



TERESA REGIŃSKA (Warszawa)

Aproksymacja wartości własnych zagadnień niesamosprężonych na przedziale nieskończonym

(Praca przyjęta do druku 11.10.1977)

Niech L oznacza operator różniczkowy generowany wyrażeniem różniczkowym

$$(1) \quad lu = -u'' + p(x)u, \quad 0 < x < \infty,$$

i warunkami

$$(2) \quad u(0) = 0, \quad u \in L^2(0, \infty).$$

Współczynnik $p(x)$ jest funkcją o wartościach zespolonych, całkowalną na każdym przedziale $(0, \alpha)$, $0 < \alpha < \infty$.

Operator L jest określony na podzbiorze przestrzeni Hilberta $L^2(0, \infty)$. Dziedziną jego jest następujący zbiór:

$$D_L = \{f \in L^2(0, \infty) : f' \text{ absolutnie ciągła na } [0, \alpha], \alpha > 0, (If) \in L^2(0, \infty), f(0) = 0\}.$$

Jeżeli nie założymy, że $\operatorname{im} p(x) \equiv 0$, to wyrażenie różniczkowe (1) nie jest samo-sprężone.

Będziemy zajmować się zagadnieniem własnym

$$(3) \quad Lu = \lambda u.$$

Udowodnimy, że wartości własne zagadnienia (3) są aproksymowane przez wartości własne pewnych zagadnień własnych na przedziałach skończonych. W pracy [3] zostało udowodnione podobne twierdzenie dla przypadku $\operatorname{im} p \equiv 0$. Zastosowane tam metody dowodu nie można przenieść na przypadek ogólny, ponieważ wykorzystywane tam twierdzenie o metodzie projekcyjnej jest prawdziwe jedynie dla operatorów normalnych. W przypadku, gdy $\operatorname{im} p \neq 0$, operator L^{-1} jest normalny tylko wtedy gdy $\operatorname{im} p(x)$ jest funkcją przedziałami stałą.

W niniejszej pracy oprzemy się więc na bardziej szczególnych własnościach operatora L i jego widma.

Będziemy dalej zakładać, że funkcja $p(x)$ jest całkowalna na całym przedziale $(0, \infty)$. Oznaczmy

$$\sigma(x) = \int_x^\infty |p(\xi)| d\xi.$$

Punktem wyjścia dalszych rozważań są następujące dwa twierdzenia, udowodnione w „Dodatku 1” do książki Najmarka [2].

TWIERDZENIE 1. *Równanie $lu = \varrho^2 u$ ma rozwiązanie $w(x, \varrho)$ spełniające równanie całkowe*

$$(4) \quad w(x, \varrho) = e^{ix\varrho} - \int_x^\infty \frac{\sin(x-\xi)\varrho}{\varrho} p(\xi)w(\xi, \varrho) d\xi,$$

przy $\operatorname{im} \varrho \geq 0$, $\varrho \neq 0$ i $|\varrho| > \sigma(x)$.

TWIERDZENIE 2. 1. *Widmo ciągle operatora L składa się z liczb rzeczywistych dodatnich $\lambda > 0$;*

2. *Liczba $\lambda = \varrho^2$, $\operatorname{im} \varrho \geq 0$, jest wartością własną operatora L wtedy i tylko wtedy, gdy $w(0, \varrho) = 0$;*

3. *Zbiór wartości własnych jest przeliczalny, ograniczony i ma punkty skupienia tylko na półosi $\lambda \geq 0$.*

Na mocy powyższych twierdzeń aproksymację wartości własnych operatora L , których moduł jest większy od $\sigma(0)^2$ można zastąpić zadaniem aproksymacji zer rozwiązania równania całkowego (4).

