



SZCZEPAN PERZ i LESZEK ZAREMBA (Warszawa)

Twierdzenia Koeniga i Birkhoffa i ich związek z zagadnieniem minimalizacji czasu trwania pomiarów automatycznych łączy telekomunikacyjnych*

(Praca wpłynęła do Redakcji 1.12.1979)

1. Wstęp. W pracy tej rozważać będziemy problem minimalizacji czasu potrzebnego do pomiaru parametrów wszystkich telekomunikacyjnych łączy w pewnej sieci łączy międzymiastowych. Przyjmijmy następujące założenia:

(i) dla każdego $i, 1 \leq i \leq p$, oraz $j, 1 \leq j \leq p$, zadana jest liczba k_{ij} łączy do zmierzenia między węzłem „ i ”-tym a „ j ”-tym (p oznacza tu liczbę wszystkich węzłów),

(ii) pomiar jednego łącza trwa jednostkę czasu,

(iii) pomiaru łącza relacji (i, j) można dokonać tylko wtedy, gdy współpracują ze sobą aparat wyjściowy znajdujący się w i -tym węźle oraz aparat wejściowy w j -tym węźle,

(iv) w każdym węźle jest dokładnie jeden aparat typu wyjściowego i jeden aparat typu wejściowego,

(v) w każdej chwili aparat pomiarowy może mierzyć co najwyżej jedno łącze.

Celem naszym jest wykazanie istnienia optymalnej procedury wykonywania pomiarów oraz podanie minimalnego czasu trwania odpowiadającego tej procedurze (por. [3], gdzie zagadnienie powyższe zostało sformułowane i rozwiązane przy użyciu twierdzeń, których dowody znajdują się w niniejszej pracy). Przypadek ogólniejszy, gdy zamiast (iv) zakładamy niżej sformułowany warunek (iv'), w dość prosty sposób daje się rozwiązać w oparciu o wyniki tej pracy (zob. [5]). Oto jego treść:

(iv') w każdym węźle jest pewna skończona liczba aparatów pomiarowych.

Rozwiązanie zagadnienia w przypadku (iv') polega, z grubsza mówiąc, na tym, że najpierw w ramach każdej pary węzłów po równo rozkładamy zadania na znajdujące się tam aparaty pomiarowe, a potem, traktując poszczególne aparaty jako węzły, stosujemy wyniki prezentowanej pracy.

* Problem węzłowy 06.5.1 (resort łączności).

Inaczej mówiąc, zagadnienie polega na dobraniu takich współczynników λ_i w przedstawieniu

$$(1.1) \quad K = \sum \lambda_i \cdot E_i,$$

aby

(i) E_i były macierzami zerojedynkowymi, o co najwyżej jednej jedynce w każdej kolumnie i w każdym wierszu,

(ii) λ_i były nieujemnymi liczbami całkowitymi,

(iii) $\sum \lambda_i$ przyjmowała wartość najmniejszą spośród wszystkich przedstawień postaci (1.1) spełniających warunki (i), (ii) oraz na podanie wzoru na minimalną sumę.

W istocie pokażemy istnienie liczb λ_i^* , dla których zachodzi nierówność $\sum \lambda_i^* \leq \sum \lambda_i$ przy dowolnym układzie liczb λ_i spełniającym (wraz z pewnymi macierzami E_i) związki (1.1), (i) oraz warunek

(ii') λ_i są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi.

Okaże się przy tym (zob. wniosek 5.2), że λ_i^* są liczbami naturalnymi, a najkrótszy czas pomiaru wszystkich łączy ($\sum \lambda_i^*$) wyraża się wzorem (2.3); jest zatem znany jeszcze przed rozpoczęciem pomiarów.

2. Definicje i oznaczenia.

DEFINICJA 2.1. Parę pokryw H_1, H_2 dowolnego zbioru $\bar{X}$ nazwiemy *parą maksymalnie transwersalnych pokryw* (PMTF), jeśli

$$(2.1) \quad \begin{aligned} H_1 &= \{m \subset \bar{X}: \#(m \cap m') \leq 1 \quad \forall m' \in H_2\}, \\ H_2 &= \{m \subset \bar{X}: \#(m \cap m') \leq 1 \quad \forall m' \in H_1\}, \end{aligned}$$

gdzie $\#$ oznacza moc zbioru.

