



ANDRZEJ SIEROCIŃSKI
Warszawa

Stałoprecyzyjna estymacja wartości maksymalnej ograniczonej zmiennej losowej

(Praca wpłynęła do Redakcji 1984.02.06)

0. WSTĘP

Prezentowana praca zawiera przegląd metod i wyników dotyczących konstrukcji przedziału ufności o zadanej z góry szerokości i przy zadanym poziomie ufności dla parametru będącego górnym ograniczeniem nośnika rozkładu. Na ogół nie jest możliwa konstrukcja takiego przedziału na podstawie próby o ustalonej liczności. Okazuje się, że zadanie to można rozwiązać za pomocą procedur sekwencyjnych, w których liczność próby staje się zmienną losową.

Zagadnienie estymacji stałoprecyzyjnej jest w teorii estymacji zagadnieniem bardzo ważnym, z tego też względu literatura związana z tym tematem jest bardzo obszerna, a chyba najpełniejszy przegląd wyników podany jest w monografiach Govindarajulu [7] i Zacksa [16]. Jednakże, przeważająca liczba prac dotyczy jedynie asymptotycznych przedziałów ufności (asymptotyka ze względu na szerokość przedziału dążąca do zera), których przydatność w prak-

tyce jest ograniczona. Nawet w dość dobrze zbadanym i opisanym przypadku stałoprecyzyjnej estymacji wartości oczekiwanej w rozkładzie normalnym uzyskane wyniki nie są ciągle w pełni zadowalające. Praktycznie nie ma żadnych ogólnych metod estymacji stałoprecyzyjnej. Do wyjątków należą tu dwustopniowa procedura Steina i jej modyfikacje (patrz np. [11]), dotycząca problemu estymacji parametru położenia, ogólna dwustopniowa procedura Birnbauma i Healy'ego [2] oparta na nierówności Czebyszewa oraz procedura sekwencyjna Zielińskiego [17]. Rozwinęła się natomiast teoria asymptotyczna, zapoczątkowana pracami Anscombe'a [1] oraz Chowa i Robbinsa [4].

W niniejszej pracy interesowały nas będą głównie wyniki nieasymptotyczne.

1. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Rozważmy przestrzeń statystyczną $(R_+, B_+, \{P_\theta, \theta > 0\})$, gdzie R_+ jest półprostą dodatnią, a B_+ - σ -ciałem podzbiorów borelowskich na R_+ . Dla każdego $\theta > 0$ nośnik rozkładu P_θ jest w przedziale $[0, \theta]$. Innymi słowy, jeżeli F_θ jest dystrybuantą rozkładu P_θ , to spełniony jest następujący warunek:

$$(1.1) \quad [F_\theta(x) \in (0, 1)] \iff [x \in (0, \theta)].$$

Niech $X_1, X_2, \dots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie P_θ . Dla ustalonych, dowolnych wartości $d > 0$ oraz $\delta \in (0, 1)$ chcemy wyznaczyć ciąg estymatorów parametru

$$(1.2) \quad \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

oraz regułę zatrzymania τ taką, że

$$(1.3) \quad P_{\theta} \{ |\theta - \hat{\theta}_{\tau}| > d \} \leq \gamma \quad (\forall \theta > 0).$$

Inaczej mówiąc chcemy, aby $[\hat{\theta}_{\tau} - d, \hat{\theta}_{\tau} + d]$ był przedziałem ufności dla parametru θ na poziomie ufności $1 - \gamma$.

Klasa rozkładów prawdopodobieństwa opisana warunkiem (1.1) jest na tyle obszerna, że znalezienie jednej, uniwersalnej procedury estymacji umożliwiającej oszacowanie parametru θ jest niemożliwe ([19]). Problem został rozwiązany w pewnych szczególnych przypadkach, które zostaną omówione w pracy. Są to:

(a) przypadek rozkładu z nieznanym parametrem skali, tzn. dystrybuanta $F_{\theta}(x) = F(x/\theta)$, gdzie F jest znaną dystrybuantą;

(b) przypadek rozkładu posiadającego pewną symetrię, tzn. dystrybuanta spełnia następujący warunek

$$(\exists \alpha, p > 0) \quad (\forall \theta > 0) \quad (\forall x \in (0, \frac{\theta}{\alpha+1}])$$

$$0 < F_{\theta}(\alpha x) \leq p(1 - F_{\theta}(\theta - x));$$

(c) przypadek rozkładu jednostajnego na przedziale $[0, \theta]$.

2. PRZYPADEK ROZKŁADU Z PARAMETREM SKALI

Niech F będzie znaną dystrybuantą rozkładu o nośniku w przedziale $[0, 1]$. Dystrybuanta rozkładu P_{θ} zadana jest równością

$$(2.1) \quad F_{\theta}(x) = F\left(\frac{x}{\theta}\right).$$

Blum i Rosenblatt [3] (patrz także [16]) udowodnili następujący

LEMAT 2.1. Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną rozkładów prawdopodobieństwa zależnych od parametru skali θ , o gęstościach $\frac{1}{\theta}f(\frac{x}{\theta})$, ciągłych w nośniku ze względu na θ . Wtedy nie istnieje przedział ufności dla parametru θ o ustalonej szerokości d , postaci $[\hat{\theta}(X), \hat{\theta}(X) + d]$ skonstruowany na podstawie próby o liczności 1, tzn. $(\forall d > 0)(\forall \gamma \in (0, 1))(\forall \hat{\theta}(\cdot))(\exists \theta > 0)$

$$P_{\theta} \{ \hat{\theta}(X) \leq \theta \leq \hat{\theta}(X) + d \} < 1 - \gamma.$$

Bezpośrednio z lematu 2.1 wynika, że dla klasy rozkładów ciągłych z parametrem skali nie można wyznaczyć przedziału ufności o zadanej precyzji na podstawie próby o ustalonej liczności. Rozwiązania tego problemu należy zatem szukać w klasie procedur wielostopniowych lub sekwencyjnych.

2.1. Dwustopniowa procedura Birnbauma i Healy'ego

Birnbaum i Healy [2] podali pewną ogólną metodę konstrukcji przedziałów ufności o zadanej precyzji. Omówimy teraz założenia tej metody oraz podamy sposób jej wykorzystania do rozwiązania naszego zadania.

Niech $X_1, X_2, \dots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o dystrybuancie F_{θ} i niech $d > 0$ oraz $\gamma \in (0, 1)$ będą ustalone.

Założenia:

$$(a) \quad (\exists n_0 \geq 0)(\forall n \geq n_0)(\exists t = t(X_1, X_2, \dots, X_n))$$

$$E_{\theta} \{ t(X_1, X_2, \dots, X_n) \} = \theta,$$

tzn. istnieje nieobciążony estymator parametru θ ;

(b) dla wszystkich $n \geq n_0$ istnieje wariancja estymatora t

$$V_{\theta} \{t(X_1, X_2, \dots, X_n)\} = \sigma^2(\theta, n) ;$$

(c) istnieje $m_0 > 0$ takie, że dla wszystkich $m \geq m_0$ istnieje całkowitoliczbowa funkcja

$$n = n(X_1, \dots, X_m) \geq n_0$$

taka, że

$$(2.2) \quad E_{\theta} \{ \sigma^2(\theta, n(X_1, \dots, X_m)) \} \leq \gamma d^2$$

dla wszystkich możliwych wartości parametru θ .

Procedura estymacji:

I. Pobieramy próbę wstępną o liczebności $m \geq m_0$, $X_1, \dots, X_m$

i obliczamy wielkość drugiej próby $n = n(X_1, \dots, X_m)$;

II. Niezależnie od $X_1, \dots, X_m$ pobieramy drugą próbę $X_{m+1}, \dots, X_{m+n}$

i obliczamy wartość estymatora $t = t(X_{m+1}, \dots, X_{m+n})$.

Wtedy $[t(X_{m+1}, \dots, X_{m+n}) - d, t(X_{m+1}, \dots, X_{m+n}) + d]$ jest przedziałem ufności na poziomie ufności $1 - \gamma$. Istotnie, korzystając z nierówności Czebyszewa, otrzymujemy

$$\begin{aligned} P_{\theta} \{ |t(X_{m+1}, \dots, X_{m+n}) - \theta| > d \} &\leq \\ &\leq \frac{E_{\theta} \sigma^2(\theta, n(X_1, \dots, X_m))}{d^2} \leq \frac{\gamma d^2}{d^2} = \gamma . \end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że stosowalność tej procedury jest w znacznym stopniu ograniczona koniecznością znalezienia odpowiedniej funkcji $n(x_1, \dots, x_m)$. W przypadku rodziny rozkładów $\{P_\theta, \theta > 0\}$, dla której θ jest parametrem skali, autorzy proponują przyjęcie jako estymatora nieobciążonego parametru

$$t = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{nE_1(X)},$$

wówczas

$$\sigma^2(\theta, n) = \frac{\theta^2 V_1(X)}{n E_1^2(X)} = \frac{\theta^2}{n} C,$$

gdzie $C = \frac{V_1(X)}{E_1^2(X)}$, a funkcja wielkości drugiej próby n musi spełniać warunek (2.2), tzn.

$$E_\theta \left\{ \frac{1}{n(x_1, \dots, x_m)} \right\} \leq \frac{\delta d^2}{\theta^2 C}.$$

Liczność drugiej próby można zatem określić jako

$$n(x_1, \dots, x_m) = \min \left\{ n \geq n_0 : \frac{1}{n} \leq \hat{g}(x_1, \dots, x_m) \cdot \frac{\delta d^2}{C} \right\},$$

gdzie $\hat{g}(x_1, \dots, x_m)$ jest nieobciążonym estymatorem parametru θ^{-2} .

W przypadku rozkładów o nośniku w przedziale $[0, \theta]$, na ogół najlepszym oszacowaniem parametru θ jest maksimum z próby, a nie średnia z próby. Dlatego też wygodniej jest jako nieobciążony estymator parametru θ przyjąć

$$t = \frac{\max(X_1, \dots, X_m)}{E_1 \{ \max(X_1, \dots, X_m) \}}.$$

Wówczas

$$\sigma^2(\theta, n) = \theta^2 \varphi(n),$$

gdzie φ zależy tylko od n . Analogicznie jak poprzednio

$$E_\theta \{ \varphi(n(X_1, \dots, X_m)) \} \leq \frac{\gamma d^2}{\theta^2}.$$

Ponieważ

$$E_\theta \left\{ \frac{1}{\max^2(X_1, \dots, X_m)} \right\} = \frac{1}{\theta^2} \psi(m),$$

gdzie ψ nie zależy od θ , możemy przyjąć

$$n(x_1, \dots, x_m) = \min \left\{ n \geq n_0 : \varphi(n) \leq \frac{\gamma d^2}{\max^2(x_1, \dots, x_m) \psi(m)} \right\}$$

Wadą takiego postępowania jest to, że nie można znaleźć funkcji

liczności drugiej próby ogólnie dla wszystkich rozkładów P_θ , gdyż zależy ona w sposób istotny od postaci nieobciążonego estymatora parametru θ^{-2} .

2.2. Procedura wielostopniowa

Podstawowymi wadami procedur dwustopniowych są: dowolność doboru wielkości próby wstępnej oraz duża wariancja liczności drugiej próby w przypadku, gdy próba wstępna ma zbyt małą licznosc. Dlatego o wiele lepsze i „bezpieczniejsze”, z uwagi na mniejszą na ogół wariancję liczności próby, są procedury wielostopniowe i sekwencyjne.

Przedstawimy teraz wielostopniową procedurę estymacji parametru θ w rozkładach o dystrybuancie (2.1), nie wymagając żadnych dodatkowych założeń o F .

Ustalmy $d > 0$ oraz $\gamma \in (0,1)$. Jako estymator parametru θ przyjmujemy

$$(2.3) \quad \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n) = \max(X_1, \dots, X_n).$$

gdzie $X_1, X_2, \dots$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowej dystrybuancie (2.1). Zdefiniujemy całkowitoliczbową funkcję $N: (0,1) \rightarrow \mathbb{N}$ równością

$$(2.4) \quad N = N(x) = \min \left\{ n \in \mathbb{N} : n \geq \frac{\ln \gamma}{\ln(F(1-x))} \right\}.$$

LEMAT 2.2. Jeżeli ε jest zmienną losową o wartościach w przedziale $(0,1)$, niezależną od ciągu obserwacji $X_1, X_2, \dots$, to

$$(2.5) \quad P_{\theta} \{ \theta - \hat{\theta}_{N(\varepsilon)} > \varepsilon \cdot \theta \} \leq \gamma$$

dla wszystkich $\theta > 0$.