Weźmy pod uwagę ciąg $x_n \nearrow \infty$ oraz równanie całkowe na przedziale skończonym $(0, x_n)$

$$(5) \quad w_n(x, \varrho) = e^{ix\varrho} - \int_x^{x_n} \frac{\sin(x-\xi)\varrho}{\varrho} p(\xi)w_n(\xi, \varrho) d\xi.$$

Dalsza część pracy będzie składała się z dwóch etapów. Najpierw pokażemy, że zera funkcji $w_n(0, \varrho)$ są zbieżne do zer funkcji $w(0, \varrho)$. Następnie udowodnimy związek zachodzący pomiędzy zerami funkcji $w_n(0, \varrho)$ a wartościami własnymi pewnych zagadnień brzegowych na przedziale skończonym.

Zacniemy od dowodu następującego lematu:

LEMAT 1. *Dla każdego x z przedziału $[0, x_n]$ ciąg funkcji $\{w_n(x, \varrho)\}$ jest zbieżny niemal jednostajnie do funkcji $w(x, \varrho)$ w obszarze $Q = \{\varrho \in \mathbb{C} : \operatorname{im} \varrho > 0, |\varrho| > \sigma(0)\}$. Zachodzi oszacowanie*

$$|w_n(x, \varrho) - w(x, \varrho)| \leq \frac{1}{|\varrho|} \int_{x_n}^\infty |p(\xi)| d\xi \cdot \left\{ \sum_{v=0}^\infty v \left| \frac{\sigma(0)}{\varrho} \right|^{v-1} \right\}.$$

D o w ó d. Dokonajmy w równaniu (4) podstawienia

$$w(x, \varrho) = e^{ix\varrho} v(x, \varrho).$$

Funkcja $v(x, \varrho)$ spełnia równanie całkowe

$$v(x, \varrho) = 1 + \frac{1}{2i\varrho} \int_x^\infty [e^{2i(\xi-x)\varrho} - 1] p(\xi) v(\xi, \varrho) d\xi.$$

Rozwiązanie powyższego równania można przedstawić w postaci szeregu

$$v(x, \varrho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{\nu}(x, \varrho),$$

gdzie $\varepsilon_0(x, \varrho) = 1$,

$$\varepsilon_{\nu+1}(x, \varrho) = \frac{1}{2i\varrho} \int_x^{\infty} [e^{2i(\xi-x)\varrho} - 1] p(\xi) \varepsilon_{\nu}(\xi, \varrho) d\xi.$$

Dla $\xi \geq x$ i $\operatorname{Im} \varrho \geq 0$ $|e^{2i(\xi-x)\varrho} - 1| \leq 2$. Na drodze indukcji dochodzimy do stwierdzenia, że

$$|\varepsilon_{\nu}(x, \varrho)| \leq \left| \frac{\sigma(x)}{\varrho} \right|^{\nu},$$

a z tego wynika już bezwzględna zbieżność szeregu $\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{\nu}(x, \varrho)$. W równaniu (5) dokonajmy podstawienia

$$w_n(x, \varrho) = e^{ix\varrho} v_n(x, \varrho).$$

Analogicznie jak dla $v(x, \varrho)$ można udowodnić, że

$$v_n(x, \varrho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{n\nu}(x, \varrho),$$

gdzie $\varepsilon_{n0}(x, \varrho) = 1$,

$$\varepsilon_{n,\nu+1}(x, \varrho) = \frac{1}{2i\varrho} \int_x^{x_n} [e^{2i(\xi-x)\varrho} - 1] p(\xi) \varepsilon_{n\nu}(\xi, \varrho) d\xi$$

i szereg jest bezwzględnie zbieżny.

A zatem dla $x \in [0, x_n]$ otrzymujemy nierówność

$$|v_n(x, \varrho) - v(x, \varrho)| \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} |\varepsilon_{\nu}(x, \varrho) - \varepsilon_{n\nu}(x, \varrho)|.$$