Pokrycia maksymalnie transwersalne odgrywają zasadniczą rolę w problematyce grafów doskonałych, w której poczesne miejsce zajmują hipotezy Berge'a (zob. dyskusja w § 5 bezpośrednio po wniosku 5.2).

Zauważmy, że każda rodzina H podzbiorów $\bar{X}$, czyli hypergraf H na $\bar{X}$ (zob. [1], str. 389), wyznacza jednoznacznie normę na przestrzeni R^n , $n = \# \bar{X}$, mianowicie

$$(2.2) \quad \varphi_H(x) = \max_{h \in H} \sum_{i \in h} |x_i|, \quad x \in R^n.$$

DEFINICJA 2.2. Przez *nośnik macierzy* K rozumiemy zbiór

$$n(K) = \{(i, j): k_{ij} \neq 0\}.$$

DEFINICJA 2.3. *Stopniem macierzy* K *względem hypergrafu* H nazwiemy wielkość

$$s_H(K) = \max_{h \in H} \#(n(K) \cap h).$$

Niech teraz X będzie zbiorem indeksów macierzy prostokątnej $p \times q$, $p \leq q$. W pracy tej przez *linię* rozumiemy taki podzbiór X , który odpowiada pewnej kolumnie bądź wierszowi. Natomiast *permutacją* nazywać będziemy taki podzbiór $m \subset X$, dla którego

- (i) część wspólna m z dowolną linią jest co najwyżej jednoelementowa,
- (ii) m nie jest podzbiorem żadnego m' (różnego od m) spełniającego (i).

Rodziny linii na X oraz permutacje oznaczamy będziemy przez H_L , H_P , odpowiadające im normy φ_{H_L} , φ_{H_P} przez $\varphi_{w/l}$, $\varphi_{w/p}$ (norma według linii, norma według permutacji). W dalszej części pracy interesować nas będą tylko te dwie normy określone dla $x \in R^{p \times q}$, czyli dla macierzy prostokątnych o p wierszach i q kolumnach. Mamy więc

$$(2.3) \quad \varphi_{w/l}(\mathbf{K}) = \max \left(\max_i \sum_{j=1}^q |k_{ij}|, \max_j \sum_{i=1}^p |k_{ij}| \right),$$

$$(2.4) \quad \varphi_{w/p}(\mathbf{K}) = \max_{\sigma} \sum_{i=1}^p |k_{i\sigma(i)}|,$$

σ jest permutacją p spośród q kolumn.

DEFINICJA 2.4. Przez *stopień liniowy macierzy* $\mathbf{K}$ będziemy rozumieć stopień $\mathbf{K}$ względem hypergrafu H_L , a więc wielkość

$$(2.5) \quad s_L(\mathbf{K}) = \max_{h \in H_L} \#(n(\mathbf{K}) \cap h),$$

stopień permutacyjny zaś określamy wzorem

$$(2.6) \quad s_P(\mathbf{K}) = \max_{h \in H_P} \#(n(\mathbf{K}) \cap h).$$

Przyjmijmy teraz podstawowe w tej pracy oznaczenia.

$$(2.7) \quad B_L = \{\mathbf{K} \in R^{pq} : \varphi_{w/l}(\mathbf{K}) \leq 1\}, \quad B_P = \{\mathbf{K} \in R^{pq} : \varphi_{w/p}(\mathbf{K}) \leq 1\},$$

oraz

$$B_L^1 = B_L \cap \{\mathbf{K} : k_{ij} \geq 0 \ \forall i, j\}, \quad B_P^1 = B_P \cap \{\mathbf{K} : k_{ij} \geq 0 \ \forall i, j\}.$$

Zauważmy, że zdefiniowane powyżej cztery zbiory są wypukłe, ograniczone i domknięte, a więc na mocy wniosku 18.5.1 z [4] są uwypukleniami swych punktów ekstremalnych.

3. Charakteryzacja punktów ekstremalnych zbiorów B_L , B_P , B_L^1 , B_P^1 . Przed wykazaniem podstawowego dla nas twierdzenia 3.3 podamy krótki dowód twierdzenia Koeniga (por. twierdzenie 11.2.1 z [2]).