D o w ó d. Oznaczmy przez G dystrybuantę zmiennej losowej ε . Niech $a_0 = 1$ oraz dla $k = 1, 2, \dots$

$$[a_k, a_{k-1}) = \{x \in (0, 1) : N(x) = k\}.$$

Oczywiście przedziały $[a_k, a_{k-1})$, $k = 1, 2, \dots$, tworzą rozbitcie odcinka $(0, 1)$. Przyjmując

$$F^{-1}(y) = \sup \{x : F(x) \leq y\},$$

łatwo zauważyć, że

$$a_k = 1 - F^{-1}\left(\gamma^{\frac{1}{k}}\right).$$

Oznaczając przez $M_n = \frac{\hat{\theta}_n}{\theta}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} P_{\theta} \{ \theta - \hat{\theta}_{N(\varepsilon)} > \varepsilon \cdot \theta \} &= P_1 \{ M_{N(\varepsilon)} + \varepsilon < 1 \} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P_1 \{ M_{N(\varepsilon)} + \varepsilon < 1, \varepsilon \in [a_k, a_{k-1}) \} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{[a_k, a_{k-1})} \left[\int_{(0, 1-e)} dF^k(x) \right] dG(e) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{[a_k, a_{k-1})} [F^k(1-e)] dG(e) \leq \gamma. \end{aligned}$$

gdyż dla $e \in [a_k, a_{k-1})$ mamy

$$F^k(1-e) \leq F^k(1-a_k) = F^k \left[F^{-1} \left(\delta^{\frac{1}{k}} \right) \right] \leq \delta.$$

Bez straty ogólności możemy założyć, że rozkład P_θ nie ma atomu w zerze, tzn. $P_\theta \{X = 0\} = F(0+) = 0$ dla wszystkich $\theta > 0$. Wykorzystując lemat 2.2, możemy estymować parametr θ według poniższej wielostopniowej procedury estymacji. Najpierw jednak wprowadzimy kilka niezbędnych oznaczeń.

Niech $X_0, X_1, X_2, \dots$ będzie ciągiem niezależnych obserwacji zmiennej losowej o dystrybuancie F_θ . Ciągi zmiennych losowych $(N_i, i \geq 0)$, $(\hat{\theta}_{N_i}, i \geq 0)$ oraz $(\tilde{N}_i, i \geq 0)$ zdefiniowane są w następujący sposób:

$$N_i = N \left(\frac{d}{d + \hat{\theta}_{N_{i-1}}} \right) \quad \text{oraz} \quad \hat{\theta}_{N_i} = \max \{ X_{\tilde{N}_{i-1}+1}, \dots, X_{\tilde{N}_i} \}$$

dla $i = 1, 2, \dots$, gdzie $N_0 = 1$, $\hat{\theta}_{N_0} = X_0$, a $\tilde{N}_i = \sum_{j=0}^i N_j$.

Wtedy, przyjmując

$$K = \min \{ j \in \mathbb{N} : \hat{\theta}_{N_j} \leq \hat{\theta}_{N_{j-1}} \},$$

otrzymujemy następujące

TWIERDZENIE 2.1. Dla wszystkich wartości parametru $\theta > 0$

$$P_\theta \{ \tilde{N}_K < \infty \} = 1$$

oraz

$$(2.6) \quad P_{\theta} \{ \theta - \hat{\theta}_{\tilde{N}_K} > d \} \leq \delta ,$$

tzn. $[\hat{\theta}_{\tilde{N}_K}, \hat{\theta}_{\tilde{N}_K} + d]$ jest przedziałem ufności dla parametru θ na poziomie ufności $1 - \gamma$.

D o w ó d. Pierwsza część tezy jest oczywista i wynika z faktu, że

$$\lim_{j \rightarrow \infty} P_{\theta} \{ x_0 < \hat{\theta}_{N_1} < \hat{\theta}_{N_2} < \dots < \hat{\theta}_{N_j} \} = 0.$$

Aby udowodnić (2.6), zauważmy, że w chwili zatrzymania $\tilde{N}_K$

$$\hat{\theta}_{N_K} \leq \hat{\theta}_{N_{K-1}}, \text{ czyli}$$

$$\begin{aligned} P_{\theta} \{ \theta - \hat{\theta}_{N_K} > d \} &\leq P_{\theta} \left\{ \theta - \hat{\theta}_{N_K} > d \frac{\hat{\theta}_{N_K}}{\hat{\theta}_{N_{K-1}}} \right\} = \\ &= P_{\theta} \left\{ \theta - \hat{\theta}_{N_K} > \frac{d}{d + \hat{\theta}_{N_{K-1}}} \theta \right\} \leq \delta . \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność wynika z lematu 2.2, ponieważ $\hat{\theta}_{N_K}$ i $\hat{\theta}_{N_{K-1}}$ są niezależne. Oczywiście

$$P_{\theta} \{ \theta - \hat{\theta}_{\tilde{N}_K} > d \} \leq P_{\theta} \{ \theta - \hat{\theta}_{N_K} > d \} ,$$

$$\text{gdyż } \hat{\theta}_{N_K} \leq \hat{\theta}_{\tilde{N}_K} .$$

Procedura wielostopniowa.

Krok-0. Obserwujemy pojedynczą wartość X_0 zmiennej losowej o dystrybucji F_θ i obliczamy licznosc próby w pierwszym kroku $N_1 = N\left(\frac{d}{d+X_0}\right)$.

Krok-1. Pobieramy, niezależnie od X_0 , próbę o liczności N_1 $X_1, X_2, \dots, X_{N_1}$; jeżeli $\hat{\theta}_{N_1} = \max(X_1, \dots, X_{N_1}) \leq X_0$, to przyjmujemy $[\hat{\theta}_{\tilde{N}_1}, \hat{\theta}_{\tilde{N}_1} + d]$ za przedział ufności dla parametru θ , w przeciwnym razie przechodzimy do kroku-2.

Krok-2. Pobieramy, niezależnie od $X_0, X_1, \dots, X_{N_1}$, próbę o liczności $N_2 = N\left(\frac{d}{d + \hat{\theta}_{N_1}}\right)$, jeżeli $\hat{\theta}_{N_2} \leq \hat{\theta}_{N_1}$, to przyjmujemy $[\hat{\theta}_{\tilde{N}_2}, \hat{\theta}_{\tilde{N}_2} + d]$ za przedział ufności dla θ , w przeciwnym razie przechodzimy do kroku trzeciego itd.

Liczba obserwacji potrzebnych do znalezienia przedziału ufności jest zmienną losową i wynosi $\tilde{N}_K + 1$. Zauważmy, że przedział ufności można konstruować tylko na podstawie ostatniej partii N_K obserwacji. Jest to zatem bardzo „nieoszczędna” procedura estymacji. Powstaje zatem pytanie: czy możliwe jest zmniejszenie liczności próby?

Przedstawimy teraz skróconą wersję procedury wielostopniowej. Jest to procedura heurystyczna, sprowadzona jedynie metodą symulacji cyfrowej i tylko dla przypadku rozkładu jednostajnego, o czym szerzej będzie powiedziane w punkcie 5.4. Pewne asymptotyczne własności tej procedury zostaną omówione w rozdziale 4 niniejszej pracy.

Ta nowa, skrócona wersja różni się od poprzedniej jedynie tym, że w i -tym kroku, $i = 1, 2, \dots, K'$, pobieramy próbę o liczności

$$N_1 = \inf \left\{ n \in \mathbb{N}: n \geq \frac{\ln \gamma}{\ln F(1 - \frac{d}{d + \hat{\theta}_{N'_1-1}})} - \left(1 + \sum_{j=1}^{i-1} N'_j \right) \right\}$$

zamiast $N_1(N'_0 = 1)$. Łatwo zauważyć, że całkowita liczba obserwacji jest mniejsza niż poprzednio i wynosi

$$(2.7) \quad N_S = 1 + \sum_{i=1}^{K'} N'_i \geq \inf \left\{ n \in \mathbb{N}: n \geq \frac{\ln \gamma}{\ln F(1 - \frac{d}{d + \hat{\theta}_{N'_{K'-1}}})} \right\},$$

gdzie $K' = \min \{ j \in \mathbb{N}: \hat{\theta}_{N'_j} \leq \hat{\theta}_{N'_{j-1}} \}$.

W przypadku gdy znamy parametr θ , wtedy

$$(2.8) \quad n_0 = \min \left\{ n \in \mathbb{N}: n \geq \frac{\ln \gamma}{\ln F(1 - \frac{d}{\theta})} \right\}$$

obserwacji zmiennej losowej o dystrybucji F_θ zapewnia nam spełnienie warunku $P_\theta \{ \theta - \hat{\theta}_{n_0} > d \} \leq \gamma$. Zatem wszystkie „rozsądne” procedury estymacji stałoprecyzyjnej powinny spełniać warunek $E_\theta N \geq n_0$.

Trudno jest wyznaczyć wartość oczekiwaną $E_\theta N_S$, można jednak znaleźć jej oszacowanie z góry. Aby tego dokonać, zauważmy najpierw, że ciąg

$$\frac{\ln \gamma}{\ln F(1 - \frac{d}{d + \hat{\theta}_{N'_i}})}, \quad i = 0, 1, \dots, K' - 1,$$

jest ciągiem niemalejącym, ograniczonym z góry przez $\frac{\ln \gamma}{\ln F(1 - \frac{d}{d+\theta})}$,
gdzie θ jest prawdziwą wartością nieznanego parametru. Niech

$$L = \begin{cases} \inf \left\{ i \leq K'-1 : \left[\frac{\ln \gamma}{\ln(F(1 - \frac{d}{d + \hat{\theta}_{N'_i}}))} \right] = \left[\frac{\ln \gamma}{\ln F(1 - \frac{d}{d+\theta})} \right] \right\}, \\ \text{jeżeli takie } i \text{ istnieje,} \\ K'-1, \quad \text{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

gdzie $[\]$ oznacza część całkowitą. W takim razie

$$1 + N'_1 + \dots + N'_{L+1} \leq \left[\frac{\ln \gamma}{\ln F(1 - \frac{d}{d+\theta})} \right] + 1$$

oraz $N'_{L+2} = N'_{L+3} = \dots = N'_{K'} = 1$, jeżeli $L < K'-1$.

Niech r będzie całkowitoliczbową zmienną losową określoną wzorem

$$r = \inf \left\{ m \in \mathbb{N} : X_m \geq X_{m+1} \right\},$$

gdzie $X_1, X_2, \dots$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowej dystrybucji F_θ . Otrzymujemy wówczas następujące oszacowanie:

$$E_\theta N_S \leq \left[\frac{\ln \gamma}{\ln F(1 - \frac{d}{d+\theta})} \right] + 1 + E_\theta r,$$

oczywiście

$$\begin{aligned}
 E_{\theta} r &= \sum_{n=1}^{\infty} P_{\theta} \{ r \geq n \} = \sum_{n=2}^{\infty} P_{\theta} \{ X_1 < \dots < X_n \} + 1 \leq \\
 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 1,
 \end{aligned}$$

co ostatecznie daje nam

$$(2.9) \quad E_{\theta} N_S \leq \left[\frac{\ln \gamma}{\ln F(1 - \frac{d}{d+\theta})} \right] + e.$$

3. PRZYPADEK ROZKŁADU SYMETRYCZNEGO

Zreferujemy teraz wynik przedstawiony w pracy [13]. Aby zrozumieć dobrze ideę tej metody, wyobraźmy sobie następującą sytuację. Nośnikiem rozkładu P_{θ} jest przedział o jednym końcu znanym i drugim nieznanym. Ten niezany koniec jest parametrem rozkładu, który chcemy estymować z zadaną precyzją. Rozważmy dwa ciągi estymatorów. Jeden szacujący znany koniec rozważanego przedziału i drugi szacujący parametr θ . Jeżeli dokonamy pewnych założeń dotyczących rozkładu P_{θ} (na przykład założymy symetrię), to możemy oczekiwać, że szybkość zbieżności estymatora szacującego znany koniec pozostaje w pewnym związku z szybkością zbieżności estymatora szacującego parametr θ .

