



TADEUSZ CALIŃSKI i MARIA KOZŁOWSKA (Poznań)

Estymacja kontrastów w układach blokowych wieloreakcyjnych niekompletnych*

(Praca przyjęta do druku 31.08.1976)

1. Wstęp. Układy blokowe wieloreakcyjne niekompletne są dogodnie dla niektórych doświadczeń wielocechowych, szczególnie takich, w których pracochłonność przeprowadzenia pomiarów lub obserwacji uniemożliwia uwzględnienie jednocześnie wszystkich cech na każdej jednostce doświadczalnej. Mogą być także stosowane wtedy, gdy różna reakcja cech na zmienność środowiska narzuca przyjęcie różnego grupowania jednostek doświadczalnych dla poszczególnych zespołów cech. W pracy przedstawiony jest model liniowy dla pewnej klasy takich układów oraz zaproponowana jest metoda estymacji bazowych kontrastów obiektowych, wykorzystująca w odpowiedni sposób technikę wielozmiennej analizy wariancji, jednakże inaczej niż to proponuje Srivastava ([6], [7]).

2. Układ doświadczenia i model liniowy obserwacji. Rozważmy doświadczenie wykonywane na n jednostkach doświadczalnych, których cały zbiór podzielony jest na u (> 1) podzbiorów rozłącznych $S_1, S_2, \dots, S_u$, złożonych odpowiednio z $n_1, n_2, \dots, n_u$ jednostek (tak, że $\sum_{i=1}^u n_i = n$). Na jednostkach tych obserwuje się t (> 1) reakcji (lub cech) w taki sposób, że na n_i jednostkach podzbioru $S_i, i = 1, 2, \dots, u$, obserwujemy t_i (≥ 1) spośród t cech. Wyboru cech do obserwacji w podzbiorach $S_1, S_2, \dots, S_u$ dokonujemy według pewnego planu $\mathcal{D}_1$, zwanego tu układem reakcji (lub układem cech). Sposób grupowania jednostek w bloki oraz rozmieszczania obiektów na tych jednostkach określony jest dla podzbioru S_i pewnym planem blokowo-obiektowym $\mathcal{D}_{2i}, i = 1, 2, \dots, u$. Układ taki może składać się z bloków, w których występują wszystkie obiekty (bloków kompletnych), lub bloków zawierających tylko niektóre obiekty (bloków niekompletnych). Każdy blok doświadczenia (kompletny lub nie) należy do jednego i tylko jednego z układów $\mathcal{D}_{21}, \mathcal{D}_{22}, \dots, \mathcal{D}_{2u}$.

* Praca wykonana w ramach problemu międzyresortowego I.1 koordynowanego przez Instytut Matematyczny PAN.

DEFINICJA 2.1. Układ doświadczalny określony za pomocą planów $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_{21}, \mathcal{D}_{22}, \dots, \mathcal{D}_{2u}$ nazywamy *układem blokowym wieloreakcyjowym* (lub *wielocechowym*), oznaczając go przez

$$\mathcal{D} = (\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_{21}, \mathcal{D}_{22}, \dots, \mathcal{D}_{2u}).$$

DEFINICJA 2.2. Układ blokowy wieloreakcyjowy $\mathcal{D}$ nazywamy *niekompletnym*, gdy w co najmniej jednym podzbiorze $S_i, i = 1, 2, \dots, u$, nie wszystkie spośród t cech są obserwowane, to znaczy, gdy istnieje takie i , że $t_i < t$. (Jak zaznaczono, zawsze $0 < t_i \leq t$).

W dalszym ciągu interesować nas będą jedynie układy blokowe wieloreakcyjne niekompletne.

Dodajmy, że układ blokowy złożony ze wszystkich układów $\mathcal{D}_{21}, \mathcal{D}_{22}, \dots, \mathcal{D}_{2u}$, zapisywany symbolicznie w postaci $\bigcup_{i=1}^u \mathcal{D}_{2i}$, będziemy nazywać układem blokowym całościowym, dla odróżnienia od poszczególnych układów $\mathcal{D}_{2i}, i = 1, 2, \dots, u$, które nazywać będziemy cząstkowymi.

Niech układ $\mathcal{D}_{2i}$ składa się z b_i bloków grupujących n_i jednostek doświadczalnych podzbioru S_i , na których rozmieszczono v obiektów. Liczba oraz dobór tych obiektów niech będą dokładnie takie same dla wszystkich podzbiorów $S_1, S_2, \dots, S_u$.

Oznaczmy przez $y_s^{(i)}$ ($t_i \times 1$)-wymiarowy wektor losowy reprezentujący obserwacje t_i cech z s -tej jednostki podzbioru S_i , gdzie $s = 1, 2, \dots, n_i$, a $i = 1, 2, \dots, u$. Wówczas

$$Y^{(i)} = [y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_{n_i}^{(i)}]'$$

jest $(n_i \times t_i)$ -wymiarową macierzą losową reprezentującą wszystkie obserwacje z podzbioru S_i . Sformułujmy obecnie model liniowy dla tej macierzy zmiennych losowych.

Niech γ_{jl} oznacza parametr reprezentujący efekt działania j -tego obiektu na l -tą cechę, dla $j = 1, 2, \dots, v, l = 1, 2, \dots, t$. Parametry te możemy zapisać wspólnie za pomocą macierzy

$$\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_v],$$

gdzie $\gamma_l = [\gamma_{1l}, \gamma_{2l}, \dots, \gamma_{vl}]'$.