TWIERDZENIE 3.1 (Koenig, 1931). *Niech dana będzie macierz zerojedynkowa $\mathbf{K}$. Wówczas najmniejsza liczba pokrywających wszystkie jedynki macierzy $\mathbf{K}$ równa jest jej permutacyjnemu stopniowi.*

D o w ó d. Bez zmniejszania ogólności przyjmijmy (przedstawiając ewentualnie wiersze i kolumny, co jest dozwolone), że

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \\ \mathbf{K}_3 & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

gdzie $\mathbf{K}_1$ ma na głównej przekątnej jedynki oraz jest macierzą kwadratową stopnia $r = s_P(\mathbf{K})$. Niech X_i , $i = 1, 2, 3, 4$, oznaczają zbiory indeksów odpowiednio dla macierzy $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{K}_3$ oraz $\mathbf{K}_4 = \mathbf{0}$. Połóżmy

$$(3.1) \quad Z_1 = \{(i, j) \in X_2 : k_{ij} = 1\}.$$

Niech $W_1^1, \dots, W_{r_1}^1$ będzie najmniejszą liczbą wierszy zawierających Z_1 . Zauważmy, że jeśli $(i, j) \in Z_1$, to dla każdego $(n, i) \in X_3$ mamy $k_{pi} = 0$ (w przeciwnym wypadku otrzymalibyśmy $r+1$ jedynek na pewnej permutacji, czyli $s_p(\mathbf{K}) > r$). Niech dalej

$$(3.2) \quad \begin{aligned} Z'_2 &= \{(m, i) \in X_1 : k_{mi} = 1 \text{ oraz } \exists j \text{ dla którego } (i, j) \in Z_1\}, \\ Z_2 &= Z'_2 \setminus (W_1^1 \cup W_2^1 \cup \dots \cup W_{r_1}^1). \end{aligned}$$

Jeśli $Z_2 \neq \emptyset$, to wybieramy najmniejszą liczbę wierszy $W_1^2, \dots, W_{r_2}^2$, które zawierają Z_2 . Zauważmy, że jeśli $(m, i) \in Z_2$, to dla każdego $(r, m) \in X_3$ mamy, podobnie jak poprzednio, $k_{rm} = 0$. Niech z kolei

$$(3.3) \quad \begin{aligned} Z'_3 &= \{(n, m) \in X_1 : k_{nm} = 1 \text{ oraz } \exists i, \text{ że } (m, i) \in Z_2\}, \\ Z_3 &= Z'_3 \setminus (W_1^2 \cup \dots \cup W_{r_2}^2). \end{aligned}$$

Postępowanie powyższe kontynuujemy, aż po raz pierwszy, dla pewnego k , $Z_k = \emptyset$. Wówczas za pozostałe $s_p(\mathbf{K}) - (r_1 + r_2 + \dots + r_k)$ linii wybieramy kolumny przechodzące przez te indeksy (i, i) , $1 \leq i \leq r$, które nie były zawarte w żadnym z uprzednio wybranych wierszy. Twierdzenie jest udowodnione. ■

TWIERDZENIE 3.2. *Macierz $\mathbf{K} \in B_L^1$ jest punktem ekstremalnym zbioru B_L^1 wtedy i tylko wtedy, gdy*

- (i) $k_{ij} \in \{0, 1\}$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$,
- (ii) istnieje permutacja h taka, że $n(\mathbf{K}) \subset h$.

D o w ó d. Łatwo sprawdzić że warunki (i), (ii) są dostateczne. Niech teraz $\bar{\mathbf{K}} = [\bar{k}_{ij}]$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$, będzie punktem ekstremalnym zbioru B_L^1 . Wystarczy dowieść warunku (i), z którego natychmiast wynika (ii). Dowód przeprowadzimy nie wprost, zakładając że dla pewnej pary (r, s) mamy

$$(3.4) \quad 0 < \bar{k}_{rs} < 1.$$

Jeśli $p < q$, to rozumowanie przeprowadzamy dla macierzy kwadratowej

$$(3.5) \quad \mathbf{K} = [k_{ij}] = \begin{cases} \bar{k}_{ij}, & 1 \leq i \leq p, \\ 0, & p < i \leq q. \end{cases}$$