Weźmy pod uwagę ν -ty wyraz powyższego szeregu. Dodając i odejmując całkę

$$\int_x^{x_n} [e^{2i(\xi-x)\varrho} - 1] p(\xi) \varepsilon_{\nu-1}(\xi, \varrho) d\xi$$

oraz grupując odpowiednio wyrazy otrzymujemy

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{\nu}(x, \varrho) - \varepsilon_{n\nu}(x, \varrho)| &\leq \left| \frac{1}{2i\varrho} \int_{x_n}^{\infty} [e^{2i(\xi-x)\varrho} - 1] p(\xi) \varepsilon_{\nu-1}(\xi, \varrho) d\xi \right| + \\ &+ \left| \frac{1}{2i\varrho} \int_x^{x_n} [e^{2i(\xi-x)\varrho} - 1] p(\xi) [\varepsilon_{\nu-1} - \varepsilon_{n,\nu-1}] d\xi \right| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \sup_{\xi \in (x_n, \infty)} |\varepsilon_{v-1}(\xi, \varrho)| \frac{\sigma(x_n)}{|\varrho|} + \\ + \sup_{\xi \in (0, x_n)} |\varepsilon_{v-1}(\xi, \varrho) - \varepsilon_{n, v-1}(\xi, \varrho)| \frac{\sigma(x)}{|\varrho|}.$$

Na drodze indukcji łatwo udowodnić, że

$$|\varepsilon_v(x, \varrho) - \varepsilon_{nv}(x, \varrho)| \leq v \frac{\sigma(x_n)}{|\varrho|} \left(\frac{\sigma(0)}{|\varrho|} \right)^{v-1}.$$

Wobec tego różnicę pomiędzy funkcjami $w(x, \varrho)$ i $w_n(x, \varrho)$ szacujemy następująco:

$$|w_n(x, \varrho) - w(x, \varrho)| \leq |e^{ix\varrho}| \frac{\sigma(x_n)}{|\varrho|} \sum_{v=1}^{\infty} v \left(\frac{\sigma(0)}{|\varrho|} \right)^{v-1}.$$

Ponieważ założyliśmy, że $\frac{\sigma(0)}{|\varrho|} < 1$, to szereg $\sum_{v=1}^{\infty} v \left(\frac{\sigma(0)}{|\varrho|} \right)^{v-1}$ jest niemal jednostajnie zbieżny względem ϱ . Zauważmy jeszcze, że z założenia $p \in L(0, \infty)$ wynika $\sigma(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, co kończy dowód lematu.

Funkcje $w(0, \varrho)$, $w_n(0, \varrho)$ będziemy dalej oznaczać $w(\varrho)$ i $w_n(\varrho)$. Z powyższego lematu wynika między innymi, że ciąg funkcji $\{w_n(\varrho)\}$ jest zbieżny niemal jednostajnie do funkcji $w(\varrho)$ w obszarze $Q \subset C$. Z definicji funkcji $w(\varrho)$ i $w_n(\varrho)$, tzn. ze wzorów (4) i (5) wynika, że są to funkcje analityczne w obszarze określoności.

Stosując twierdzenie Hurwitza [1] o niemal jednostajnie zbieżnym ciągu funkcji analitycznych dochodzimy do następującego wniosku:

WNIOSEK 1. *Funkcja $w(\varrho)$ ma w punkcie $\varrho_0 \in Q$ zero k -krotne wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym dostatecznie małym kole $|\varrho - \varrho_0| < \varepsilon$ prawie wszystkie funkcje $w_n(\varrho)$ mają dokładnie po k zer (zero s -krotne liczymy jako s zer).*

Zajmiemy się teraz oszacowaniem odległości zer funkcji $w(\varrho)$ od zer funkcji $w_n(\varrho)$.

Przypuścmy, że ϱ_0 jest k -krotnym zerem funkcji $w(\varrho)$, czyli

$$w^{(i)}(\varrho_0) = 0, \quad i = 0, \dots, k-1, \\ w^{(k)}(\varrho_0) \neq 0.$$

Niech ϱ_0^n będzie jednym z k zer funkcji $w_n(\varrho)$ leżących najbliżej ϱ_0 (zgodnie z wnioskiem 1).