W modelu obserwacji z podzbioru S_i uwzględniamy te kolumny macierzy γ , które odpowiadają cechom obserwowanym w tym podzbiorze, to znaczy uwzględniamy $(v \times t_i)$ -wymiarową podmacierz

$$(2.1) \quad \gamma^{(i)} = \gamma M_i,$$

wyznaczoną za pomocą $(t \times t_i)$ -wymiarowej macierzy

$$M_i = [m_{i1}, m_{i2}, \dots, m_{it_i}],$$

której kolumna m_{il} ma l -tą składową równą 1, gdy l -ta cecha obserwowana jest na jednostkach S_i pod numerem l_i -tym, a wszystkie pozostałe składowe ma równe 0, dla $l = 1, 2, \dots, t, l_i = 1, 2, \dots, t_i$ oraz $i = 1, 2, \dots, u$. Następnie niech $\beta^{(i)}$ będzie

$(b_i \times t_i)$ -wymiarową macierzą parametrów reprezentujących efekty blokowe w układzie $\mathcal{D}_{2i}$ i niech $\alpha^{(i)}$ będzie $(1 \times t_i)$ -wymiarowym wektorem parametrów wspólnych w tym układzie. Przy tych oznaczeniach, dla macierzy $Y^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, u$, przyjmujemy model liniowy o następujących własnościach:

(a) Macierz wartości oczekiwanych jest postaci

$$E(Y^{(i)}) = 1_i \alpha^{(i)} + D'_i \beta^{(i)} + \Delta'_i \gamma^{(i)},$$

gdzie 1_i jest $(n_i \times 1)$ -wymiarowym wektorem o wszystkich składowych równych 1, D'_i jest $(n_i \times b_i)$ -wymiarową podmacierzą układu dla bloków, a Δ'_i jest $(n_i \times v)$ -wymiarową podmacierzą układu dla obiektów, przy czym całą macierzą układu jest $(n_i \times (1 + b_i + v))$ -wymiarowa macierz $A_i = [1_i, D'_i, \Delta'_i]$, o której zakładamy, że jest rzędu $b_i + v - 1$.

(b) Macierze kowariancji są postaci

$$\text{Cov}(y_s^{(i)}, y_{s'}^{(i)}) = \text{Var}(y_s^{(i)}) = \Sigma^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, u,$$

$$\text{Cov}(y_s^{(i)}, y_{s'}^{(i')}) = 0, \quad \text{gdy } i = i', \text{ a } s \neq s' \text{ lub gdy } i \neq i',$$

dla $s, s' = 1, 2, \dots, n_i$. Tak więc zakłada się, że $(t_i \times t_i)$ -wymiarowa macierz kowariancji $\Sigma^{(i)} = [\sigma_{l_i l'_i}]$ jest jednakowa dla każdej jednostki danego podzbioru S_i . Co więcej, zakładamy, że elementy macierzy $\Sigma^{(i)}$ odpowiadające określonym cechom są stałe, niezależne od podzbioru S_i . Możemy to zapisać za pomocą relacji

$$\Sigma^{(i)} = M'_i \Sigma M_i,$$

gdzie $\Sigma = [\sigma_{ll'}]$ jest $(t \times t)$ -wymiarową macierzą kowariancji dla wszystkich t cech, a M_i jest macierzą określoną w (2.1), dla $i = 1, 2, \dots, u$.

Zanalizujemy obecnie obserwacje z jednostek podzbioru S_i (o układzie $\mathcal{D}_{2i}$) zgodnie z przyjętym powyżej modelem i z punktu widzenia estymacji kombinacji liniowych wierszy macierzy γ , a ściślej kontrastów między tymi wierszami. Jak wiadomo z ogólnej teorii układów blokowych (patrz na przykład Caliński, [1], Ceranka i Kaczmarek, [2], a także Pearce *et al.*, [4]), punktem wyjścia tej analizy dla obserwacji z podzbioru S_i , $i = 1, 2, \dots, u$, jest obliczenie macierzy

$$(2.2) \quad Q^{(i)} = [Q_1^{(i)}, Q_2^{(i)}, \dots, Q_{t_i}^{(i)}],$$

gdzie

$$(2.3) \quad Q_{l_i}^{(i)} = T_{l_i}^{(i)} - N_i k_i^{-\delta} B_{l_i}^{(i)}, \quad l_i = 1, 2, \dots, t_i.$$

Tutaj, jak zwykle, $T_{l_i}^{(i)}$ jest $(v \times 1)$ -wymiarowym wektorem sum obiektowych dla l_i -tej cechy obserwowanej na jednostkach z S_i , $N_i = \Delta_i D'_i$ jest macierzą incydencji dla układu $\mathcal{D}_{2i}$, $k_i = D_i 1_i$ jest $(b_i \times 1)$ -wymiarowym wektorem wielkości bloków w $\mathcal{D}_{2i}$, a $k_i^{-\delta} = (D_i D'_i)^{-1}$ jest macierzą diagonalną, której elementy diagonalne są odwrotnościami odpowiednich składowych wektora k_i , wreszcie $B_{l_i}^{(i)}$ jest $(b_i \times 1)$ -wymiarowym wektorem sum blokowych dla l_i -tej cechy z jednostek S_i . Można także napisać

$$Q^{(i)} = (\Delta_i - N_i k_i^{-\delta} D_i) Y^{(i)}.$$

Okazuje się, że

$$(2.4) \quad E(Q^{(i)}) = (r_i^\delta - N_i k_i^{-\delta} N_i') \gamma^{(i)}$$

oraz że

$$(2.5) \quad \text{Cov}(Q_i^{(i)}, Q_{i'}^{(i')}) = \begin{cases} \sigma_{i_i i_i'} (r_i^\delta - N_i k_i^{-\delta} N_i') & \text{dla } i = i', \\ 0 & \text{dla } i \neq i', \end{cases}$$

gdzie $r_i = \Delta_i 1_i$ jest $(v \times 1)$ -wymiarowym wektorem replikacji w $\mathcal{D}_{2i}$, a $r_i^\delta = \Delta_i \Delta_i'$ jest macierzą diagonalną o elementach diagonalnych równych odpowiednim składowym wektora r_i . Niżej przez $r_i^{\delta/2}$ rozumiemy macierz diagonalną o elementach diagonalnych równych pierwiastkom kwadratowym tych składowych.