Rozróżniamy dwa przypadki. Jeśli $\text{per}(\mathbf{K}) > 0$, gdzie permutant dany jest wzorem $\text{per}(\mathbf{K}) = \sum_{\sigma} \prod k_{i\sigma(i)}$, σ oznacza tu dowolną permutację kolumn a $\prod$ iloczyn, to istnieje permutacja q kolumn $\sigma^* = \{j_1, j_2, \dots, j_q\}$ taka, że $k_{ij_i} \neq 0$ dla $1 \leq i \leq q$. Zatem

$$(3.6) \quad \mathbf{K} = a\mathbf{K}^1 + (1-a)\mathbf{K}^2, \quad a = \min_i k_{ij_i},$$

$$(3.7) \quad 0 < a < 1, \quad \mathbf{K}^1 \neq \mathbf{K}^2, \quad \mathbf{K}^i \in B_L^1, \quad i = 1, 2,$$

gdzie

$$(3.8) \quad \mathbf{K}^1 = [k_{ij}^1] = \begin{cases} 1, & j = j_i, \\ 0, & j \neq j_i, \end{cases} \quad \mathbf{K}^2 = \frac{1}{1-a} \cdot (\mathbf{K} - a\mathbf{K}^1).$$

Łatwo sprawdzić, że warunki (3.6)–(3.8) są spełnione, a więc $\mathbf{K} = \bar{\mathbf{K}}$ nie może być punktem ekstremalnym.

Niech teraz $\text{per}(\mathbf{K}) = 0$. Wówczas $s_p(\mathbf{K}) < q$, zatem z twierdzenia 2.1 oraz z tego że $\mathbf{K} \in B_L^1$ wynika, iż suma wszystkich elementów macierzy nie przekracza $q-1$. Dla pewnych (i_0, j_0) mamy więc

$$(3.9) \quad \sum_{i=1}^q k_{i j_0} < 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{j=1}^q k_{i_0 j} < 1.$$

Niech $Y(\mathbf{K})$ oznacza zbiór tych (i_0, j_0) dla których zachodzi (3.9). Jeśli teraz dla pewnego $(i_0, j_0) \in Y(\mathbf{K})$ mamy $k_{i_0 j_0} > 0$, to $\mathbf{K} = \frac{1}{2}\mathbf{K}^1 + \frac{1}{2}\mathbf{K}^2$, gdzie przy pewnym dodatnim ε

$$(3.10) \quad \mathbf{K}^1 = \mathbf{K} + \mathbf{K}^3, \quad \mathbf{K}^2 = \mathbf{K} - \mathbf{K}^3, \quad \mathbf{K}^3 = [k_{ij}^3] = \begin{cases} \varepsilon, & (i, j) = (i_0, j_0), \\ 0, & (i, j) \neq (i_0, j_0), \end{cases}$$

co jest niemożliwe, gdyż $\mathbf{K}$ jest punktem ekstremalnym, $\mathbf{K}^1, \mathbf{K}^2$ są elementami B_L^1 . Istnieje zatem taki $(p, q) \in Y(\mathbf{K})$, dla którego $k_{pq} = 0$. Przyjmując dla odpowiedniego ε

$$\mathbf{K}^{(1)} = [k_{ij}^{(1)}] = \begin{cases} k_{ij}, & (i, j) \neq (p, q), \\ \varepsilon, & (i, j) = (p, q), \end{cases}$$

otrzymujemy, że dla $\mathbf{K}^{(1)} \in B_L^1$, $(p, q) \in Y(\mathbf{K}^{(1)})$. Jeśli w dalszym ciągu $\text{per}(\mathbf{K}^{(1)}) = 0$, to postępowanie powyższe kontynuujemy, otrzymując, dla pewnego l , $\text{per}(\mathbf{K}^{(l)}) > 0$. Wówczas, podobnie jak to było z macierzą $\mathbf{K}$ (por. wzory (3.6)–(3.8)), otrzymujemy

$$\mathbf{K}^{(l)} = a \cdot \mathbf{K}^1 + (1-a) \cdot \mathbf{K}^2.$$

Oznaczmy przez $A: R^{pq} \rightarrow R^{pq}$ operator rzutowania określony wzorem

$$A(\mathbf{L}) = \mathbf{L}^*, \quad \mathbf{L}^* = [l_{ij}^*] = \begin{cases} l_{ij} & k_{ij}^{(l)} = k_{ij}, \\ 0, & \text{dla pozostałych.} \end{cases}$$