DEFINICJA 3.1. Mówimy, że rodzina dystrybuant $\{F_{\theta}, \theta > 0\}$ należy do klasy dystrybuant $C(\alpha, p), \alpha > 0, p > 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy $(\forall \theta > 0) (\forall x \in (0, \frac{\theta}{\alpha+1}])$

$$(3.1) \quad 0 < F_{\theta}(\alpha x) \leq p(1 - F_{\theta}(\theta - x)).$$

W dalszym ciągu będziemy zakładali, że rodzina dystrybuant (1.1) należy do klasy $C(\alpha, p)$ dla pewnych ustalonych $\alpha, p > 0$. Zdefiniujmy ciąg momentów zatrzymania $(\tau_i, i \geq 0)$ w następujący sposób:

$$\tau_0 = 0,$$

$$\tau_{i+1} = \inf \{ n \in \mathbb{N} : \min(X_{\tau_i+1}, \dots, X_{\tau_i+n}) \leq \alpha d \} + \tau_i.$$

Ponadto, niech

$$k = \inf \left\{ n \in \mathbb{N} : \left(\frac{p}{p+1} \right)^n \leq \delta \right\}$$

oraz $\hat{\theta}_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Wtedy, prawdziwe jest następujące

TWIERDZENIE 3.1. Dla każdego $\theta > 0$ mamy

$$1^\circ \quad P_\theta \{ \tau_k < \infty \} = 1;$$

$$2^\circ \quad P_\theta \{ \theta - \hat{\theta}_{\tau_k} \leq d \} \geq 1 - \delta;$$

$$3^\circ \quad E_\theta \tau_k = \frac{k}{F_\theta(\alpha d+)};$$

$$4^\circ \quad V_\theta \tau_k = k \frac{1 - F_\theta(\alpha d+)}{[F_\theta(\alpha d+)]^2}.$$

D o w ó d. 1° , 2° i 3° jest natychmiastową konsekwencją tego, iż zmienne losowe $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \dots, \tau_k - \tau_{k-1}$ są niezależne o tym samym rozkładzie geometrycznym z parametrem $F_\theta(\alpha d+)$ w przy-

padku, gdy $F_{\theta}(\alpha d+) < 1$. Jeżeli $F_{\theta}(\alpha d+) = 1$, to $\tau_1 = \tau_2 - \tau_1 = \dots = \tau_k - \tau_{k-1} = 1$. Zauważmy, że z definicji klasy $C(\alpha, p)$ wynika, iż $F_{\theta}(\alpha d+) > 0$. Aby udowodnić 2^o, wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$Y_{i+1} = \max \{ X_{\tau_{i+1}}, \dots, X_{\tau_{i+1}} \}, i = 0, 1, 2, \dots, k-1.$$

Niezależność ciągu zmiennych losowych $X_1, X_2, \dots$ pociąga za sobą niezależność zmiennych losowych $Y_1, \dots, Y_k$. Oczywiście dla $i = 1, \dots, k$ mamy

$$P_{\theta} \{ Y_1 < \theta - d \} = P_{\theta} \{ \hat{\theta}_{\tau_1} < \theta - d \}.$$

Wykażemy najpierw, że

$$P_{\theta} \{ \hat{\theta}_{\tau_1} < \theta - d \} \leq \frac{p}{p+1}.$$

Istotnie, dla $\alpha d \geq \theta - d$ otrzymujemy $P_{\theta} \{ \hat{\theta}_n < \theta - d, \tau_1 = n \} = 0$ dla wszystkich $n \geq 2$, zatem

$$\begin{aligned} P_{\theta} \{ \hat{\theta}_{\tau_1} < \theta - d \} &= P_{\theta} \{ X_1 < \theta - d \} = F_{\theta} \{ \theta - d \} \leq \\ &\leq F_{\theta} \left(\theta - \frac{\theta}{\alpha + 1} \right) \leq \frac{p}{p+1}. \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność wynika z (3.1) dla $x = \frac{\theta}{\alpha + 1}$. Dla $\alpha d < \theta - d$, tzn. dla $d < \frac{\theta}{\alpha + 1}$, proste obliczenia dają nam

$$P \{ \hat{\theta}_{\tau_1} < \theta - d \} = \sum_{n=1}^{\infty} P_{\theta} \{ \hat{\theta}_n < \theta - d, \min(X_1, \dots, X_{n-1}) > \alpha d \}.$$

$$\begin{aligned} X_n \leq \alpha d \} &= \sum_{n=1}^{\infty} [F_{\theta}(\theta - d) - F(\alpha d+)]^{n-1} F_{\theta}(\alpha d+) = \\ &= \frac{F_{\theta}(\alpha d+)}{1 - F_{\theta}(\theta - d) + F_{\theta}(\alpha d+)} \leq \frac{p}{p+1}. \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\begin{aligned} P_{\theta} \{ \hat{\theta}_{\tau_k} < \theta - d \} &= P_{\theta} \left\{ \max_{1 \leq i \leq k} Y_i < \theta - d \right\} = \\ &= \prod_{i=1}^k P_{\theta} \{ Y_i < \theta - d \} \leq \left(\frac{p}{p+1} \right)^k \leq \gamma. \end{aligned}$$

U w a g a 1. Klasa $C(1,1)$ zawiera wszystkie rozkłady symetryczne względem środka przedziału $[0, \theta]$, tzn. takie, dla których dystrybuanta $F_{\theta}(x) = 1 - F_{\theta}((\theta - x)_{+})$ dla każdego x .

U w a g a 2. Jeżeli mamy dwie rodziny dystrybuant $\{F_{\theta}, \theta > 0\}$ i $\{G_{\theta}, \theta > 0\}$ takie, że dla każdego $\theta > 0$ oraz dla każdego $x \in \mathbb{R}$ $F_{\theta}(x) \leq G_{\theta}(x)$, to warunek $\{G_{\theta}, \theta > 0\} \in C(\alpha, p)$ pociąga za sobą $\{F_{\theta}, \theta > 0\} \in C(\alpha, p)$.

U w a g a 3. Jeżeli dla wszystkich $\alpha, p > 0$ $\{F_{\theta}, \theta > 0\} \notin C(\alpha, p)$, ale istnieje $r \in \mathbb{N}$ takie, że dla pewnych α_0 i p_0 $\{F_{\theta}^r, \theta > 0\} \in C(\alpha_0, p_0)$, to można estymować parametr θ , obserwując wartości zmiennej losowej $Y = \max(X_1, \dots, X_r)$, której nośnik także zawarty jest w przedziale $[0, \theta]$.

4. ASYMPTOTYCZNE PRZEDZIAŁY UFNOŚCI

Zanim przejdziemy do omówienia najlepiej poznanego, jak do tej pory, przypadku estymacji parametru θ w rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, \theta]$, poświęcimy nieco miejsca na przedstawienie koncepcji asymptotycznych przedziałów ufności o zadanej precyzji. W dalszym ciągu będziemy używali jedynie estymatora (2.3).

DEFINICJA 4.1. Reguła zatrzymania $\tau = \tau(d, \gamma)$ jest asymptotycznie zgodna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(4.1) \quad \lim_{d \rightarrow 0} P_{\theta} \{ \theta - \hat{\theta}_{\tau} > d \} \leq \gamma \quad \forall \theta > 0.$$

Dla odróżnienia, gdy spełniony jest warunek (1.3) mówimy o ścisłej zgodności.

Niech $n_0(d, \gamma, \theta)$ będzie najmniejszą liczbą naturalną taką, że

$$P_{\theta} \{ \theta - \hat{\theta}_{n_0} > d \} \leq \gamma \quad \forall \theta > 0.$$

DEFINICJA 4.2. Mówimy, że reguła zatrzymania $\tau = \tau(d, \gamma)$ jest asymptotycznie efektywna, jeżeli

$$(4.2) \quad \lim_{d \rightarrow 0} \frac{E_{\theta} \tau}{n_0} = 1 \quad \forall \theta > 0.$$

Właśnie te dwa pojęcia: asymptotycznej zgodności oraz asymptotycznej efektywności leżą u podstaw koncepcji stałoprecyzyjnej estymacji zapoczątkowanej pracą Chowa i Robbinsa [4], następnie rozwijanej przez bardzo wielu autorów (patrz [7], [16]). Asympto-

tyczna teoria jest bardzo atrakcyjna z uwagi na możliwość wykorzystania centralnego twierdzenia granicznego dla losowo indeksowanych ciągów zmiennych losowych ([1]). Jednakże w praktyce bardziej przydatne są reguły ściśle zgodne.

Przedstawimy teraz wyniki pracy [6], pozwalające wyznaczyć asymptotycznie zgodną i asymptotycznie efektywną regułę zatrzymywania dla pewnej klasy rozkładów ciągłych, określonych na przedziale $(a, \theta]$, $a \in \mathbb{R}$, przy czym a nie musi być skończone, jak do tej pory. Dopuszczalny jest przypadek, gdy $a = -\infty$. Zakładamy jedynie, że dla wszystkich $\theta \in \mathbb{R}$ oraz małych $d > 0$

$$(4.3) \quad F_{\theta}(\theta - d) = 1 - (c_{\theta} + \varepsilon_d) d,$$

gdzie $c_{\theta} > 0$, oraz

$$(4.4) \quad \lim_{d \rightarrow 0} \varepsilon_d = 0.$$

Z (4.3) wynika, że

$$(4.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta} \left\{ \hat{\theta}_n - \theta < x \frac{1}{c_{\theta} n} \right\} = \begin{cases} e^x & \text{dla } x \leq 0, \\ 1 & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

Założmy, że znamy wartość $F_{\theta}(\theta - d)$. Dla małych $d > 0$ oraz dużych n możemy przyjąć

$$P_{\theta} \{ \theta - \hat{\theta}_n > d \} \approx e^{-dnc_{\theta}} \approx e^{-n(1-F_{\theta}(\theta - d))}.$$

Zdefiniujmy $n_0 = n_0(d, \gamma, \theta)$ jako

$$(4.6) \quad n_0 = \inf \left\{ n \in \mathbb{N}: n \geq \frac{-\ln \gamma}{1 - F_\theta(\theta - d)} \right\}.$$

Z (4.4) wynika, że $\lim_{d \rightarrow 0} c_\theta n_0 d \geq -\ln \gamma$. Tym samym otrzymujemy

$$(4.7) \quad \lim_{d \rightarrow 0} P_\theta \{ \hat{\theta}_{n_0} \leq \theta \leq \hat{\theta}_{n_0} + d \} \geq 1 - \gamma.$$

Założmy teraz, że wartość $F_\theta(\theta - d)$ jest nieznana, a jako jej oszacowanie przyjmiemy wartość dystrybuanty empirycznej

$$F_n(\hat{\theta}_n - d) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I \{ X_i < \hat{\theta}_n - d \},$$

gdzie $I\{A\}$ oznacza funkcję charakterystyczną zbioru A .

Rozważmy następującą regułę zatrzymania $N = N(d, \gamma)$

$$(4.8) \quad N = \inf \left\{ n \in \mathbb{N}: n \geq \frac{-\ln \gamma}{1 - F_n(\hat{\theta}_n - d)} \right\},$$

tzn.

$$(4.8') \quad N = \inf \left\{ n \in \mathbb{N}: \sum_{i=1}^n I \{ X_i \geq \hat{\theta}_n - d \} \geq -\ln \gamma \right\},$$

oraz przedział ufności dla parametru θ postaci

$$(4.9) \quad I_N = [\hat{\theta}_N, \hat{\theta}_N + d].$$

Prawdziwe jest następujące

TWIERDZENIE 4.1. Dla każdego θ

- 1° $P_\theta \{N < \infty\} = 1$ oraz $E_\theta N < \infty$,
- 2° $\lim_{d \rightarrow 0} N = \infty$ p.w. oraz $\lim_{d \rightarrow 0} E_\theta N = \infty$,
- 3° $\lim_{d \rightarrow 0} \frac{N}{n_0} = 1$ p.w.,
- 4° $\lim_{d \rightarrow 0} P_\theta \{\theta \in I_n\} = 1 - \gamma$ (asymptotyczna zgodność),
- 5° $\lim_{d \rightarrow 0} \frac{E_\theta N}{n_0} = 1$ (asymptotyczna efektywność).