Wprowadzając teraz wygodną operację macierzową

$$\text{cs } Q^{(i)} = \begin{bmatrix} Q_1^{(i)} \\ Q_2^{(i)} \\ \vdots \\ Q_i^{(i)} \end{bmatrix}$$

(której używać będziemy dalej także w innych sytuacjach), możemy (2.5) zapisać w postaci

$$(2.6) \quad \text{Var}(\text{cs } Q^{(i)}) = \Sigma^{(i)} \otimes (r_i^\delta - N_i k_i^{-\delta} N_i'),$$

$$(2.7) \quad \text{Cov}(\text{cs } Q^{(i)}, \text{cs } Q^{(i')}) = 0 \quad \text{dla } i \neq i',$$

gdzie $\otimes$ jest symbolem iloczynu Kroneckera. Można też wykazać (patrz Pearce *et al.*, [4], str. 451), że

$$(2.8) \quad E(Q^{(i)}) = r_i^{\delta/2} \sum_{j=1}^{v-1} \varepsilon_{ij} p_{ij} p'_{ij} r_i^{\delta/2} \gamma^{(i)},$$

gdzie $\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}, \dots, \varepsilon_{i,v-1}$ są niezerowymi pierwiastkami charakterystycznymi macierzy

$$(2.9) \quad F_i = I - r_i^{-\delta/2} N_i k_i^{-\delta} N_i' r_i^{-\delta/2},$$

a $p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{i,v-1}$ są odpowiadającymi im wektorami charakterystycznymi dobranymi tak, że

$$(2.10) \quad p'_{ij} p_{ij} = 1 \quad \text{dla } \text{każdego } j,$$

$$(2.11) \quad p'_{ij} p_{ij'} = 0 \quad \text{dla } j \neq j'.$$

Oczywiście (2.8) wynika z równości

$$(2.12) \quad F_i = \sum_{j=1}^{v-1} \varepsilon_{ij} p_{ij} p'_{ij}.$$

W dalszym ciągu ograniczymy się do przypadku, gdy układ $\bigcup_{i=1}^u \mathcal{D}_{2i}$ jest jednorodny ze względu na postać powyższych wektorów charakterystycznych w poszczególnych $\mathcal{D}_{2i}$, $i = 1, 2, \dots, u$. Co przez to rozumiemy, określa

DEFINICJA 2.3. Układ blokowy wieloreakcyjowy nazywamy *jednorodnym*, gdy dla wszystkich jego układów cząstkowych istnieje wspólny zbiór wektorów charakterystycznych ortonormalnych macierzy F_i , $i = 1, 2, \dots, u$, to znaczy, gdy można napisać

$$(2.13) \quad p_{1j} = p_{2j} = \dots = p_{uj} (= p_j) \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, \dots, v-1,$$

a nadto wektory replikacji $r_1, r_2, \dots, r_u$ są równe lub proporcjonalne.

Można wykazać (patrz Rao [5], str. 41), że na to, aby macierze $F_1, F_2, \dots, F_u$ miały wspólny zbiór wektorów charakterystycznych ortonormalnych, potrzeba i wystarcza, by

$$F_i F_{i'} = F_{i'} F_i$$

dla każdej pary wskaźników $i \neq i'$, $i, i' = 1, 2, \dots, u$.

Ponieważ wektory charakterystyczne p_{ij} określone w (2.12) wyznaczają tak zwane kontrasty bazowe (patrz Pearce *et al.*, [4]), więc układ określony definicją 2.3 jest w istocie takim układem, w którym dla każdego układu cząstkowego $\mathcal{D}_{2i}$ istnieje ten sam zbiór $v-1$ kontrastów bazowych, choć niekoniecznie z takimi samymi współczynnikami efektywności. (Ponieważ założyliśmy, że rząd A_i jest dokładnie $b_i + v - 1$ dla każdego i ; więc kontrasty te są estymowalne w każdym $\mathcal{D}_{2i}$, choć niekoniecznie z tą samą efektywnością; rozszerzenie na przypadek, gdy nie wszystkie kontrasty bazowe są estymowalne we wszystkich układach cząstkowych jest możliwe, jednak tu nie będzie rozważane).

3. Estymacja kontrastów bazowych dla układów jednorodnych. Obecnie zajmujemy się estymacją kontrastów bazowych w doświadczeniu wielocechowym założonym w jednorodnym układzie blokowym wieloreakcyjowym niekompletnym. W tym celu zauważmy najpierw, że ze względu na (2.1), (2.8) i (2.13) możemy napisać

$$(3.1) \quad E(Q^{(i)}) = \sum_{j=1}^{v-1} \varepsilon_{ij}^* r^{\delta/2} p_j p_j' r^{\delta/2} \gamma M_i,$$

gdzie $\varepsilon_{ij}^* = a_i \varepsilon_{ij}$, przy czym współczynnik proporcjonalności a_i (którego istnienie wynika z definicji 2.3) określony jest równością

$$(3.2) \quad r_i = a_i r,$$

w której $r = r_1 + r_2 + \dots + r_u$. Zauważmy, że tak jak $\varepsilon_{ij} \in (0, 1)$, tak i $\varepsilon_{ij}^* \in (0, 1)$ dla każdego i oraz j .

Wprowadzając macierze

$$(3.3) \quad Q = [Q^{(1)}, Q^{(2)}, \dots, Q^{(u)}],$$

$$(3.4) \quad L_j = [\varepsilon_{1j}^* M_1, \varepsilon_{2j}^* M_2, \dots, \varepsilon_{uj}^* M_u],$$

dla $j = 1, 2, \dots, v-1$, możemy napisać

$$(3.5) \quad E(Q) = \sum_{j=1}^{v-1} r^{\delta/2} p_j p_j' r^{\delta/2} \gamma L_j.$$

Stąd otrzymujemy, zgodnie z (2.10) i (2.11), równości

$$E(p'_j r^{-\delta/2} Q) = p'_j r^{\delta/2} \gamma L_j, \quad j = 1, 2, \dots, v-1,$$

a wprowadzając wektory

$$(3.6) \quad c_j = r^{\delta/2} p_j, \quad j = 1, 2, \dots, v-1,$$

równości

$$(3.7) \quad E(p'_j r^{-\delta/2} Q) = c'_j \gamma L_j, \quad j = 1, 2, \dots, v-1.$$