Otrzymujemy

$$\mathbf{K} = A(\mathbf{K}^{(l)}) = a \cdot A(\mathbf{K}^1) + (1-a) \cdot A(\mathbf{K}^2)$$

i w konsekwencji

$$(3.11) \quad \mathbf{K} = a \bar{\mathbf{K}}^1 + (1-a) \cdot \bar{\mathbf{K}}^2, \quad 0 < a < 1, \quad \bar{\mathbf{K}}^i \in B_L^1, \quad i = 1, 2.$$

Ponadto $\bar{\mathbf{K}}^1 \neq \bar{\mathbf{K}}^2$. Rzeczywiście, z uwagi na postać $\bar{\mathbf{K}}^1$ równość $\bar{k}_{rs}^1 = \bar{k}_{rs}^2$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\bar{k}_{rs}^1 = \bar{k}_{rs}^2 \in \{0, 1\}$, co jest niemożliwe ze względu na (3.4). Otrzymaliśmy więc warunek (3.11) sprzeczny z ekstremalnością punktu $\mathbf{K}$. ■

TWIERDZENIE 3.3. *Macierz $\mathbf{K} \in B_L$ jest punktem ekstremalnym B_L wtedy i tylko wtedy, gdy*

- (i) $k_{ij} \in \{0, -1, +1\}$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$,
- (ii) *istnieje permutacja h taka, że $n(\mathbf{K}) = h$.*

D o w ó d. Rozumujemy tak jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia do momentu uzyskania związków (3.9). Następnie, niezależnie od tego, czy $(i_0, j_0) \in Y(\mathbf{K})$, postępujemy jak poprzednio dochodząc do sprzeczności, co kończy przeprowadzany przez nas dowód nie wprost. ■

4. Minimalizacja czasu trwania pomiarów łączy międzymiastowych. Niech $\mathbf{K}$ będzie macierzą określającą liczbę łączy między poszczególnymi węzłami (por. rozdział 1). Wówczas $\mathbf{K} \cdot [\varphi_{w/l}(\mathbf{K})]^{-1} \in B_L^1$. Z twierdzenia 3.2 oraz wniosku 18.5.1 z [4], otrzymujemy

$$(4.1) \quad \mathbf{K} = \sum \lambda_i^* \mathbf{E}_i, \quad \sum \lambda_i^* = \varphi_{w/l}(\mathbf{K}),$$

gdzie λ_i^* są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi, $\mathbf{E}_i$ zaś macierzami spełniającymi warunki (i) oraz (ii) z twierdzenia 3.2. Z drugiej strony, jeśli $\mathbf{K} = \sum \mu_j \mathbf{E}_j$, gdzie $\mathbf{E}_j$ są punktami ekstremalnymi zbioru B_L^1 , to

$$\varphi_{w/l}(\mathbf{K}) \leq \sum \mu_j \cdot \varphi_{w/l}(\mathbf{E}_j) = \sum \mu_j.$$

Nierówność ostatnia pokazuje, że $\varphi_{w/l}(\mathbf{K})$ jest minimalnym czasem trwania pomiarów, gdyż w istocie λ_i^* występujące w (4.1) są nieujemne i całkowite, o czym mówi wniosek 5.2.