D o w ó d. 1° Oznaczmy przy $Y_i = I\{X_i > \theta - d\}$, $i = 1, 2, \dots$. Wówczas $(Y_i, i \geq 1)$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie dwupunktowym

$$P\{Y_i = 1\} = p = p(d) = 1 - P\{Y_i = 0\} = 1 - F_\theta(\theta - d).$$

Zauważmy, że

$$Z_n = \sum_{i=1}^n I\{X_i \geq \theta_n - d\} = \sum_{i=1}^n I\{\theta - d \geq X_i \geq \theta_n - d\} + S_n,$$

gdzie $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. Zatem $N \leq N_1 = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n \geq a\}$, gdzie

$a = -\ln \gamma$. Oczywiście $E_\theta N_1 < \infty$, a stąd $E_\theta N < \infty$.

Teza 2° wynika bezpośrednio z definicji reguły zatrzymania N oraz z twierdzenia o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki.

3° Najpierw wykazemy, że $F_n(\hat{\theta}_n - d)$ jest mocno zgodnym estymatorem wartości $F_\theta(\theta - d)$. Istotnie

$$\begin{aligned}
& |F_n(\hat{\theta}_n - d) - F_\theta(\theta - d)| \leq |F_n(\hat{\theta}_n - d) - F_\theta(\hat{\theta}_n - d)| + \\
& + |F_\theta(\hat{\theta}_n - d) - F_\theta(\theta - d)| \leq \\
& \leq \sup_x |F_n(x) - F_\theta(x)| + |F_\theta(\hat{\theta}_n - d) - F_\theta(\theta - d)| \rightarrow 0 \text{ p.w.}
\end{aligned}$$

Pierwszy składnik zbiega p.w. do zera z twierdzenia Gliwienki, natomiast zbieżność drugiego wynika z ciągłości dystrybuanty F_θ oraz mocnej zgodności estymatora $\hat{\theta}_n$. Stąd otrzymujemy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - F_\theta(\theta - d)}{1 - F_n(\hat{\theta}_n - d)} = 1 \text{ p.w..}$$

Z lematu 1 w [4] (także lemat 10.10.1 w [16]) dla $f(n) = n$,

$$V_n = \frac{1 - F_\theta(\theta - d)}{1 - F_n(\hat{\theta}_n - d)} \text{ oraz } t = \frac{-\ln \gamma}{1 - F_\theta(\theta - d)}, \text{ otrzymujemy}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N}{t} = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{N}{n_0} = 1 \text{ p.w. .}$$

4° Ciąg $(\hat{\theta}_n, n \geq 1)$ spełnia warunek Anscombe'a jednostajnej ciągłości według prawdopodobieństwa (tw. 6 w [1]), ponadto z 3° mamy $\lim_{d \rightarrow 0} \frac{N}{n_0} = 1$ p.w., co razem z (4.7), na podstawie twierdzenia Anscombe'a (tw. 1 w [1], także tw. 10.10.5 w [16]) daje nam asymptotyczną zgodność reguły zatrzymania N .

5° Ponieważ z 3° $\frac{N}{n_0} \rightarrow 1$ z prawdopodobieństwem 1 przy $d \rightarrow 0$, wystarczy wykazać, że rodzina $\left\{ \frac{N}{n_0}, d > 0 \right\}$ jest jednostajnie

całkowalna. Z uwagi na definicję n_0 (4.6) jest to równoważne jednostajnej całkowalności rodziny

$$\{pN, p \in (0, 1)\}.$$

Korzystając z kryterium jednostajnej całkowalności de la Vallée-Poussina ([18], tw. II.22) oraz z faktu, iż $N \leq N_1$, wystarczy wykazać, że

$$\sup_{p \in (0,1)} E_{\theta} \{p^2 N_1^2\} < \infty \quad \text{dla każdego } \theta.$$

Zauważmy, że z definicji reguły zatrzymania N_1

$$S_{N_1} = \begin{cases} a & \text{dla } a \text{ całkowitego,} \\ [a] + 1 & \text{dla pozostałych } a. \end{cases}$$

Ponadto z tożsamości Walda mamy

$$E_{\theta} S_{N_1} = p E_{\theta} N_1$$

oraz

$$E_{\theta} \{S_{N_1} - N_1 p\}^2 = p(1-p) E_{\theta} N_1.$$

Zatem

$$p^2 E_{\theta} N_1^2 = \begin{cases} a(1-p) + a^2 & \text{dla } a \text{ całkowitych,} \\ ([a] + 1)(1-p) + ([a] + 1)^2 & \text{dla pozostałych } a, \end{cases}$$

a stąd wynika, że

$$\sup_{p \in (0,1)} E_{\theta} \{p^2 N^2\} < \infty$$

dla każdego θ i tym samym $\lim_{d \rightarrow 0} \frac{E_{\theta} N}{n_0} = 1$.

Powróćmy na chwilę do przypadku rozkładu z parametrem skali, rozważanego w rozdziale 2 oraz skróconej procedury wielostopniowej wyznaczonej regułą zatrzymania N_S (2.7). Jeżeli ograniczymy się jedynie do rozkładów prawdopodobieństwa spełniających warunek (4.3), to jako wniosek z twierdzenia 4.1 otrzymujemy asymptotyczną zgodność i asymptotyczną efektywność reguły zatrzymania N_S . Istotnie, z określenia (2.7) wynika, że dla

$$(4.10) \quad \tau_F = \inf \left\{ n \geq 1: n \geq \frac{\ln \gamma}{\ln F(1 - \frac{d}{d + \hat{\theta}_n})} \right\}$$

prawdziwa jest nierówność

$$N_S \geq \tau_F,$$

co razem z monotonicznością ciągu estymatorów $\hat{\theta}_n$ daje nam

$$P_{\theta} \{ \theta - \hat{\theta}_{N_S} > d \} \leq P_{\theta} \{ \theta - \hat{\theta}_{\tau_F} > d \}.$$

Niech $n_F = n_F(d, \gamma, \theta)$ będzie zdefiniowane wzorem

$$n_F = \inf \left\{ n \geq 1: n \geq \frac{\ln \gamma}{\ln F(1 - \frac{d}{d+\theta})} \right\}.$$

Wówczas z (4.3) otrzymujemy

$$\lim_{d \rightarrow 0} c_\theta n_F d = \lim_{d \rightarrow 0} c_\theta d \frac{\ln \gamma}{\ln(1 - (c_\theta + \varepsilon_d) \frac{d}{d+\theta})} = -\ln \gamma,$$

a co za tym idzie, tak jak w (4.7), mamy

$$\lim_{d \rightarrow 0} P_\theta \left\{ \hat{\theta}_{n_F} \leq \theta \leq \hat{\theta}_{n_F} + d \right\} \geq 1 - \gamma.$$

Powtarzając rozumowanie z tw. 4.1, otrzymujemy asymptotyczną zgodność oraz asymptotyczną efektywność reguły zatrzymania τ_F . Zauważmy, że asymptotyczna efektywność N_S wynika z relacji (2.9) oraz z tego, że

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{n_F}{n_0} = 1.$$

Ponadto mamy $E_\theta N_S - n_F \leq e - 1$.

5. PRZYPADEK ROZKŁADU JEDNOSTAJNEGO NA PRZEDZIALE $[0, \theta]$

Problem estymacji parametru θ w rozkładzie $U(0, \theta)$ jest problemem bardzo dobrze poznanym (patrz np. [5], [8], [10], [12]). Nawet

w przypadku estymacji stałoprecyzyjnej od dość dawna znane są przykłady procedur dwustopniowych. Ponadto wszystkie dotychczas opisane w pracy metody estymacji, można wykorzystać do szacowania parametru θ w rozkładzie jednostajnym. Daje to nam możliwość porównania tych metod. Kryterium służącym do oceny będzie wartość oczekiwana wielkości próby potrzebnej do konstrukcji przedziału ufności o zadanej z góry szerokości. W kolejnych punktach tego rozdziału przedstawimy poszczególne procedury estymacji oraz ich porównanie, a także przedstawimy próbę wyznaczenia optymalnej reguły zatrzymania, optymalnej w sensie minimalnej wartości oczekiwanej liczności próby.

5.1. Dwustopniowa procedura oparta na nierówności Czebyszewa

Idea tej metody została przedstawiona w punkcie 2.1. Jako estymator parametru θ przyjmujemy estymator nieobciążony oparty na minimalnej statystyce dostatecznej

$$\hat{t}_n = \frac{n+1}{n} \max(X_1, \dots, X_n).$$

Wariancja tego estymatora przy ustalonym n jest następująca

$$\sigma^2(\theta, n) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}.$$

Ponadto, dla $m \geq 3$

$$\hat{g}_m = \frac{m-2}{m} [\max(X_1, \dots, X_m)]^{-2}$$

jest nieobciążonym estymatorem parametru θ^{-2} . Stąd wynika, że funkcję liczności drugiej próby n można zdefiniować w następujący sposób:

$$(5.1) \quad n(x_1, \dots, x_m) = \inf \left\{ n \in \mathbb{N} : n \geq \sqrt{1 + \frac{m(\max(x_1, \dots, x_m))^2}{(m-2)\delta^2}} - 1 \right\}.$$

Wówczas

$$\left[\frac{n+1}{n} \max(x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) - d, \frac{n+1}{n} \max(x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) + d \right]$$

jest przedziałem ufności dla parametru θ na poziomie ufności $1 - \delta$. W tabelach 1-3 podano za [8] wartości oczekiwane $E_\theta \{n(x_1, \dots, x_m)\}$ dla $m = 5, 20, 50$ oraz $\delta = 0.1, 0.05, 0.01$.

5.2. Optymalna procedura dwustopniowa Graybilla i Connella

Z uwagi na to, że żaden z estymatorów parametru θ , będących funkcją minimalnej statystyki dostatecznej nie jest lepszy, w sensie minimalizacji prawdopodobieństwa (1.3), a dla $\hat{\theta}_n$ (2.3) prawdziwa jest zawsze nierówność $\hat{\theta}_n \leq \theta$, wygodniej jest używać jako estymatora - maksimum z próby niż estymator nieobciążony $\hat{t}_n$. Dlatego też, w dalszym ciągu będziemy stosować jedynie $\hat{\theta}_n$.

Pomysł metody opisanej w pracy [8] polega na tym, aby w wyrażeniu

$$(5.2) \quad N_0 = \inf \left\{ n \in \mathbb{N} : n \geq \frac{\ln \delta}{\ln(1 - \frac{d}{\theta})} \right\},$$

które jest licznością próby zapewniającej po raz pierwszy spełnienie warunku $P_{\theta} \{ \theta - \hat{\theta}_n > d \} \leq \gamma$ w przypadku znanego θ , parametr θ zastąpić wartością estymatora uzyskaną z próby wstępnej o licznosci m . Jako funkcję licznosci drugiej próby przyjęto

$$n_d = n_d(x_1, \dots, x_m) = \inf \left\{ i \in \mathbb{N} : i \geq \frac{\ln \gamma}{\ln \left[1 - \frac{b(m, \gamma) d}{\max(x_1, \dots, x_m)} \right]} \right\},$$

gdzie $b(m, \gamma) \leq 1$.

Udowodniono, że istnieje taka największa funkcja $b = b(m, \gamma)$ niezależna od θ , że $[\hat{\theta}_{n_d}, \hat{\theta}_{n_d} + d]$ jest przedziałem ufności na poziomie ufności $1 - \gamma$. Funkcja b spełnia następujące równanie:

$$\frac{b^m(m+1)}{m+1} + \int_b^1 \gamma \frac{z}{b} m z^{m-1} dz = \gamma.$$

Wartość oczekiwana licznosci drugiej próby dla tej metody jest znacznie mniejsza niż dla metody opartej na nierówności Czebysze-wa. Szczegółowe wyniki, porównania oraz tablice funkcji $b(m, \gamma)$ dla różnych wartości m i γ można znaleźć w [8] (także w [7]). (Patrz tabele 1-3.)