Zauważmy, że funkcje $c'_j \gamma$, $j = 1, 2, \dots, v-1$, są kontrastami bazowymi, według terminologii Pearce'a *et al.*, [4], tutaj rozważanymi jednocześnie dla wszystkich t cech. Aby znaleźć ich estymatory w jednorodnym układzie blokowym wieloreakcyjnym niekompletnym, wygodnie jest dokonać dalszych przekształceń. Wobec (3.7) mamy

$$E(p'_j r^{-\delta/2} Q(\epsilon_j^*)^{-\delta} L'_j) = c'_j \gamma [L_j(\epsilon_j^*)^{-\delta} L'_j],$$

gdzie $(\epsilon_j^*)^\delta$ jest macierzą diagonalną o elementach diagonalnych $\epsilon_{1j}^*, \epsilon_{2j}^*, \dots, \epsilon_{uj}^*$ powtórzonych odpowiednio $t_1, t_2, \dots, t_u$ razy, to znaczy macierzą taką, że

$$(3.8) \quad (\epsilon_j^*)^{-\delta} L'_j = [M_1, M_2, \dots, M_u]', \quad L_j(\epsilon_j^*)^{-\delta} L'_j = \sum_{i=1}^u \epsilon_{ij}^* M_i M_i'.$$

Ponieważ każda z t cech obserwowana jest na jednostkach co najmniej jednego z podzbiorów S_i , więc z budowy macierzy M_i , $i = 1, 2, \dots, u$, wynika, że L_j jest macierzą pełnego rzędu wierszowego dla każdego j . Zatem macierz $[L_j(\epsilon_j^*)^{-\delta} L'_j]$ jest macierzą nieosobliwą, dla każdego j . Przyjmując teraz oznaczenie

$$(3.9) \quad [L_j(\epsilon_j^*)^{-\delta} L'_j]^{-1} = H_j$$

możemy napisać

$$(3.10) \quad E(p'_j r^{-\delta/2} Q(\epsilon_j^*)^{-\delta} L'_j H_j) = c'_j \gamma, \quad j = 1, 2, \dots, v-1.$$

To pokazuje, że $(1 \times t)$ -wymiarowy wektor

$$(3.11) \quad z'_j = p'_j r^{-\delta/2} Q(\epsilon_j^*)^{-\delta} L'_j H_j = \sum_{i=1}^u p'_j r^{-\delta/2} Q^{(i)} M_i' H_j$$

jest nieobciążonym estymatorem kontrastu bazowego $c'_j \gamma$, co zapisujemy

$$z'_j = \widehat{c'_j \gamma}, \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, v-1.$$

Wzór (3.11) możemy także napisać w postaci

$$(3.12) \quad z'_j = \sum_{i=1}^u z'_{ij} M_i' H_j,$$

gdzie $z'_{ij} = p'_j r^{-\delta/2} Q^{(i)}$ jest, zgodnie z (3.1) i (3.6), estymatorem funkcji parametrycznej $\epsilon_{ij}^* c'_j \gamma^{(i)}$ w wielozmiennej analizie wariancji dla macierzy $Y^{(i)}$.

Określimy teraz macierze kowariancji dla wektorów z_j , $j = 1, 2, \dots, v-1$. Po-

nieważ w zapisie (3.11) wektora z'_j tylko macierz Q jest macierzą zależną od obserwacji, możemy napisać (patrz Neudecker, [3], str. 954), że

$$(3.13) \quad \text{Var}(z_j) = (H'_j L_j (\epsilon_j^*)^{-\delta} \otimes p'_j r^{-\delta/2}) \text{Var}(\text{cs } Q) (H'_j L_j (\epsilon_j^*)^{-\delta} \otimes p'_j r^{-\delta/2})'.$$

Jednakże, biorąc pod uwagę (3.3) oraz korzystając z (2.6), (2.7), (3.4) i znanych równości

$$(A \otimes B)' = A' \otimes B', \quad [A, B] \otimes C = [A \otimes C, B \otimes C],$$

możemy (3.13) zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \text{Var}(z_j) &= \sum_{i=1}^u [(H'_j M_i \otimes p'_j r^{-\delta/2}) \text{Var}(\text{cs } Q^{(i)}) (M'_i H_j \otimes r^{-\delta/2} p_j)] = \\ &= \sum_{i=1}^u \{ (H'_i M_i \otimes p'_j r^{-\delta/2}) [\Sigma^{(i)} \otimes (r_i^\delta - N_i k_i^{-\delta} N'_i)] (M'_i H_j \otimes r^{-\delta/2} p_j) \}. \end{aligned}$$

Stąd, stosując dwukrotnie znaną równość

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD,$$

uzyskujemy wzór

$$\text{Var}(z_j) = \sum_{i=1}^u [H'_j M_i \Sigma^{(i)} M'_i H_j \otimes p'_j r^{-\delta/2} (r_i^\delta - N_i k_i^{-\delta} N'_i) r^{-\delta/2} p_j],$$

który, na mocy (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) i (3.2), otrzymuje ostatecznie postać

$$(3.14) \quad \text{Var}(z_j) = \sum_{i=1}^u \epsilon_{ij}^* H'_j M_i \Sigma^{(i)} M'_i H_j, \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, v-1.$$

Analiza wzoru (3.14) pokazuje, że elementy tej $(t \times t)$ -wymiarowej macierzy kowariancji mają postać

$$\frac{\sum_{i \in U_l \cap U_{l'}} \epsilon_{ij}^*}{\sum_{i \in U_l} \epsilon_{ij}^* \sum_{i \in U_{l'}} \epsilon_{ij}^*} \sigma_{ll'}, \quad l, l' = 1, 2, \dots, t,$$

gdzie U_l jest zbiorem wskaźników tych spośród podzbiorów $S_1, S_2, \dots, S_u$, w których obserwowana jest cecha l -ta. Stąd współczynnikiem efektywności układu względem j -tego kontrastu dla l -tej cechy jest

$$\sum_{i \in U_l} \epsilon_{ij}^* = \sum_{i \in U_l} a_i \epsilon_{ij}.$$

Jeśli l -ta cecha jest obserwowana we wszystkich podzbiórach S_i , $i = 1, 2, \dots, u$, to współczynnik efektywności układu względem j -tego kontrastu przyjmuje dla niej postać

$$\sum_{i=1}^u \epsilon_{ij}^* = \epsilon_j,$$

gdzie ε_j jest współczynnikiem efektywności układu względem j -tego kontrastu w układzie całościowym $\bigcup_{i=1}^u \mathcal{D}_{2i}$ rozważanym dla jednej (l -tej) cechy.