5. Wnioski.

WNIOSEK 5.1 (dualne twierdzenie Koeniga). *Dla dowolnej zerojedynkowej macierzy $\mathbf{K}$ najmniejsza ilość permutacji pokrywających wszystkie jedynki z $\mathbf{K}$ równa jest liniowemu stopniowi macierzy $\mathbf{K}$.*

D o w ó d. Ponieważ $\mathbf{K} \in B_L^1$, zatem rozumując jak w § 4 otrzymujemy

$$(5.1) \quad \mathbf{K} = \sum \lambda_i^* \mathbf{E}_i, \quad \sum \lambda_i^* = \varphi_{w/l}(\mathbf{K}) = s_L(\mathbf{K}).$$

Skorzystaliśmy tu z oczywistej równości $\varphi_{w/l}(\mathbf{K}) = s_L(\mathbf{K})$ dla macierzy zerojedynkowych (por. (2.5)). Zatem przedstawienie (5.1) jest optymalne w sensie minimalizacji sumy współczynników. Weźmy pod uwagę jedną z macierzy $\mathbf{E}_i$ występujących w (5.1), np. $\mathbf{E}_1$, i połóżmy $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K} - \lambda_1^* \cdot \mathbf{E}_1 \in B_L^1$. Pokażemy, że

$$(5.2) \quad \varphi_{w/l}(\mathbf{K}_1) = \varphi_{w/l}(\mathbf{K}) - \lambda_1^*.$$

W tym celu wystarczy zauważyć (korzystając z (5.1)), że

$$\varphi_{w/l}(\mathbf{K}_1) \leq \sum_{i \neq 1} \lambda_i^* = \varphi_{w/l}(\mathbf{K}) - \lambda_1^*$$

oraz

$$\varphi_{w/l}(\mathbf{K}) \leq \varphi_{w/l}(\mathbf{K}_1) + \lambda_1^*.$$

Z (5.2) wynika, iż nośnik macierzy $\mathbf{E}_1$ przecina się z każdą linią h , dla której $\sum_{i \in h} |x_i|$ przyjmuje wartość największą (równą $\varphi_{w/l}(\mathbf{K})$) na tych indeksach $(i, j) \in X$, na których macierz $\mathbf{K}$ ma niezerowe elementy. Stąd

$$(5.3) \quad s_L(\mathbf{K} - \mathbf{E}_1) = \varphi_{w/l}(\mathbf{K} - \mathbf{E}_1) = \varphi_{w/l}(\mathbf{K}) - 1 = s_L(\mathbf{K}) - 1.$$

Dowodząc wniosku indukcyjnie i korzystając z (5.3) otrzymujemy żadaną tezę. ■

WNIOSEK 5.2. *Dla dowolnej macierzy $\mathbf{K}$ o współczynnikach naturalnych liczby λ_i^* występujące w przedstawieniu (4.1) są całkowite i nieujemne.*

D o w ó d. Prowadzimy dowód indukcyjny ze względu na $\varphi_{w/1}(\mathbf{K})$. Przypadek $\varphi_{w/1}(\mathbf{K}) = 1$ jest oczywisty. W kroku indukcyjnym korzystamy z równości

$$(5.4) \quad \varphi_{w/1}(\mathbf{K} - \mathbf{E}_1) = \varphi_{w/1}(\mathbf{K}) - 1,$$

którą otrzymujemy w taki sam sposób jak w dowodzie wniosku 5.1. ■

Dualne twierdzenie Koeniga, choć w zasadzie nie jest nigdzie *explicite* sformułowane, można otrzymać, jako prosty wniosek, z każdego z następujących dwóch twierdzeń: twierdzenia 11.16 z [2] oraz tzw. słabej hipotezy Berge'a (zob. [1], str. 360). W naszej terminologii hipoteza ta głosi, iż dla dowolnych hypergrafów H_1, H_2 na dowolnym zbiorze $\bar{X}$, takich że (H_1, H_2) jest PMTP (zob. def. 2.1), następujące warunki są równoważne:

(i) najmniejsza liczba linii z H_1 (tj. $h \in H_1$) pokrywających dowolny podzbiór $m \subset \bar{X}$ równa jest $\max \# (m \cap h) : h \in H_2$,

(ii) najmniejsza liczba linii z H_2 pokrywających dowolny podzbiór $m \subset \bar{X}$ wynosi $\max \# (m \cap h) : h \in H_1$.

Dowody obydwu wspomnianych twierdzeń są jednakże dłuższe od naszego dowodu; szczególnie odnosi się to do hipotezy Berge'a, która postawiona w 1961 roku dowiedziona została dopiero 10 lat później.