5.3. Procedura sekwencyjna

Wyniki rozdziału 3 mogą być w pełni wykorzystane przy konstrukcji przedziału ufności dla przypadku $U(0, \theta)$. Łatwo zauważyć, że rodzina rozkładów jednostajnych jest zawarta w klasie $C(\alpha, \alpha)$ dla każdego $\alpha > 0$ (3.1). Ponadto, dowolność doboru α daje nam możli-

wość wyboru k w regule zatrzymania τ_k . Jeżeli

$$\alpha = p = \frac{\sqrt[k]{\delta}}{1 - \sqrt[k]{\delta}},$$

to dla wszystkich $\theta > 0$ z twierdzenia 3.1 wynika, że

$$P_{\theta} \left\{ \hat{\theta}_{\tau_k} \leq \theta - d \right\} \leq \left(\frac{p}{p+1} \right)^k = \delta,$$

przy czym ostra nierówność zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{\sqrt[k]{\delta}}{1 - \sqrt[k]{\delta}} d > \theta - d, \quad \text{czyli} \quad \frac{d}{1 - \sqrt[k]{\delta}} > \theta.$$

Przy tak dobranej wartości parametru α , reguła zatrzymania τ_k ma wartość oczekiwaną

$$E_{\theta} \tau_k = k \max \left\{ 1, \frac{\theta}{d} \cdot \frac{1 - \sqrt[k]{\delta}}{\sqrt[k]{\delta}} \right\}$$

oraz wariancję

$$V_{\theta} \tau_k = E_{\theta} \tau_k \left(\frac{E_{\theta} \tau_k}{k} - 1 \right).$$

Ponieważ funkcja $\varphi(k) = k \frac{1 - \sqrt[k]{\delta}}{\sqrt[k]{\delta}}$ jest malejąca, więc wartość

oczekiwana $E_{\theta} \tau_k$ osiąga swoje minimum, przy ustalonym stosunku $\frac{d}{\theta}$, jeśli

$$\frac{\theta}{d} \frac{1 - k\sqrt{\gamma}}{k\sqrt{\gamma}} = 1.$$

Stąd otrzymujemy oszacowanie od dołu na wartość oczekiwaną

$$E_{\theta} \tau_k \geq - \frac{\ln \gamma}{\ln(1 + \frac{d}{\theta})} = M \quad \text{dla każdego } k.$$

Na zakończenie zauważmy, że nie istnieje takie k , które minimalizowałoby wartość oczekiwaną $E_{\theta} \tau_k$ jednostajnie względem θ . Można tego dokonać jedynie dla wybranych wartości $\frac{d}{\theta}$. Wartość M jest mniejsza od łącznej wielkości próby w optymalnej procedurze dwustopniowej 5.2. Fakt ten został zilustrowany w tabelach 1-3.

5.4. Skrócona procedura wielostopniowa

Dystrybuenta rozkładu jednostajnego spełnia warunek (4.3). Istotnie

$$F_{\theta}(\theta - d) = 1 - \frac{1}{\theta} d \quad \text{dla} \quad d \leq \theta.$$

Zatem reguła zatrzymania N_S jest asymptotycznie zgodna i asymptotycznie efektywna. Ponadto, dla wybranych wartości $\frac{d}{\theta}$, przeprowadzono symulację tej procedury. Uzyskane wartości $\hat{\gamma}$ estymatorów prawdopodobieństwa nie pokrycia przez przedział $[\hat{\theta}_{N_S}, \hat{\theta}_{N_S} + d]$ prawdziwej wartości parametru θ mieszczą się w 95% przedziałach ufności. Ciekawą własnością tej procedury jest to, że wariancja

$V_{\theta} N_S$ jest wielkością bardzo małą. Odpowiednie wyniki zestawiono w tabelach 1-3.

Mała wariancja liczności próby, pozytywne wyniki symulacji oraz asymptotyczna zgodność uzasadniają stosowanie tej procedury w praktyce. Jednakże najważniejsze jest to, że zapewnia ona przedział ufności o szerokości d przy średnio najmniejszej liczności próby w porównaniu ze wszystkimi innymi, znanymi procedurami.

5.5. Porównanie metod estymacji

W tabelach 1-3 są przedstawione odpowiednie wartości oczekiwane prób gwarantujących stałoprecyzyjną estymację paramteru θ w rozkładzie jednostajnym $U(0, \theta)$ dla wybranych wielkości stosunku $\frac{d}{\theta}$ oraz dla poziomów ufności 0.9, 0.95, 0.99.

W tabelach nie umieszczono wartości oczekiwanej liczności próby dla procedury opartej na nierówności Czebyszewa z uwagi na to, iż jest ona znacznie gorsza od procedury 5.2. Porównanie obu tych metod można znaleźć w pracy [8] (także w [7]).

W tabelach umieszczono następujące wielkości:

- 1 - wybrane wielkości stosunku $\frac{d}{\theta}$;
- 2 - wielkość N_0 (5.2);
- 3 - wartości oczekiwane $E_{\theta} n_b$ liczności drugiej próby dla dwustopniowej procedury 5.2 dla $m = 5, 20, 50$ (na podstawie pracy [8]);
- 4 - ograniczenia dolne M dla wartości oczekiwanej w procedurze sekwencyjnej 5.3;
- 5 - wartości oczekiwane $E_{\theta} \tau_k$ w procedurze sekwencyjnej 5.3 dla wybranych wartości k ;
- 6 - wartości oczekiwane E liczności próby w skróconej procedurze

wielostopniowej, wariancje V tych licznosci oraz zaobserwowane w symulacji wartości estymatorów $\hat{\theta}$ prawdopodobieństwa nie pokrycia przez przedział ufności prawdziwej wartości parametru θ - wszystkie te wielkości uzyskano na drodze symulacji tysiąca historii procesów estymacji.

5.6. Problem wyznaczenia optymalnej reguły zatrzymania

Problem stałoprecyzyjnej estymacji parametru θ w rozkładzie jednostajnym $U(0, \theta)$ wydaje się na tyle prosty, że naturalne staje się pytanie, czy istnieje taka ściśle zgodna reguła zatrzymania τ^* , że wartość oczekiwana $E_{\theta} \tau^*$ jest najmniejsza dla wszystkich reguł ściśle zgodnych. Oczywiście klasa wszystkich reguł zatrzymania jest bardzo obszerna. Dlatego też w dalszych rozważaniach ograniczymy się jedynie do reguł niezrandomizowanych, opartych na minimalnej statystyce dostatecznej postaci

$$(5.3) \quad N = \inf \{ n \geq 1: \hat{\theta}_n \in Z_n \},$$

gdzie $(Z_n, n \geq 1)$ jest pewnym ciągiem zbiorów. Ponieważ parametr θ w rozkładzie jednostajnym $U(0, \theta)$ jest parametrem skali, więc rozsądne wydaje się założenie niezmienniczości reguły zatrzymania ze względu na zmianę skali.

ZAŁOŻENIE 1. Jeżeli $\frac{d}{\theta} = \frac{d'}{\theta'}$, to

$$P_{\theta} \{ N(d, \gamma) = n \} = P_{\theta'} \{ N(d', \gamma) = n \}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ponadto, ze względu na monotoniczność ciągu estymatorów $\hat{\theta}_n$,

ograniczymy się do reguł zatrzymania $N(d, \gamma)$ spełniających

ZAŁOŻENIE 2. Dla wszystkich $d < d'$

$$P_0 \{N(d, \gamma) \leq n\} \leq P_0 \{N(d', \gamma) \leq n\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Nietrudno wykazać, że bez straty ogólności, przy założeniach 1 i 2, klasę reguł zatrzymania (5.1) można ograniczyć do reguł, w których zbiory Z_n są przedziałami postaci $[0, d a_n]$, $a_n \in \mathbb{R}_+$.

DEFINICJA 5.1. Mówimy, że reguła zatrzymania $\sigma \in C$ wtedy i tylko wtedy, gdy można ją przedstawić w postaci

$$(5.4) \quad \sigma = \inf \{n \in \mathbb{N}: \hat{\theta}_n \leq d a_n\},$$

gdzie $(a_n, n \geq 1)$ jest dowolnym, niemalejącym, rozbieżnym do nieskończoności $(a_n \nearrow \infty)$ ciągiem nieujemnych liczb rzeczywistych.

U w a g a 1. Założenie monotoniczności nie powoduje zawężenia klasy reguł zatrzymania postaci (5.4). Istotnie, zauważmy, że ciąg $(b_n, n \geq 1)$, gdzie $b_n = \max \{a_1, \dots, a_n\}$, jest niemalejący i wyznacza tę samą regułę zatrzymania co $(a_n, n \geq 1)$. Co więcej, założenie monotoniczności daje nam jednoznaczność przedstawienia reguły σ . W dalszym ciągu będziemy je ze sobą utożsamiali,

$$\sigma \equiv (d a_n, n \geq 1).$$

U w a g a 2. Warunek $a_n \nearrow \infty$ jest równoważny założeniu skończoności z prawdopodobieństwem 1 reguły zatrzymania σ , tzn.

$$P_0 \{\sigma < \infty\} = 1 \quad \text{dla wszystkich } \theta > 0.$$

W klasie C wyróżnimy podklasę reguł ściśle zgodnych.

DEFINICJA 5.2. Mówimy, że reguła zatrzymania $\sigma \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma \in C$ oraz

$$(5.5) \quad P_{\theta} \{ \theta - \hat{\theta}_{\sigma} > d \} \leq \gamma$$

dla wszystkich $\theta > 0$.

LEMAT 5.1. Klasa D jest niepusta.

D o w ó d. Nietrudno sprawdzić, że reguła zatrzymania

$$\sigma_0 \equiv (a_n^0 d, n \geq 1) \equiv \left(\frac{n\sqrt{A} d}{n\sqrt{n^2} - n\sqrt{A}}, n \geq 1 \right),$$

gdzie $A = \frac{6\gamma}{\pi^2}$, należy do klasy D. Ponieważ $\frac{n\sqrt{A}}{n\sqrt{n^2} - n\sqrt{A}} \nearrow 1$, więc $\sigma_0 \in C$. Z definicji klasy C wynika, że $\hat{\theta}_{\sigma_0} \leq d a_{\sigma_0}^0$. Zatem

$$\begin{aligned} P_{\theta} \{ \theta - \hat{\theta}_{\sigma_0} > d \} &= \sum_{n=1}^{\infty} P_{\theta} \{ \theta - \hat{\theta}_n > d, \sigma_0 = n \} \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} P_{\theta} \left\{ \theta - \hat{\theta}_n > d \frac{\hat{\theta}_n}{d a_n^0}, \sigma_0 = n \right\} \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} P_{\theta} \left\{ \theta - \hat{\theta}_n > \frac{\hat{\theta}_n}{a_n^0} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} P_{\theta} \left\{ \hat{\theta}_n \leq \frac{a_n^0}{a_n^0 + 1} \theta \right\} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n^0}{a_n^0 + 1} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n^2} = \gamma \end{aligned}$$

dla wszystkich $\theta > 0$.

LEMAT 5.2. Niech $\tau' \equiv (d b_n, n \geq 1) \in C$ oraz istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że dla wszystkich wartości parametru $\theta \leq d(b_k + 1)$ mamy $P_\theta \{ \theta - \hat{\theta}_{\tau'} > d \} \leq \gamma$. Wtedy, w klasie D istnieje reguła zatrzymania $\tau'' \equiv (d a_n, n \geq 1)$ taka, że

$$(5.6) \quad a_i = b_i \quad \text{dla } i \leq k.$$

D o w ó d. Niech $a_i = b_i$ dla $i \leq k$. Zauważmy, że $\theta \leq d(b_k + 1)$ $P_\theta \{ \theta - \hat{\theta}_{\tau'} > d, \tau' > k \} = 0$, a zatem $P_\theta \{ \theta - \hat{\theta}_{\tau'} > d \}$ nie zależy od wyrazów ciągu $(d b_j, j \geq k + 1)$.