Zauważmy nadto, że jeśli w każdym z podzbiorów $S_1, S_2, \dots, S_u$ obserwowana jest tylko jedna cecha, przy czym dla każdego z nich inna, wówczas macierz (3.14) jest macierzą diagonalną. Jest to całkowicie zgodne z intuicją: obserwacje różnych cech uzyskiwane z różnych jednostek nie mogą być skorelowane.

Macierz kowariancji wektorów z_j i $z_{j'}$ jest postaci

$$\text{Cov}(z_j, z_{j'}) = (H'_j L_j (\varepsilon_j^*)^{-\delta} \otimes p'_j r^{-\delta/2}) \text{Var}(\text{cs} Q) (H'_{j'} L_{j'} (\varepsilon_{j'}^*)^{-\delta} \otimes p'_{j'} r^{-\delta/2})'.$$

Stosując do niej takie same przekształcenia jak powyżej przy wyprowadzaniu wzoru (3.14), otrzymujemy

$$\text{Cov}(z_j, z_{j'}) = 0$$

dla każdej pary $j \neq j'$, dzięki (2.11).

Z powyższych rozważań wynika, że wszystkie estymatory z'_j określone w (3.11) dla $j = 1, 2, \dots, v-1$ są wzajemnie nieskorelowane, a każdy z nich ma wartość oczekiwaną postaci (3.10) i macierz kowariancji postaci (3.14).

Aby znaleźć nieobciążony estymator macierzy (3.14), należy najpierw zauważyć, że dla każdego układu cząstkowego $\mathcal{D}_{2i}$ można uzyskać z wielozmiennej analizy wariancji przeprowadzonej na macierzy $Y^{(i)}$ odpowiednią macierz $S_e^{(i)}$ (sum kwadratów i iloczynów dla błędu) z $n_i - b_i - v + 1$ stopniami swobody, taką że

$$(3.15) \quad E(S_e^{(i)}) = (n_i - b_i - v + 1) \Sigma^{(i)}.$$

Zgodnie ze znaną postacią macierzy $S_e^{(i)}$ (patrz na przykład Ceranka i Kaczmarek, [2]) otrzymujemy więc, jako estymator nieobciążony macierzy $\Sigma^{(i)}$, macierz

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \hat{\Sigma}^{(i)} &= (n_i - b_i - v + 1)^{-1} S_e^{(i)} = \\ &= (n_i - b_i - v + 1)^{-1} [Y^{(i)'} Y^{(i)} - B^{(i)'} k_i^{-\delta} B^{(i)} - Q^{(i)'} \Omega_i Q^{(i)}], \end{aligned}$$

gdzie $B^{(i)} = [B_1^{(i)}, B_2^{(i)}, \dots, B_{i-1}^{(i)}] = D_i Y^{(i)}$, a macierz Ω_i może być zapisana (patrz Pearce *et al.*, [4]) w postaci

$$(3.17) \quad \Omega_i = r_i^{-\delta/2} \sum_{j=1}^{v-1} \varepsilon_{ij}^{-1} p_j p'_j r_i^{-\delta/2} + II' / n_i.$$

Z uwagi na (3.17) można w (3.16) wykorzystać także równość

$$(3.18) \quad Q^{(i)'} \Omega_i Q^{(i)} = \sum_{j=1}^{v-1} (\varepsilon_{ij}^*)^{-1} z_{ij} z'_{ij},$$

w której wektory z_{ij} , $j = 1, 2, \dots, v-1$, są takie jak użyte wcześniej w (3.12), dla $i = 1, 2, \dots, u$. Oczywiście, jeśli dla pewnego podzbioru $U_{[i]} = \{i_1, i_2, \dots, i_{u_i}\}$ zbioru wskaźników $\{i: i = 1, 2, \dots, u\}$ mamy

$$(3.19) \quad M_{i_1} = M_{i_2} = \dots = M_{i_{u_i}} = M_{[i]} \text{ (powiedzmy),}$$

to zachodzi równość

$$(3.20) \quad \Sigma^{(i_1)} = \Sigma^{(i_2)} = \dots = \Sigma^{(i_u)} = \Sigma^{(i)} = M'_{[i]} \Sigma M_{[i]}$$

i macierz (3.20) można estymować nieobciążenie z wielozmiennej analizy wariancji przeprowadzonej łącznie na macierzy

$$[Y^{(i_1)'}, Y^{(i_2)'}, \dots, Y^{(i_u)'}]'.$$

Wzór (3.16), z uwzględnieniem (3.18), ulega wówczas uogólnieniu do postaci

$$(3.21) \quad \hat{\Sigma}^{(i)} = \left[\sum_{i \in U_{[i]}} (n_i - b_i) - v + 1 \right]^{-1} S_e^{(i)},$$

gdzie

$$(3.22) \quad S_e^{(i)} = \sum_{i \in U_{[i]}} (Y^{(i)'} Y^{(i)} - B^{(i)'} k_i^{-\delta} B^{(i)}) - \\ - \sum_{j=1}^{v-1} \left(\sum_{i \in U_{[i]}} \varepsilon_{ij}^* \right)^{-1} \left(\sum_{i \in U_{[i]}} z_{ij} \right) \left(\sum_{i \in U_{[i]}} z'_{ij} \right).$$

Oznaczając teraz macierz $\text{Var}(z_j)$ przez Σ_j , otrzymujemy na mocy (3.14), (3.15) i (3.16), oraz ewentualnie także (3.21), jako jej estymator nieobciążony macierz

$$(3.23) \quad \hat{\Sigma}_j = H_j' \left[\sum_{i=1}^u a_i \varepsilon_{ij} M_i \hat{\Sigma}^{(i)} M_i' \right] H_j,$$

stosując w przypadku równości (3.19) estymator wspólny (3.21) w miejsce każdej z macierzy

$$\hat{\Sigma}^{(i_1)}, \hat{\Sigma}^{(i_2)}, \dots, \hat{\Sigma}^{(i_u)}.$$

Przedstawione wyniki pokazują, że aby uzyskać estymatory nieobciążone kontrastów bazowych uwzględniających wszystkie cechy (reakcje), a także estymatory nieobciążone wariancji i kowariancji powyższych estymatorów, należy przeprowadzić w zwyczajny sposób wielozmienną analizę wariancji dla każdego układu cząstkowego $\mathcal{D}_{2i}$, $i = 1, 2, \dots, u$, a następnie skorzystać z syntetyzujących wzorów (3.11) i (3.23), dla $j = 1, 2, \dots, v-1$, wykorzystując przy tym wzór (3.22), gdzie tylko jest to możliwe.