WNIOSEK 5.3. *Przestrzeń unormowana macierzy prostokątnych $(R^{p \times q}, \varphi_{w/1})$ jest sprzężona do przestrzeni $(R^{p \times q}, \varphi_{w/p})$; w szczególności $\varphi_{w/1}^* = \varphi_{w/p}, \varphi_{w/p}^* = \varphi_{w/1}$.*

D o w ó d. Korzystając z definicji normy sprzężonej oraz twierdzenia 3.3, mamy (poniżej $\text{ext } A$ oznacza zbiór punktów ekstremalnych zbioru A)

$$\varphi_{w/1}^*(\mathbf{K}) = \sup_{\bar{\mathbf{K}} \in \text{ext } B_L} \langle \mathbf{K}, \bar{\mathbf{K}} \rangle = \max_{\sigma} \sum_{i=1}^p |k_{i\sigma(i)}| = \varphi_{w/p}(\mathbf{K}).$$

Z refleksywności przestrzeni skończenie wymiarowych otrzymujemy drugą część wniosku. ■

WNIOSEK 5.4. *Macierz $\mathbf{K} \in B_p$ jest punktem ekstremalnym zbioru B_p wtedy i tylko wtedy, gdy*

(i) $k_{ij} \in \{0, -1, +1\}$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$,

(ii) *istnieje taka linia h , dla której $n(\mathbf{K}) = h$.*

UWAGA 5.1. *Zbiór macierzy bistochastycznych B' jest ścianą ekstremalną zarówno zbiorów B_L^1 jak i B_L .*

D o w ó d. Mamy więc pokazać, że jeśli $\mathbf{K} \in B'$, $\mathbf{K} = \lambda \mathbf{K}^1 + (1 - \lambda) \mathbf{K}^2$, $\lambda > 0$, gdzie $\mathbf{K}^1 \in B_L$, $\mathbf{K}^2 \in B_L$, to $\mathbf{K}^1 \in B'$, $\mathbf{K}^2 \in B'$. Rzeczywiście, niech $1 \leq i_0 \leq p$, $1 \leq j_0 \leq q$, $\mathbf{K} = [k_{ij}]$, $\mathbf{K}^1 = [k_{ij}^1]$, $\mathbf{K}^2 = [k_{ij}^2]$. Wówczas

$$1 = \sum_{j=1}^q k_{i_0 j} = \sum_{j=1}^q \lambda k_{i_0 j}^1 + \sum_{j=1}^q (1 - \lambda) k_{i_0 j}^2 = \lambda a' + (1 - \lambda) b',$$

gdzie $|a'| \leq 1$, $|b'| \leq 1$; stąd $1 = a' = b'$. ■

WNIOSEK 5.5 (twierdzenie Birkhoffa). *Każda macierz bistochastyczna jest kombinacją wypukłą macierzy permutacji* (por. [2], str. 192).

DEFINICJA 5.1. Nieujemną macierz kwadratową K nazwiemy *dualnie bistochastyczną*, jeśli dla każdej permutacji σ , $\sum_{i=1}^p k_{i\sigma(i)} = 1$.

UWAGA 5.2. *Zbiór macierzy dualnie bistochastycznych B'' jest ścianą ekstremalną zbiorów B_p^1, B_p* (por. uwagę 5.1).

Czytelnik bez trudu sformułuje i udowodni „dualne twierdzenie” Birkhoffa.

Prace cytowane

- [1] C. Berge, *Graphs and hypergraphs*, North-Holland Publishing Company, 1976.
- [2] L. Mirsky, *Transversal theory*, Academic Press, New York 1971.
- [3] Sz. Perz, *Zagadnienie równoczesności pomiarów — optymalne procedury wykonywania pomiarów — model matematyczny*, Materiały z konferencji naukowo-technicznej „Automatyzacja procesów badaniowych w telekomunikacji”, Instytut Łączności, 1978.
- [4] R. Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton University Press, Princeton 1970.
- [5] L. Zaremba, *Zagadnienie minimalizacji czasu trwania seansu pomiarowego w pomiarach automatycznych telekomunikacyjnych łączy międzymiastowych (przypadek ogólny)*, Materiały z konferencji naukowo-technicznej „Automatyzacja procesów badaniowych w telekomunikacji”, Instytut Łączności, 1978.