Rozważmy przypadek, gdy $\theta > d(b_k + 1)$. Niech dla $r = 0, 1, 2, \dots$ $s_r \equiv (d e_i, i \geq 1) \in C$, gdzie

$$e_i = \begin{cases} a_i & \text{dla } i \leq k, \\ a_k & \text{dla } k+1 \leq i \leq k+r, \\ b_i & \text{dla } k+r+1 \leq i. \end{cases}$$

Wówczas

$$\begin{aligned} P_\theta \{ \theta - \hat{\theta}_{s_r} > d, s_r \leq k \} &= \sum_{j=1}^k P_\theta \{ \theta - \hat{\theta}_j > d, s_r = j \} = \\ &= \sum_{j=1}^k P_\theta \{ \hat{\theta}_j < \theta - d, \hat{\theta}_1 > da_1, \dots, \hat{\theta}_{j-1} > da_{j-1}, \hat{\theta}_j \leq da_j \} = \\ &= \sum_{j=1}^k \theta^{-j} \int_{\{(x_1, \dots, x_j) \in C_j(a_1, \dots, a_j)\}} \dots \int dx_1 \dots dx_j = \sum_{j=1}^k \theta^{-j} |C_j| > 0, \end{aligned}$$

przy $\theta \rightarrow \infty$. $C_j(a_1, \dots, a_j)$ jest tutaj podzbiorem kostki $\prod_{i=1}^j [0, d a_j]$, a $|C_j|$ jego miarą Lebesgue'a. Oczywiście dla $\theta = d a_k + 1$ mamy

$$\begin{aligned} P_\theta \{ \theta - \hat{\theta}_{s_r} > d \} &= P_{d(a_k+1)} \{ d(a_k + 1) - \hat{\theta}_{s_r} > d, s_r \leq k \} = \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{|C_j|}{(d(a_k + 1))^j} \leq \gamma. \end{aligned}$$

Zatem dla wszystkich $\theta > d(a_k + 1)$

$$\sum_{j=1}^k \frac{|C_j|}{\theta^j} \leq \frac{1}{\theta} \sum_{j=1}^k \frac{|C_j|}{(d(a_k + 1))^{j-1}} \leq \frac{\gamma d(a_k + 1)}{\theta}.$$

Podobnie otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} P_\theta \{ \theta - \hat{\theta}_{s_r} > d, s_r > k \} &= \\ &= \sum_{j=k+r+1}^{\infty} P_\theta \{ \hat{\theta}_j < \theta - d, \hat{\theta}_1 > d a_1, \dots, \hat{\theta}_k > d a_k, \hat{\theta}_{k+r+1} > d b_{k+r+1}, \dots \\ &\quad \dots, \hat{\theta}_{j-1} > d b_{j-1}, \hat{\theta}_j \leq d b_j \} \leq \\ &\leq \sum_{j=k+r+1}^{\infty} P_\theta \{ \hat{\theta}_j < \theta - d, \exists i \leq k \ X_i > d a_k \} \leq \\ &\leq \sum_{j=k+r+1}^{\infty} \left(\frac{\theta - d}{\theta} \right)^{j-1} \binom{k}{1} \frac{\theta - d(a_k + 1)}{\theta} = \end{aligned}$$

$$= k \frac{\theta - d(a_k + 1)}{d} \left(\frac{\theta - d}{\theta} \right)^{k+r}.$$

W konsekwencji otrzymujemy następujące oszacowanie:

$$P_\theta \{ \theta - \hat{\theta}_{s_r} > d \} \leq \frac{\gamma d(a_k + 1)}{\theta} + k \frac{\theta - d(a_k + 1)}{d} \left(\frac{\theta - d}{\theta} \right)^{k+r}$$

dla wszystkich $\theta > d(a_k + 1)$.

Rozważmy funkcję

$$h(\theta) = \frac{\gamma d(a_k + 1)}{\theta} + k \frac{\theta - d(a_k + 1)}{d} \left(\frac{\theta - d}{\theta} \right)^{k+r}.$$

Oczywiste jest, że istnieją takie liczby $r \in \mathbb{N}$ i $\delta > 0$, że dla dowolnego θ spełniającego warunek $d(a_k + 1) < \theta \leq d(a_k + 1 + \delta)$ mamy $h(\theta) < \gamma$. Przyjmijmy

$$(5.7) \quad a_k = a_{k+1} = \dots = a_{k+r} = b_k \quad \text{oraz} \quad a_{k+r+1} = b_k + \delta$$

oraz $\gamma' = h(d(a_{k+r+1} + 1)) < \gamma$. W dowodzie lematu 5.1 wykazano, że ciąg wyznaczający regułę zatrzymania σ_0 spełnia warunek

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{a_i^0}{a_i^0 + 1} \right)^i = \gamma.$$

Zdefiniujmy ciąg a_i dla $i \geq k+r+2$ w następujący sposób:

$$(5.8) \quad a_{k+r+2} = a_{k+r+3} = \dots = a_{m-1} = b_k + \sigma$$

oraz

$$(5.9) \quad a_j = a_j^0 \quad \text{dla } j \geq m,$$

gdzie

$$m = \inf \left\{ n \geq k+r+1: \sum_{i=n}^{\infty} \left(\frac{a_1^0}{a_1^0 + 1} \right)^i < \gamma - \gamma', a_n^0 \geq b_k + \sigma \right\}.$$

Wykażemy, że reguła zatrzymania $\tau'' \equiv (a_n, n \geq 1)$ zdefiniowana równościami (5.6), (5.7), (5.8) i (5.9) jest ściśle zgodna, tzn. $\tau'' \in D$. Istotnie, dla $\theta \leq d(a_{k+r+1} + 1)$ wynika to z konstrukcji τ'' , gdyż prawdopodobieństwo $P_\theta \{ \theta - \theta_{\tau''} > d \}$ nie zależy od ciągu $(a_j, j \geq k+r+1)$. Natomiast dla $\theta > d(a_{k+r+1} + 1)$ mamy

$$\begin{aligned} P_\theta \{ \theta - \hat{\theta}_{\tau''} > d \} &= P_\theta \{ \theta - \hat{\theta}_{\tau''} > d, \tau'' \leq k+r+1 \} + \\ &+ P_\theta \{ \theta - \hat{\theta}_{\tau''} > d, \tau'' > k+r+1 \} \leq \gamma' + \\ &+ P_\theta \left\{ \theta - \hat{\theta}_{\tau''} > d \frac{\hat{\theta}_{\tau''}}{d \hat{\theta}_{\tau''}}, \tau'' > k+r+1 \right\} = \\ &= \gamma' + \sum_{j=m}^{\infty} P_\theta \hat{\theta}_j \leq \frac{a_j}{a_j + 1} \theta = \sum_{j=m}^{\infty} \left(\frac{a_j^0}{a_j^0 + 1} \right)^j + \gamma' \leq \gamma. \end{aligned}$$

Rozważmy regułę zatrzymania τ_F zdefiniowaną równością (4.10). W przypadku rodziny rozkładów jednostajnych $\{U(0, \theta), \theta > 0\}$ przybiera ona postać

$$(5.10) \quad \tau = \inf \left\{ n \geq 1: \hat{\theta}_n \leq \frac{d \sqrt[n]{\gamma}}{1 - \sqrt[n]{\gamma}} \right\}.$$

Oczywiście $\tau \in C$ oraz jest asymptotycznie zgodna i asymptotycznie efektywna. Wykażemy, że $\tau \notin D$, ale jest w pewnym sensie obwiednią klasy D .

Wprowadźmy następującą relację porządkującą zbiór reguł zatrzymania C .

DEFINICJA 5.3. Mówimy, że reguła zatrzymania $\sigma \in C$ poprzedza $\sigma' \in C$ ($\sigma \prec \sigma'$) wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $\theta > 0$

$$P_\theta \{ \sigma \leq \sigma' \} = 1.$$

LEMAT 5.3. Niech $\sigma \equiv (d a_n, n \geq 1)$ i $\sigma' \equiv (d a'_n, n \geq 1)$ będą dwiema regułami zatrzymywania należącymi do klasy C .

Wówczas

$$(\sigma \prec \sigma') \iff (\forall n \geq 1 \quad a'_n \leq a_n).$$

D o w ó d. ($\implies$) Załóżmy, że dla każdego $\theta > 0$ $P_\theta \{ \sigma \leq \sigma' \} = 1$ oraz istnieje takie $m \in \mathbb{N}$, że $a_m < a'_m$. Weźmy $\theta \in (d a_m, d a'_m)$. Oczywiście, z uwagi na to, że $\theta < d a'_m$, mamy $P_\theta \{ \sigma' > m \} = 0$. Natomiast $P_\theta \{ \sigma > m \} = P_\theta \{ \hat{\theta}_1 > d a_1, \dots, \hat{\theta}_m > d a_m \} > 0$. Tym samym otrzymujemy, że

$$0 < P_\theta \{ \sigma > m \} = P_\theta \{ \sigma > m, \sigma' \leq m \} \leq P_\theta \{ \sigma' < \sigma \},$$

co przeczy założeniu $P_\theta \{ \sigma \leq \sigma' \} = 1$.

($\Leftarrow$) Jeżeli założymy $a_n' \leq a_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to prawdziwe jest następujące zawieranie:

$$\{ \sigma' = n \} \subset \{ \hat{\theta}_n \leq d a_n' \} \subset \{ \hat{\theta}_n \leq d a_n \} \subset \{ \sigma \leq n \}.$$

Zatem dla wszystkich $\theta > 0$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} P_\theta \{ \sigma \leq \sigma' \} &= P_\theta \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{ \sigma \leq n, \sigma' = n \} \right) = \\ &= P_\theta \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{ \sigma' = n \} \right) = 1. \end{aligned}$$

U w a g a 3. Jeżeli $\sigma \prec \sigma'$, to dla wszystkich $\theta > 0$

- (a) $E_\theta \sigma \leq E_\theta \sigma'$;
- (b) $P_\theta \{ \theta - \hat{\theta}_{\sigma'} > d \} \leq P_\theta \{ \theta - \hat{\theta}_\sigma > d \}.$

LEMAT 5.4. Dla każdej reguły zatrzymania $\sigma \in D$ mamy

$$\tau \prec \sigma.$$

D o w ó d. Wystarczy wykazać, że

$$(5.11) \quad a_n \leq \frac{d \sqrt[n]{\delta}}{1 - \sqrt[n]{\delta}} \quad \text{dla każdego } n \geq 1,$$

gdzie $(a_n, n \geq 1)$.

Ustalmy $m \in \mathbb{N}$. Warunek $\sigma \in D$ pociąga za sobą (5.5) dla wszystkich $\theta > 0$. Niech $\theta = d(a_m + 1)$. Wówczas

$$P_\theta \{ \theta - \hat{\theta}_n > d, \sigma = n \} = \begin{cases} P_\theta \{ \sigma = n \} & \text{dla } n \leq m, \\ 0 & \text{dla } n > m, \end{cases}$$

a zatem

$$\begin{aligned} P_\theta \{ \theta - \hat{\theta}_\sigma > d \} &= \sum_{n=1}^{\infty} P_\theta \{ \theta - \hat{\theta}_n > d, \sigma = n \} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_\theta \{ \sigma = n \} = P_\theta \{ \sigma \leq m \} \geq \\ &\geq P_\theta \{ \hat{\theta}_m \leq d a_m \} = \left(\frac{a_m}{a_m + 1} \right)^m. \end{aligned}$$

U w a g a 4. Zauważmy, że nierówności (5.11) nie można poprawić. Istotnie, zauważmy, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ reguła zatrzymania $s_k \equiv (d e_n, n \geq 1)$, gdzie

$$e_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n < k, \\ \frac{n\sqrt{\delta}}{1 - n\sqrt{\delta}} & \text{dla } n \geq k \end{cases}$$

spełnia założenia lematu 5.2. Zatem dla każdego k istnieje w klasie D reguła zatrzymania $w_k \equiv (d b_n, n \geq 1)$ taka, że $b_k = e_k$. Można zatem powiedzieć, że reguła τ jest obwiednią klasy D .