W istocie estymator (3.11) wektora $c_j' \gamma$ jest sumą estymatorów

$$(3.24) \quad x'_{ij} = z'_{ij} M_i' H_j = p_j' r^{-\delta/2} Q^{(i)} M_i' H_j, \quad i = 1, 2, \dots, u,$$

uzyskiwanych z u wielozmiennych analiz wariancji stosowanych do macierzy

$$Y^{(i)} M_i' H_j, \quad i = 1, 2, \dots, u,$$

przy czym

$$(3.25) \quad E(x'_{ij}) = \varepsilon_{ij}^* c_j' \gamma^{(i)} M_i' H_j = \varepsilon_{ij}^* c_j' \gamma M_i M_i' H_j,$$

$$(3.26) \quad \text{Var}(x_{ij}) = \varepsilon_{ij}^* H_j' M_i \Sigma^{(i)} M_i' H_j \doteq \varepsilon_{ij}^* H_j' M_i M_i' \Sigma M_i M_i' H_j$$

dla każdego i oraz j .

Także dla dowolnego wektora $d = [d_1, d_2, \dots, d_t]'$ estymatorem funkcji parametrycznej $c_j' \gamma d$ jest funkcja

$$(3.27) \quad z_j' d = \sum_{i=1}^u x_{ij}' d$$

o własnościach

$$(3.28) \quad E(z_j' d) = \sum_{i=1}^u \varepsilon_{ij}^* c_j' \gamma M_i M_i' H_j d = c_j' \gamma d,$$

$$(3.29) \quad \begin{aligned} \text{Var}(z_j' d) &= \sum_{i=1}^u \varepsilon_{ij}^* \text{Var}(x_{ij}' d) = \sum_{i=1}^u \varepsilon_{ij}^* d' H_j' M_i \Sigma^{(i)} M_i' H_j d = \\ &= \sum_{i=1}^u \varepsilon_{ij}^* d' H_j' M_i M_i' \Sigma M_i M_i' H_j d, \end{aligned}$$

przy czym równość (3.28) zachodzi z uwagi na (3.8) i (3.9).

Ponieważ, zgodnie z teorią najmniejszych kwadratów, funkcje $x_{ij}' d$, $i = 1, 2, \dots, u$, są najlepszymi (w sensie najmniejszej wariancji) liniowymi estymatorami nieobciążonymi odpowiednich funkcji $\varepsilon_{ij}^* c_j' \gamma M_i M_i' H_j d$, $i = 1, 2, \dots, u$, więc funkcja (3.27), jako ich suma, jest także najlepszym liniowym estymatorem nieobciążonym funkcji $c_j' \gamma d$ (patrz Rao, [5], str. 318).

Również podstawienie macierzy $\hat{\Sigma}^{(i)}$, określonej w (3.16) lub (3.21), do wzoru (3.29) w miejsce $\Sigma^{(i)}$, dla $i = 1, 2, \dots, u$, zapewnia uzyskanie estymatora nieobciążonego wariancji $\text{Var}(z_j' d)$. O własnościach tego estymatora niewiele można powiedzieć poza tym, że jest sumą estymatorów wariancji uzyskiwanych metodą najmniejszych kwadratów. Wydaje się jednak, że będzie on tym lepszy, im większa będzie liczba stopni swobody każdego estymatora składowego. Toteż pewną możliwość jego dalszego poprawienia daje następujące spostrzeżenie: Jeśli dla pewnego podzbioru wskaźników $U_{[i]} = \{i_1, i_2, \dots, i_{u_i}\}$ zachodzą równości

$$(3.30) \quad M_{i_1} M_{i_1}' H_j d = M_{i_2} M_{i_2}' H_j d = \dots = M_{i_{u_i}} M_{i_{u_i}}' H_j d,$$

to, zgodnie z (3.26),

$$\text{Var}(x_{i_1 j}' d) = \text{Var}(x_{i_2 j}' d) = \dots = \text{Var}(x_{i_{u_i} j}' d)$$

i można uzyskać jeden estymator tej wariancji z analizy wariancji przeprowadzonej łącznie dla wektorów obserwacji przekształconych

$$Y^{(i_1)} M_{i_1}' H_j d, Y^{(i_2)} M_{i_2}' H_j d, \dots, Y^{(i_{u_i})} M_{i_{u_i}}' H_j d.$$

Zatem, w przypadku estymacji wariancji (3.29) możemy zamiast warunku (3.19) rozważać słabszy warunek (3.30) i — w przypadku jego spełnienia — odpowiednio wykorzystywać wspólny średni kwadrat dla błędu.

Dodajmy, że warunek (3.30) oznacza tyle, że cechom obserwowanym w $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_{u_i}}$ odpowiadają dokładnie te same składowe wektora d . Jeśli na przykład $z_j' d$ jest estymatorem j -tego kontrastu bazowego rozpatrywanego dla różnicy między

l -tą a l' -tą cechą, to dla estymowania wariancji $\text{Var}(z'_j d)$, określonej wzorem (3.29), wystarczy przeprowadzić (najwyżej) trzy analizy wariancji: (a) dla jednostek doświadczalnych, na których obserwowane są obie cechy razem, (b) dla jednostek, na których obserwowana jest cecha pierwsza ale bez cechy drugiej, (c) dla jednostek, na których obserwowana jest cecha druga bez cechy pierwszej.