Rozwijając funkcję $w(\varrho)$ wokół ϱ_0 w szereg Taylora do wyrazu rzędu $k-1$ z resztą Lagrange'a, otrzymujemy

$$w(\varrho_0^n) = \frac{(\varrho_0 - \varrho_0^n)^k}{k!} w^{(k)}(\varrho_0 + \theta r),$$

gdzie

$$r = \varrho_0^n - \varrho_0, \quad \theta \in (0, 1).$$

Ponieważ $w^{(k)}(\varrho_0) \neq 0$, to dla dostatecznie dużego n $w^{(k)}(\varrho_0 + \theta r) \neq 0$. Z drugiej strony z lematu 1 wynika, że

$$|w(\varrho_0^n)| \leq c_n(\varrho_0^n),$$

gdzie

$$c_n(\varrho) = \frac{\sigma(x_n)}{|\varrho|} \sum_{n=0}^{\infty} n \left| \frac{\sigma(0)}{\varrho} \right|^{n-1} \quad \text{i} \quad \forall \varrho \in Q \quad c_n(\varrho) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

A zatem

$$|\varrho_0 - \varrho_0^n|^k \leq \frac{k! c_n(\varrho_0^n)}{|w^{(k)}(\varrho_0 + \theta r)|}.$$

Przechodzimy teraz do zapowiedzianego drugiego etapu pracy, którego celem jest pokazanie, że zera funkcji $w_n(\varrho)$ wyznaczają wartości własne pewnego zagadnienia brzegowego i odwrotnie.

LEMAT 2. *Jeżeli $\operatorname{im} \varrho > 0$ i $\sigma(0) < |\varrho|$, to ϱ jest zerem funkcji $w_n(\varrho)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda = \varrho^2$ jest wartością własną zagadnienia brzegowego na przedziale skończonym $(0, x_n)$*

$$(6) \quad -u''(x) + p(x)u(x) = \varrho^2 u(x),$$

$$(7) \quad u(0) = 0, \quad u'(x_n) = i\varrho u(x_n).$$

D o w ó d. Dla ϱ : $\operatorname{im} \varrho > 0$ i $\sigma(0) < |\varrho|$ funkcja $w_n(x, \varrho)$ jest jednoznacznie określona. Łatwo sprawdzić, że $w_n(x, \varrho)$ jest jednocześnie szczególnym rozwiązaniem równania (6). Interesują nas wartości funkcji $w_n(x, \varrho)$ i jej pochodnej po x w punkcie x_n . Podstawiając $x = x_n$ do równania (5) otrzymujemy

$$w_n(x_n, \varrho) = e^{ix_n \varrho}.$$

Różniczkując stronami równanie (5) otrzymujemy

$$w'_n(x_n, \varrho) = i\varrho e^{ix_n \varrho}.$$

Funkcja $w_n(x, \varrho)$ jest więc rozwiązaniem równania (6) z warunkami

$$(8) \quad u(x_n) = e^{ix_n \varrho}, \quad u'(x_n) = i\varrho e^{ix_n \varrho}.$$

Niech $\hat{w}_n(x, \varrho)$ oznacza rozwiązanie równania (6) spełniające warunki początkowe

$$(9) \quad \hat{w}_n(x_n, \varrho) = e^{-ix_n \varrho}, \quad \hat{w}'_n(x_n, \varrho) = -i\varrho e^{-ix_n \varrho}.$$

Zauważmy, że w_n i $\hat{w}_n$ są liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania (6). Łatwo bowiem obliczyć, że Wronskian $W(w_n, \hat{w}_n) = -2i\varrho \neq 0$.