TWIERDZENIE 5.1. Nie istnieje reguła zatrzymania $t^* \in D$ taka, aby dla wszystkich $\theta > 0$ i dla każdej reguły $\sigma \in D$ było

$$E_{\theta} t^* \leq E_{\theta} \sigma.$$

D o w ó d. Załóżmy, że istnieje taka reguła $t^* \equiv (d a_1^*, i \geq 1)$. Z lematów 5.4 i 5.2 wynika, że $a_1^* = \gamma / (1 - \gamma)$, ponieważ dla $\sigma \equiv (d a_i, i \geq 1) \in D$ takiego, że $a_1 < a_1^*$ mielibyśmy $E_{\theta} t^* = 1 < E_{\theta} \sigma$ dla wszystkich $\theta \in (d a_1, d a_1^*)$. Niech $a_2^* > a_1^*$ oraz $\theta \leq d(a_2^* + 1)$. Wtedy

$$P_{\theta} \{ \theta - \hat{\theta}_{t^*} > d \} = \begin{cases} \frac{\theta - d}{\theta} & \text{dla } \theta \leq d(a_1^* + 1), \\ \frac{d a_1^*}{\theta} + \frac{(\theta - d)(\theta - d - d a_1^*)}{2} & \text{dla pozostałych } \theta. \end{cases}$$

Ponieważ $\psi[d(a_1^* + 1) +] = \gamma$, a $\psi'[d(a_1^* + 1) +] > 0$, gdzie

$$\psi(\theta) = \frac{d a_1^*}{\theta} + \frac{(\theta - d)(\theta - d - d a_1^*)}{\theta^2} \quad \text{dla } \theta > d(a_1^* + 1),$$

więc $a_2^* = a_1^*$.

Postępując analogicznie, można wykazać, że $a_3^* = \frac{2\sqrt{\gamma}}{1 - \frac{2\sqrt{\gamma}}{1 - \sqrt{\gamma}}}$.

Rozważmy regułę zatrzymania $t_1 \equiv (a_n^*, n \geq 1) \in D$ taką, że $a_1^* = 0$ oraz $a_2^* = a_3^*$. Istnienie t_1 wynika z lematu 5.2. Niech $\theta = d a_3^*$. Wtedy

$$\begin{aligned}
 E_{\theta} t^* &= 1 \cdot P_{\theta} \{ \hat{\theta}_1 \leq d a_1 \} + 3 \cdot P_{\theta} \{ \hat{\theta}_1 > d a_1^*, \hat{\theta}_3 \leq d a_3^* \} = \\
 &= \frac{d\gamma}{1-\gamma} \frac{1-\sqrt{\gamma}}{d\sqrt{\gamma}} + 3 \left(1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{1+\sqrt{\gamma}} \right) = \frac{3+\sqrt{\gamma}}{1+\sqrt{\gamma}} > \\
 &> 2 = 2 \cdot P_{\theta} \{ t_1 = 2 \} = E_{\theta} t_1,
 \end{aligned}$$

co przeczy założeniu, iż t^* ma jednostajnie po θ najmniejszą wartość oczekiwaną.

U w a g a 5. Reguła $\tau \notin D$. Wynika to z lematu 5.4, uwagi 3 oraz twierdzenia 5.1.

Ponieważ twierdzenie 5.1 daje nam negatywną odpowiedź na pytanie o istnienie optymalnej reguły zatrzymania, interesujące staje się zbadanie własności obwiedni klasy D - reguły zatrzymania τ . Udowodnimy następujący

LEMAT 5.5. Niech $N \equiv (d a_n, n \geq 1) \in C$ oraz $p_n(a) = P_{\theta} \{ N > n \}$,

gdzie $a = (\theta/d)$. Wtedy

$$(a) \quad p_n(a) = p_{n-1}(a) - \left(\frac{a_n}{a} \right)^n p_{n-1}(a_n) \text{ dla } a > a_n, n = 1, 2, \dots,$$

$$p_0(a) = 1;$$

ponadto, przyjmując $a_0 = 0$

$$(b) \quad P_{\theta} \{ \theta - \hat{\theta}_N < d \} = \frac{1}{a} \sum_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{a} \right)^j p_{n-j-1}(a)$$

dla $a_{n-1} + 1 < a \leq a_n + 1, n = 1, 2, \dots$;

$$(c) \quad E_{\theta} N = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} p_k(a),$$

$$V_{\theta} N = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1)p_k(a) - (E_{\theta} N)^2$$

$$\text{dla } a_{n-1} < a \leq a_n, n = 1, 2, \dots$$

D o w ó d. (a). Ponieważ $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$, więc dla $k \geq 2$ oraz $a > a_k$ mamy (dla $k = 1$ (a) jest oczywiste)

$$p_k(a) = P_{\theta} \left\{ \frac{\hat{\theta}_1}{\theta} > \frac{a_1}{a}, \dots, \frac{\hat{\theta}_k}{\theta} > \frac{a_k}{a} \right\}.$$

Niech $Y_j = \hat{\theta}_j / \theta = \max(U_1, \dots, U_j)$, gdzie U_j , $j = 1, 2, \dots$, jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 1]$, a $P_j = P$. Wtedy otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} p_k(a) &= P \left\{ Y_1 > \frac{a_1}{a}, \dots, Y_{k-1} > \frac{a_{k-1}}{a}, Y_k > \frac{a_k}{a} \right\} + \\ &+ P \left\{ Y_1 > \frac{a_1}{a}, \dots, \frac{a_k}{a} \geq Y_{k-1} > \frac{a_{k-1}}{a}, U_k > \frac{a_k}{a} \right\} = \\ &= p_{k-1}(a) - \frac{a_k}{a} P \left\{ Y_1 > \frac{a_1}{a}, \dots, \frac{a_k}{a} \geq Y_{k-1} > \frac{a_{k-1}}{a} \right\}. \end{aligned}$$

Wykażemy, że

$$\begin{aligned} P \left\{ Y_1 > \frac{a_1}{a}, \dots, Y_{k-2} > \frac{a_{k-2}}{a}, \frac{a_k}{a} \geq Y_{k-1} > \frac{a_{k-1}}{a} \right\} &= \\ = P \left\{ Y_{k-1} \leq \frac{a_k}{a} \right\} P \left\{ Y_1 > \frac{a_1}{a}, \dots, Y_{k-1} > \frac{a_{k-1}}{a} \right\}. \end{aligned}$$

Istotnie

$$\begin{aligned}
 & P \left\{ Y_1 > \frac{a_1}{a}, \dots, Y_{k-1} > \frac{a_{k-1}}{a} \mid Y_{k-1} \leq \frac{a_k}{a} \right\} = \\
 & = \frac{P \left\{ Y_1 > \frac{a_1}{a}, \dots, Y_{k-2} > \frac{a_{k-2}}{a}, \frac{a_k}{a} \geq Y_{k-1} > \frac{a_{k-1}}{a} \right\}}{P \left\{ Y_{k-1} \leq \frac{a_k}{a} \right\}} = \\
 & = \frac{\text{Vol} \left\{ (u_1, \dots, u_{k-1}) \in \bigtimes_1^{k-1} \left[0, \frac{a_k}{a} \right] : y_1 > \frac{a_1}{a}, \dots, y_{k-1} > \frac{a_{k-1}}{a} \right\}}{\text{Vol} \left\{ (u_1, \dots, u_{k-1}) \in \bigtimes_1^{k-1} \left[0, \frac{a_k}{a} \right] \right\}} = \\
 & = P_{a_k/a} \left\{ \hat{\theta}_1 > \frac{a_1}{a}, \dots, \hat{\theta}_{k-1} > \frac{a_{k-1}}{a} \right\} = \\
 & = P \left\{ Y_1 > \frac{a_1}{a_k}, \dots, Y_{k-1} > \frac{a_{k-1}}{a_k} \right\} = p_{k-1}(a_k),
 \end{aligned}$$

gdzie $y_i = \max(u_1, \dots, u_i)$, $i = 1, 2, \dots$. Z uwagi na równość

$$P \left\{ Y_{k-1} \leq \frac{a_k}{a} \right\} = \left(\frac{a_k}{a} \right)^{n-1}, \text{ otrzymujemy tezę (a).}$$

(b). Dla każdego, ustalonego n oraz $a_{n-1} + 1 < a \leq a_n + 1$ mamy

$$P_{\theta} \left\{ \hat{\theta}_N > \theta - d, N > n \right\} = P_{\theta} \left\{ N > n \right\}$$

oraz

$$P_{\theta} \left\{ \hat{\theta}_N > \theta - d, N < n \right\} = 0.$$

Stąd otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}
 P_{\theta} \{ \hat{\theta}_N > \theta - d \} &= P_{\theta} \{ \hat{\theta}_N > \theta - d, N = n \} + P_{\theta} \{ N > n \} = \\
 &= P_{\theta} \{ \hat{\theta}_1 > d a_1, \dots, \hat{\theta}_{n-1} > d a_{n-1}, \theta - d < \hat{\theta}_n \leq d a_n \} + \\
 &+ P_{\theta} \{ \hat{\theta}_1 > d a_1, \dots, \hat{\theta}_n > d a_n \} = \\
 &= P_{\theta} \{ \hat{\theta}_1 > d a_1, \dots, \hat{\theta}_{n-1} > d a_{n-1}, \hat{\theta}_n > \theta - d \} = \\
 &= P \left\{ Y_1 > \frac{a_1}{a}, \dots, Y_{n-1} > \frac{a_{n-1}}{a}, Y_n > 1 - \frac{1}{a} \right\},
 \end{aligned}$$

co łącznie z (a) daje nam

$$(5.12) \quad P_{\theta} \{ \theta - \hat{\theta}_N < d \} = p_{n-1}(a) - \left(1 - \frac{1}{a}\right)^n p_{n-1}(a-1)$$

dla $a_{n-1} + 1 < a \leq a_n + 1$. Następnie zauważmy, że z (a) wynika, iż

$$(5.13) \quad a^n (p_{n-1}(a) - p_n(a)) = a_n^n p_{n-1}(a_n) = \text{const}$$

dla $a > a_n$ i co za tym idzie

$$(5.14) \quad p_n(a) = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{a_i^i p_{i-1}(a_i)}{a^i} \quad \text{dla } a > a_n.$$

Wychodząc z równości (5.12), wykorzystując zależności (5.13) i (5.14) oraz odpowiednio przekształcając, otrzymujemy (b).

Aby udowodnić (c) zauważmy, że

$$E_{\theta} N = \sum_{k=1}^{\infty} P_{\theta} \{ N \geq k \}$$

oraz

$$V_{\theta} N = \sum_{k=1}^{\infty} (2k - 1) P_{\theta} \{ N \geq k \} - (E_{\theta} N)^2 .$$

Ponieważ dla $a \leq a_n$ $P_{\theta} \{ N > n \} = 0$ oraz $P_{\theta} \{ N \geq k \} = P_{\theta} \{ N > k - 1 \} = p_{k-1}(a)$, więc proste obliczenia dają nam teżę (c).

TWIERDZENIE 5.2. Reguła zatrzymania $N \equiv (d a_n, n \geq 1) \in C$ jest asymptotycznie zgodna wtedy, gdy

$$(5.15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_n + 1} \right)^n = c \leq \gamma .$$

Ponadto, jeżeli N jest asymptotycznie zgodna, to

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_n + 1} \right)^n \leq \gamma .$$

D o w ó d. Zauważmy, że warunek (5.15) jest równoważny warunkowi

$$(5.16) \quad a_n = - \frac{n}{\ln c} + o(n) .$$

Założmy zatem, że a_n jest postaci (5.16). Aby udowodnić pierwszą część tezy, skorzystamy z twierdzenia Anscombe'a (tw. 2 w [1]).

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$w_n = \theta/a_n.$$

$$n_r = \inf \{ n \in \mathbb{N}: w_n \leq d(r) \},$$

$$N_r = \inf \{ n \in \mathbb{N}: (\hat{\theta}_n/\theta) w_n \leq d(r) \},$$

gdzie $d(r)$ jest dowolnym ciągiem liczb dodatnich, zbieżnym do zera. Wystarczy sprawdzić założenia twierdzenia Anscombe'a.