4. Przykład. Przedstawioną w poprzednich paragrafach teorię zilustrujemy obecnie prostym przykładem, sztucznie skonstruowanym dla celów demonstracyjnych.

Przypuśćmy, że interesuje nas wpływ $v = 4$ obiektów doświadczalnych na $t = 3$ cechy oraz że odpowiedni eksperyment przeprowadzony został na $n = 56$ jednostkach doświadczalnych, występujących w czterech podzbiorach, S_1, S_2, S_3, S_4 , odpowiednio o $n_1 = 12, n_2 = 8, n_3 = 12, n_4 = 24$ jednostkach. Sposób wykorzystania tych jednostek w doświadczeniu określa układ wieloreakcyjowy $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_{21}, \mathcal{D}_{22}, \mathcal{D}_{23}, \mathcal{D}_{24})$, gdzie układy cząstkowe $\mathcal{D}_{2i}, i = 1, 2, 3, 4$, są układami blokowymi (kompletnymi lub nie), a układ reakcji $\mathcal{D}_1$ jest określony następującą tabelką:

Podzbiór	S_1	S_2	S_3	S_4
Numery cech	1, 2	1, 3	2, 3	1, 2, 3

Górny wiersz tabelki podaje podzbiory jednostek, a dolny numery zmiennych obserwowanych w tych podzbiorach. Układy cząstkowe określone są przez macierze incydencji

$$N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$N_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zgodnie z powyższym, w podzbiorze S_1 jednostki zgrupowane są w $b_1 = 4$ blokach trójelementowych, w podzbiorze S_2 także w $b_2 = 4$ blokach, lecz dwuelementowych, w podzbiorze S_3 w $b_3 = 3$ blokach kompletnych, natomiast w S_4 jednostki zgrupowane są w $b_4 = 8$ blokach, z których każdy ma trzy elementy. Na jednostkach z podzbiorów S_1, S_2, S_3 obserwujemy po dwie cechy, to znaczy $t_1 = t_2 = t_3 = 2$, a na jednostkach z podzbioru S_4 wszystkie trzy cechy, to znaczy $t_4 = 3$. Stąd macierze M_i ze wzoru (2.1) są postaci

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

W tablicy 4.1 zestawione są wyniki tego doświadczenia. Na ich podstawie chcemy obliczyć wartości estymatorów kontrastów bazowych i oceny ich macierzy kowariancji.

Zgodnie z opisem układów cząstkowych $\mathcal{D}_{2i}$, $i = 1, 2, 3, 4$, wektory replikacji r_i oraz wektory wielkości bloków k_i są następujące:

$$r_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad r_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad r_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad r_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix},$$

$$k_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad k_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad k_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad k_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Jak widać, wektory replikacji są proporcjonalne. Wektorem replikacji z układu całościowego jest $r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = [14, 14, 14, 14]'$. Współczynniki proporcjonalności określone w (3.2) mają więc wartości $a_1 = 3/14$, $a_2 = 2/14$, $a_3 = 3/14$, $a_4 = 6/14$. Spełniony jest zatem drugi z warunków definicji 2.3.

Stosując wzór (2.9) obliczamy macierze F_i , $i = 1, 2, 3, 4$, a następnie ich pierwiastki i wspólne wektory charakterystyczne. (Podczas obliczeń pamiętamy o warunkach (2.10)–(2.13)). Otrzymujemy

$$F_1 = -\frac{2}{9} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$F_3 = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad F_4 = -\frac{2}{9} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że $F_i F_2 = F_2 F_i$ dla $i = 1, 3, 4$ oraz że $F_1 = (8/9)F_3 = F_4$, a tym samym spełniony jest pierwszy warunek definicji 2.3. Niezerowymi pierwiastkami charakterystycznymi macierzy F_i , $i = 1, 2, 3, 4$, są odpowiednio $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = 8/9$, $\varepsilon_{21} = 1$, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{23} = 1/2$, $\varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = \varepsilon_{33} = 1$, $\varepsilon_{41} = \varepsilon_{42} = \varepsilon_{43} = 8/9$. Odpowiadają im wspólne dla wszystkich F_i , $i = 1, 2, 3, 4$, (ortonormalne) wektory charakterystyczne

$$p_1 = \begin{bmatrix} -0,5 \\ -0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \quad p_2 = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ -0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \quad p_3 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ -0,5 \\ -0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}.$$

TABLICA 4.1
 Obserwacje cech z poszczególnych jednostek doświadczalnych

Nr jednostki w podzbiorze	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nr bloku w podzbiorze	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4
Nr obiektu	1	2	3	1	2	4	1	3	4	2	3	4
Podzbiór	Cecha					Obserwacje						
S_1	1	5	9	2	4	5	6	9	7	6	6	4
	2	8	8	9	11	15	5	12	12	6	6	13
Nr jednostki w podzbiorze	1	2	3	4	5	6	7	8				
Nr bloku w podzbiorze	1	1	2	2	3	3	4	4				
Nr obiektu	1	3	1	4	2	3	2	4				
Podzbiór	Cecha					Obserwacje						
S_2	1	2	8	7	4	3	3	5	8			
	3	10	17	15	12	11	13	17	19			
Nr jednostki w podzbiorze	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nr bloku w podzbiorze	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3
Nr obiektu	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Podzbiór	Cecha					Obserwacje						
S_3	2	5	5	9	8	11	15	8	7	7	14	13
	3	10	11	18	19	20	18	15	12	11	10	18
Nr jednostki w podzbiorze	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Nr bloku w podzbiorze	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4
	5	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	8
Nr obiektu	1	2	3	1	2	3	1	2	4	1	2	4
	1	3	4	1	3	4	2	3	4	2	3	4
Podzbiór	Cecha					Obserwacje						
S_4	1	2	2	5	2	9	9	8	3	4	4	7
		6	6	5	5	7	3	3	2	8	9	7
	2	15	14	14	5	6	6	9	7	10	11	8
		8	7	9	10	12	5	5	6	14	15	13
	3	19	20	20	18	11	11	12	13	13	17	15
		19	19	20	11	10	10	11	14	17	18	19

