inference in approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets*, FSS 21, 1987, 1–17.
- [25] K. Hirota, *Concepts of probabilistic sets*, Proc. IEEE Conf. Decision and Control 1977, 1361–1366.
- [26] U. Höhle i L.N. Stout, *Foundations of fuzzy sets*, FSS 40, 1991, 257–296.
- [27] J. Kacprzyk, *Zbiory rozmyte w analizie systemowej*, PWN, Warszawa 1986.
- [28] A. Kaufmann, *Théorie des sous-ensembles flous*, t.1, Paris, Masson 1973.
- [29] J. Mańko, *On measuring the fuzziness and the nonfuzziness of intuitionistic fuzzy sets*, Acta Pannonica 4/2, 1993, 53–63.

- [30] J. Mańko, *Prawdopodobieństwo, entropia i energia w teorii zbiorów dwoistorozmytych*, rozprawa doktorska, Uniwersytet Łódzki, Łódź 1992.
- [31] Nineteenth Session of the National Seminar of Informatics of the Union of Bulgarian Mathematicians and Fourth Scientific Session of the Mathematical Foundations of Artificial Intelligence Seminar, Sofia, Nov. 1990, IM-MFAIS-5-1990.
- [32] Z. Pawlak, *Rough sets-basis notions*, Report N.431, Institute of Computer Science, Polish Acad. of Sciences, Warsaw 1981.
- [33] Z. Pawlak, *Rough sets and fuzzy sets*, FSS 17, 1985, 99–102.
- [34] G. Shafer, *A mathematical theory of evidence*, Princeton University Press, Princeton New York 1976.
- [35] G. Takeuti i S. Titani, *Intuitionistic fuzzy logic and intuitionistic fuzzy sets theory*, Journ. of Symbolic Logic 49, 1984, 851–866.
- [36] L.A. Zadeh, *Fuzzy sets*, Inform. Control 8, 1965, 338–353.
- [37] L.A. Zadeh, *The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning — I*, Inform. Sci. 8, 1975, 199–249.

Summary

The article presents the new concept of a fuzzy set, namely bifuzzy set. In original papers [2]–[15] it is used the name „intuitionistic fuzzy set” but it is not really adequate. We describe the idea of such a set and basic definitions and theorems of bifuzzy set theory. At last we present some other concepts describing fuzzy objects and give a rich literature to them.

INSTYTUT MATEMATYKI
UNIwersytet Łódzki
BANACHA 22
90-238 ŁÓDŹ