Po pierwsze, z warunku (5.16) wynika, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta} \{ \hat{\theta}_n - \theta < x \cdot w_n \} = \begin{cases} e^{-x \ln c} & \text{dla } x \leq 0, \\ 1 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

oraz $w_n/w_{n+1} = a_{n+1}/a_n \rightarrow 1$ przy $n \rightarrow \infty$. Ponadto $\hat{\theta}_n$ spełnia warunek Anscombe'a jednostajnej ciągłości według prawdopodobieństwa (tw. 6 w [1]) oraz $\lim(N_r/n_r) = 1$ p.w. przy $r \rightarrow 0$. Ostatnia zależność wynika ze zbieżności $(\hat{\theta}_n/\theta) \rightarrow 1$ p.w., (5.16) oraz lematu 1 w [4]. Zatem na mocy twierdzenia 2 w [1] otrzymujemy, że

$$\lim_{r \rightarrow 0} P_{\theta} \{ \theta - \hat{\theta}_{N_r} > d(r) \} = e^{\ln c} = c \leq \gamma.$$

Druga część tezy wynika z lematu 5.5 b). Istotnie dla $a_{n-1} + 1 < a \leq a_n + 1$

$$\begin{aligned} P_{\theta} \{ \theta - \hat{\theta}_N < d \} &\leq \frac{1}{a} \sum_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^j = 1 - \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{n-1} \leq \\ &\leq 1 - \left(\frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 1}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Zatem

$$1 - \gamma \leq \lim_{d \rightarrow 0} P_{\theta} \{ \theta - \hat{\theta}_N < d \} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \left(\frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 1} \right)^{n-1} \right\}.$$

U w a g a 6. Dla reguły zatrzymania τ (5.10) mamy

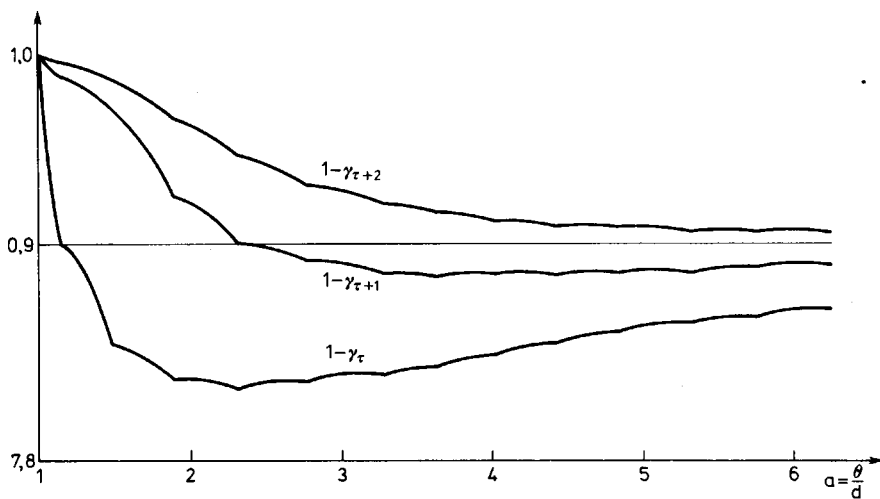
$$(a) \quad \left(\frac{a_n}{a_n + 1} \right)^n \equiv \gamma, \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$(b) \quad \tau \leq \inf \left\{ n \in \mathbb{N}: n \geq \frac{\ln \gamma}{\ln(1 - \frac{d}{d+\theta})} \right\};$$

$$(c) \quad \lim_{d \rightarrow 0} E_{\theta} \tau \cdot \frac{\ln(1 - \frac{d}{\theta})}{\ln \gamma} = 1.$$

(a) i (b) wynikają wprost z definicji reguły τ , (c) natomiast z jej asymptotycznej efektywności.

Na zakończenie tych rozważań dotyczących obwiedni klasy D, przedstawimy w tabelach 4 i 5 dokładne wartości E_{τ} - wartości oczekiwanej, V_{τ} - wariancji reguły zatrzymania τ oraz $1 - \gamma_{\tau}$ - prawdopodobieństwa pokrycia przez przedział ufności $[\hat{\theta}_{\tau}, \hat{\theta}_{\tau} + d]$ nieznaney wartości parametru θ , obliczone na podstawie lematu 5.5 dla $\gamma = 0,1$ i $0,05$ oraz wybranych $\frac{d}{\theta}$. Zauważmy (por. rys. 1), że prawdopodobieństwo pokrycia przez przedział ufności jest zawsze mniejsze od $1 - \gamma$. W ostatnich dwóch kolumnach tabel 4 i 5 przedstawiono wartości prawdopodobieństwa pokrycia przez przedział ufności skonstruowany za pomocą reguł zatrzymania $\tau + 1$ oraz $\tau + 2$ (por. rys. 1). Przedstawione wyniki wskazują na to, że w praktyce dla $\gamma = 0,1$ oraz $0,05$ reguła zatrzymania $\tau + 2$ jest ściśle zgodna.



Rys. 1

T a b e l a 1

$$\gamma = 0.01$$

1	2	3	4	5		6
$\frac{d}{\theta}$	N_0	$m + E_{\theta} n_b$	M	k	$E_{\theta} \tau_k$	N_S
0.6	5.0	5 + 9.1	9.8	5	12.6	9.45 E
		20 + 5.7		20	20.0	1.47 V
		50 + 5.3		50	50.0	0.0201 $\hat{\delta}$
0.25	16.0	5 + 25.6	20.7	5	30.2	20.36 E
		20 + 17.6		20	20.7	1.22 V
		50 + 16.6		50	50.0	0.0150 $\hat{\delta}$
0.05	89.8	5 + 137.4	94.4	5	151.2	94.04 E
		20 + 97.9		20	103.6	1.16 V
		50 + 93.2		50	96.5	0.0110 $\hat{\delta}$

T a b e l a 2

$$\gamma = 0.05$$

1	2	3	4	5		6	
0.6	3.3	5 + 4.4	6.4	5	6.8	6.16	E
		20 + 3.5		20	20.0	1.23	V
		50 + 3.4		50	50.0	0.0480	$\hat{\gamma}$
0.25	10.4	5 + 13.1	13.4	5	16.4	13.01	E
		20 + 11.0		20	20.0	2.13	V
		50 + 10.6		50	50.0	0.0590	$\hat{\gamma}$
0.05	58.4	5 + 71.7	61.4	5	82.1	61.08	E
		20 + 61.1		20	64.6	1.09	V
		50 + 59.7		50	61.7	0.0490	$\hat{\gamma}$

T a b e l a 3

$$\gamma = 0.1$$

1	2	3	4	5		6	
$\frac{d}{\theta}$	N_0	$m + E_{\theta} n_{\theta}$	M	k	$E_{\theta} \tau_k$	N_S	
0.6	2.5	5 + 3.1	4.9	5	5.0	4.66	E
		20 + 2.6		20	20.0	0.82	V
		50 + 2.6		50	50.0	0.0950	$\hat{\gamma}$
0.25	8.0	5 + 9.3	10.3	5	11.7	9.97	E
		20 + 8.3		20	20.0	1.90	V
		50 + 8.1		50	50.0	0.1000	$\hat{\gamma}$
0.05	44.9	5 + 51.5	47.2	5	58.5	46.78	E
		20 + 46.3		20	48.8	1.18	V
		50 + 45.6		50	50.0	0.1050	$\hat{\gamma}$

U w a g a

$$N_0 = \frac{\ln \gamma}{\ln(1 - \frac{d}{\theta})}.$$

T a b e l a 4

$\gamma = 0.05$

$\frac{d}{\theta}$	N_0	E_{τ}	V_{τ}	$1 - \delta_{\tau}$	$1 - \delta_{\tau+1}$	$1 - \delta_{\tau+2}$
1.00	1.00	3.88	1.18	1.000	1.000	1.000
0.75	2.16	4.79	1.63	0.919	0.980	0.995
0.60	3.27	5.74	2.07	0.906	0.962	0.985
0.50	4.32	6.70	2.48	0.903	0.951	0.976
0.40	5.86	8.08	2.79	0.903	0.942	0.965
0.30	8.40	10.67	3.76	0.913	0.939	0.958
0.25	10.41	12.69	4.18	0.920	0.940	0.955
0.20	13.43	15.72	4.66	0.928	0.942	0.954
0.10	28.43	30.78	6.70	0.941	0.947	0.952
0.09	31.77	34.07	7.28	0.942	0.947	0.952

T a b e l a 5

$\gamma = 0.1$

$\frac{d}{\theta}$	N_0	E_{τ}	V_{τ}	$1 - \delta_{\tau}$	$1 - \delta_{\tau+1}$	$1 - \delta_{\tau+2}$
1.00	1.00	2.92	0.90	1.000	1.000	1.000
0.75	1.66	3.50	1.16	0.875	0.969	0.993
0.60	2.51	4.16	1.47	0.845	0.938	0.975
0.50	3.32	4.92	2.04	0.832	0.916	0.958
0.40	4.51	5.96	2.57	0.829	0.897	0.938
0.30	6.46	7.84	3.60	0.835	0.885	0.919
0.25	8.00	9.41	4.44	0.840	0.880	0.910
0.20	10.32	11.72	5.20	0.855	0.884	0.907
0.10	21.85	23.32	7.98	0.881	0.893	0.904
0.09	24.41	25.91	8.56	0.884	0.895	0.904
0.08	27.62	29.06	9.18	0.886	0.895	0.904
0.07	31.73	33.17	10.17	0.888	0.896	0.903

PRACE CYTOWANE

- [1] F.J. Anscombe, Large sample theory of sequential estimation, Proc. Cambridge Philosophical Soc. 48(1952), 600-607.
- [2] A. Birnbaum, W.C. Healy, Estimates with prescribed variance based on two-stage sampling, Ann. Math. Statist. 31(1960), 662-676.
- [3] J.R. Blum, J. Rosenblatt, Fixed precision estimation in the class of IFR distributions, Ann. Inst. Stat. Math. 21.1 (1969), 211-213.
- [4] Y.S. Chow, H. Robbins, On the asymptotic theory of fixed-width sequential confidence intervals for the mean, Ann. Math. Statist. 36(1965), 457-462.
- [5] P. Cooke, M. Vagholkar, Sequential procedures for a class of distributions related to the uniform, Ann. Inst. Stat. Math. (1982).
- [6] W. Eschenbach, Konfidenzintervalle vorgegebener Länge für Begrenzungsparameter von Verteilungen, Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik 16(1980), 655-660.
- [7] Z. Govindarajulu, The sequential statistical analysis, Columbus, Ohio 1981, American Sciences Press.
- [8] F.A. Graybill, T.L. Connell, Sample size required to estimate the parameter in the uniform density within d unit of the true value, Jour. Amer. Statist. Assoc. 59(1964), 550-556.
- [9] P. Hall, On estimating the endpoint of a distribution, Ann. Statist. 10(1982), 556-568.

- [10] J. Kiefer, Sequential minimax estimation for the rectangular distribution with known range, Ann. Math. Statist. 23(1954), 586-593.
- [11] N. Mukhopadhyay, Stein's two-stage procedure and exact consistency, Scand. Actuarial J.(1982), 110-122.
- [12] J.S. Rao, Estimation problems for rectangular distributions, Metrika 28(1981), 257-262.
- [13] A. Sierociński, On fixed precision estimation of the maximal value of a random variable, Demonstratio Math. 13(1980), 995-1003.
- [14] -, Estymacja sekwencyjna parametru θ w rozkładach o nośniku w przedziale $[0, \theta]$, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, Instytut Matematyki, Warszawa 1981.
- [15] -, About a fixed precision estimation the parameter of the uniform density, Banach Centrum Publications, Vol. 16, PWN, Warszawa 1985, 477-484.
- [16] S. Zacks, The theory of statistical inference, J. Wiley, New York 1971.
- [17] R. Zieliński, A class of stopping rules for fixed precision sequential estimates, Zastosowania Matematyki XVII,2(1982), 277-281.
- [18] P.A. Meyer, Probability and potentials, Blaisdell Publishing Company, Waltham 1966.
- [19] R. Singh, Existence of bounded length confidence intervals, Ann. Math. Statist. 34(1963), 1474-1485.