Tak więc spełnione są oba warunki definicji 2.3 i możliwe jest przeprowadzenie estymacji omówionej w § 3. Stosując wzory (2.2), (2.3) i (3.3) obliczamy najpierw macierz

$$Q = [Q^{(1)}, Q^{(2)}, Q^{(3)}, Q^{(4)}].$$

Otrzymujemy

$$Q = \begin{bmatrix} -0,33 & 2,33 & -1,50 & -2,00 & -5,00 & -4,00 & -4,00 & 2,33 & 4,67 \\ 5,33 & 2,00 & -1,50 & -2,00 & 6,00 & -6,00 & 0,67 & -2,67 & -6,00 \\ -3,67 & 0,33 & 3,00 & 4,50 & 2,00 & 6,00 & 3,67 & -1,00 & -3,00 \\ -1,33 & -4,67 & 0,00 & -0,50 & -3,00 & 4,00 & -0,33 & 1,33 & 4,33 \end{bmatrix}.$$

Korzystając następnie ze wzoru (3.24) obliczamy wektory

$$\begin{aligned} x'_{11} &= [-1,871 \quad -1,474 \quad 0], & x'_{12} &= [1,663 \quad -0,907 \quad 0], \\ x'_{21} &= [1,122 \quad 0 \quad 1,448], & x'_{22} &= [-0,624 \quad 0 \quad -0,802], \\ x'_{31} &= [0 \quad -0,340 \quad 3,621], & x'_{32} &= [0 \quad 1,020 \quad -0,802], \\ x'_{41} &= [1,247 \quad 0,113 \quad 0,483], & x'_{42} &= [0,139 \quad -0,454 \quad -0,668], \\ & & x'_{13} &= [-0,693 \quad -0,794 \quad 0], \\ & & x'_{23} &= [-0,624 \quad 0 \quad -1,002], \\ & & x'_{33} &= [0 \quad -2,721 \quad 0], \\ & & x'_{43} &= [-1,802 \quad 1,247 \quad 3,608], \end{aligned}$$

z których, zgodnie z (3.11), (3.12) i (3.24), uzyskujemy wektory

$$\begin{aligned} z'_1 &= [0,449 \quad -1,701 \quad 5,552], \\ z'_2 &= [1,179 \quad -0,341 \quad -2,472], \\ z'_3 &= [-3,118 \quad -2,268 \quad 2,606], \end{aligned}$$

będące, na mocy (3.6) i (3.10), ocenami nieobciążonymi kontrastów bazowych $c'_1\gamma$, $c'_2\gamma$ i $c'_3\gamma$ określonych za pomocą wektorów

$$c_1 = \begin{bmatrix} -1,871 \\ -1,871 \\ 1,871 \\ 1,871 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} -1,871 \\ 1,871 \\ -1,871 \\ 1,871 \end{bmatrix}, \quad c_3 = \begin{bmatrix} 1,871 \\ -1,871 \\ -1,871 \\ 1,871 \end{bmatrix}.$$

Kolejne składowe wektorów z_j , $j = 1, 2, 3$, są oczywiście estymatorami kolejnych trzech cech.

Następnie, stosując wzór (3.16), obliczamy macierze

$$\begin{aligned} M_1 \hat{\Sigma}^{(1)} M'_1 &= \begin{bmatrix} 3,383 & -3,650 & 0 \\ -3,650 & 19,250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & M_2 \hat{\Sigma}^{(2)} M'_2 &= \begin{bmatrix} 18,0 & 0 & 15,0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 15,0 & 0 & 12,5 \end{bmatrix}, \\ M_3 \hat{\Sigma}^{(3)} M'_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9,472 & 10,764 \\ 0 & 10,764 & 20,639 \end{bmatrix}, & M_4 \hat{\Sigma}^{(4)} M'_4 &= \begin{bmatrix} 6,439 & 4,220 & -1,340 \\ 4,220 & 6,804 & 1,229 \\ -1,340 & 1,229 & 3,074 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Z nich, wykorzystując wzory (3.9) i (3.23), obliczamy oceny macierzy kowariancji wektorów z_j , dla $j = 1, 2, 3$, otrzymując

$$\hat{\Sigma}_1 = \begin{bmatrix} 11,111 & 1,625 & 3,096 \\ 1,625 & 13,426 & 4,785 \\ 3,096 & 4,785 & 13,545 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\Sigma}_2 = \begin{bmatrix} 10,606 & 1,806 & 1,309 \\ 1,806 & 13,426 & 5,297 \\ 1,309 & 5,297 & 14,594 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\Sigma}_3 = \begin{bmatrix} 10,606 & 1,806 & 1,309 \\ 1,806 & 13,426 & 5,297 \\ 1,309 & 5,297 & 14,594 \end{bmatrix}.$$

Z powyższych wyników, jako dotyczących kontrastów bazowych, możemy uzyskać oceny dowolnych kontrastów między obiektami oraz oceny macierzy kowariancji tych ocen.

Bibliografia

- [1] T. Caliński, *On some desirable patterns in block designs*, Biometrics 27 (1971), str. 275–292.
- [2] B. Ceranka i Z. Kaczmarek, *Zastosowanie wielozmiennej analizy wariancji dla nieortogonalnych układów blokowych*, Listy Biometryczne 34–36 (1972), str. 1–15.
- [3] H. Neudecker, *Some theorems on matrix differentiation with special reference to Kronecker matrix products*, J. Amer. Statist. Assoc. 64 (1969), str. 953–963.
- [4] S.C. Pearce, T. Caliński and T.F. de C. Marshall, *The basic contrasts of an experimental design with special reference to the analysis of data*, Biometrika 61 (1974), str. 449–460.
- [5] C.R. Rao, *Linear statistical inference and its applications*, 2nd ed., New York 1973.
- [6] J.N. Srivastava, *Incomplete multiresponse designs*, Sankhyā A 26 (1966), str. 377–388.
- [7] — *On a general class of designs for multiresponse experiments*, Ann. Math. Statist. 39 (1968), str. 1825–1843.

ZAKŁAD METOD MATEMATYCZNYCH I STATYSTYCZNYCH
AKADEMII ROLNICZEJ W POZNANIU