Przez $s(x, \varrho)$ oznaczmy rozwiązanie równania (6), które wyznaczone jest przez warunki początkowe w 0

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 1.$$

Funkcję $s(x, \varrho)$ można przedstawić jako kombinację funkcji w_n i $\hat{w}_n$

$$s(x, \varrho) = \alpha w_n(x, \varrho) + \beta \hat{w}_n(x, \varrho).$$

Ponieważ $s(0, \varrho) = 0$, więc

$$\alpha = m\hat{w}_n(0, \varrho), \quad \beta = -mw_n(0, \varrho),$$

gdzie m jest pewną stałą wyznaczoną przez warunek $s'_x(0, \varrho) = 1$. Ponieważ

$$s'_x(0, \varrho) = m[\hat{w}_n(0, \varrho)w'_n(0, \varrho) - w_n(0, \varrho)\hat{w}'_n(0, \varrho)] = 2iqm,$$

więc

$$m = 1/2iq.$$

A zatem

$$(10) \quad s(x, \varrho) = \frac{1}{2iq} [\hat{w}_n(0, \varrho)w_n(x, \varrho) - w_n(0, \varrho)\hat{w}_n(x, \varrho)].$$

Zauważmy, że ogólne rozwiązanie równania (6) spełniające warunek $u(0) = 0$ jest postaci

$$u(x, \varrho) = cs(x, \varrho),$$

gdzie c jest stałą.

Tak więc $\lambda = \varrho^2$ jest wartością własną zagadnienia (6), (7) wtedy i tylko wtedy, gdy $s(x, \varrho)$ spełnia warunek

$$(11) \quad s'_x(x_n, \varrho) = i\varrho s(x_n, \varrho).$$

Korzystając ze wzoru (10), mamy

$$\begin{aligned} s(x_n, \varrho) &= \frac{\hat{w}_n(0, \varrho)}{2iq} \cdot e^{ix_n\varrho} - \frac{w_n(0, \varrho)}{2iq} \cdot e^{-ix_n\varrho}, \\ s'_x(x_n, \varrho) &= \frac{\hat{w}'_n(0, \varrho)}{2} \cdot e^{ix_n\varrho} + \frac{w'_n(0, \varrho)}{2} e^{-ix_n\varrho}. \end{aligned}$$

A zatem równość (11) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{1}{2} w_n(0, \varrho) e^{-ix_n\varrho} = -\frac{1}{2} w_n(0, \varrho) e^{-ix_n\varrho},$$

czyli wtedy i tylko wtedy, gdy

$$w_n(0, \varrho) = 0$$

co kończy dowód lematu.

Weźmy pod uwagę zagadnienie własne (6), (7). Dokonajmy w nim podstawienia

$$u(x, \varrho) = e^{ix\varrho} z(x, \varrho).$$

Łatwo zauważyć, że funkcja $z(x, \varrho)$ jest funkcją własną zagadnienia

$$(12) \quad -z'' + pz = \lambda_n z',$$

$$(13) \quad z(0) = 0, \quad z'(x_n) = 0$$

odpowiadającą wartości własnej $\lambda_n = 2iq$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u(x, \varrho)$ jest rozwiązaniem zagadnienia własnego (6), (7). Biorąc to pod uwagę, wynik zawarty w pracy możemy sformułować w postaci następującego twierdzenia:

TWIERDZENIE 3. 1. Jeżeli $\lambda = \varrho^2$ ($\operatorname{im} \varrho > 0$ i $|\varrho| > \sigma(0)$) jest wartością własną operatora L , to istnieje ciąg $\{\lambda_n\}$, gdzie λ_n jest wartością własną zagadnienia (12), (13), zbieżny do $2i\varrho$.

2. Jeżeli ciąg $\{\lambda_n\}$ jest zbieżny do γ , to $\lambda = (\gamma/2i)^2$ jest wartością własną operatora L , o ile $|\lambda| > \sigma(0)^2$.

U w a g a. Już po oddaniu pracy do druku uzyskano analogiczny wynik dla pozostałych wartości własnych L różnych od zera. Rezultat ten opublikowano w preprincie nr 150, IX 1978, Inst. Mat. PAN.

Prace cytowane

- [1] F. L e j a, *Funkcje zespolone*, Warszawa 1967.
- [2] М. А. Н а й м а р к, *Линейные дифференциальные операторы*, Москва 1969.
- [3] T. R e g i ń s k a, *Aproksymacja wartości własnych pewnych zagadnień różniczkowych na dziedziale nieskończonym*, *Matematyka Stosowana* 13 (1978), str. 127–134.