

Tadeusz Ratusiński
Akademia Pedagogiczna, Kraków

Rola komputera w procesie rozwiązywania zadań matematycznych¹

We współczesnym świecie zewsząd otaczają nas nowoczesne środki technologii informacyjnej. Komputery wykorzystywane są już praktycznie w każdej dziedzinie życia. Również w szkolnictwie odgrywają one coraz istotniejszą rolę. Nauczanie matematyki z wykorzystaniem komputera jest przedmiotem wielu dyskusji prowadzonych zarówno przez nauczycieli, jak i dydaktyków. Podejmuje się badania, w których rozważa się różnorodne problemy związane z funkcjonowaniem nowych narzędzi w procesie dydaktycznym.

W skomplikowanym procesie nauczania matematyki można, z dużym uproszczeniem, wyróżnić cztery główne składniki:

- kształtowanie pojęć matematycznych,
- rozwiązywanie zadań,
- prowadzenie rozumowań matematycznych,
- kształtowanie języka matematycznego.

Jednym z najważniejszych składowych tego procesu jest rozwiązywanie zadań. Służą one bowiem jako środek do utrwalania zdobytych wiadomości, wyrabiają umiejętność ich stosowania, pomagają sprawdzać postępy w nauce i wyniki nauczania (kolokwia, sprawdziany, egzaminy), za ich pomocą kształtuje się i definiuje pojęcia matematyczne, uczy się prowadzenia rozumowań matematycznych, dowodzenia, pokazuje się zastosowania matematyki, kształci się wyobraźnię. Są one ważnym czynnikiem aktywizującym, stymulują niejednokrotnie rozwój zainteresowań uczniów.

¹Tekst jest zmodyfikowaną wersją autoreferatu rozprawy doktorskiej obronionej 30 czerwca 2003 roku na Wydziale Matematyczno-Fizyczno-Technicznym Akademii Pedagogicznej w Krakowie. Promotorem pracy był prof. nadzw. Akademii Pedagogicznej w Krakowie dr hab. Henryk Kąkol, a jej recenzentami — prof. nadzw. w UAM w Poznaniu dr hab. Maria Korcz, prof. Ryszard Pawlak z Uniwersytetu Łódzkiego i prof. Zenon Moszner z Akademii Pedagogicznej w Krakowie.

Wśród wielu zdań, które rozwiązujemy w trakcie uczenia matematyki, można wyróżnić różne ich typy². Jednak najczęściej występującymi zadaniami w nauczaniu szkolnym są:

- zadania metodologiczne,
- ćwiczenia, zadania na zastosowanie teorii,
- zadania-gry, zabawy,
- zadania-matematyczne niespodzianki,
- zadania na zastosowanie matematyki,
- zadania na temat skończonych struktur,
- zadania-problemy.

Na szczególną rolę tych ostatnich (zadań-problemów) zwraca uwagę prof. A. Z. Krygowska, która sama charakteryzuje je tak: „Zadania, których rozwiązanie nie uzyska się na danym poziomie bez pewnej pomysłowości, bez szczypty choćby matematycznej wyobraźni, bo do ich rozwiązania nie wystarcza ani wiedza, ani sprawność techniczna, ani nawet doświadczenie w rozwiązywaniu typowych zadań”³.

Bez wątpienia należą one do najtrudniejszych, lecz z punktu widzenia procesu nauczania są one zarazem najcenniejsze, gdyż oprócz cech zasygnalizowanych przeze mnie powyżej mają jeszcze pewne dodatkowe zalety. Są one miernikiem uzdolnień uczniów, bowiem to dzięki nim możemy wyselekcjonować uczniów zdolniejszych, tych, którzy potrafią odnaleźć się w nowej sytuacji, zaadaptować znaną im wiedzę do nowych wymagań, itp. Ponadto uczą one metod heurystycznych, gdyż w trakcie ich rozwiązywania bardzo często opieramy się na schemacie postępowania „pomysł → weryfikacja”. Uczeń obserwuje, porównuje pewne własności, dostrzega prawidłowości, stawia hipotezę roboczą, po czym ją weryfikuje. W przypadku, gdy okaże się ona fałszywa, uczeń zmuszony jest powrócić do etapu poszukiwania nowej hipotezy, pomysłu i proces startuje na nowo, aż do uzyskania efektu. Dodatkowo zadania-problemy wyrabiają aktywności uczniów związanych z rozwiązywaniem problemów, np. głębszą penetrację treści zadania celem dostrzeżenia problemu, asymilacja znanych faktów w nowej sytuacji, itp.

²Krygowska, A. Z.: 1977, *Zarys dydaktyki matematyki. Część 3*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.

³Ibidem.

Mimo wielu zalet tego typu zadań, z moich obserwacji wynika, że nie są one lubiane przez większość uczniów. Nie są one łatwe do rozwiązania, a konieczność kilkakrotnej weryfikacji hipotez roboczych często powoduje zniechęcenie, a tym samym rezygnację z rozwiązania zadania.

Podczas kilkuletniej pracy z młodzieżą szkoły średniej, jak również ze studentami, zainteresowałem się możliwością wykorzystania nowych technologii nauczania do rozwiązywania zadań-problemów. Studium literatury tematu wykazało deficyty badawcze na polu wykorzystania nowych technologii w pracy nad rozwiązywaniem zadań problemowych.

Podjąłem więc próbę odkrycia roli, jaką może odegrać komputer w procesie rozwiązywania problemów matematycznych, a w szczególności rozwiązywaniu zadania-problemu z parametrem z analizy matematycznej. Poniżej prezentuję cele szczegółowe charakteryzujące cel główny:

- Czy komputer może pomóc w zrozumieniu istoty problemu?
- W jakim stopniu komputer wpływa na stawiane przez uczniów hipotezy podczas rozwiązywania problemów matematycznych?
- Czy komputer ma wpływ na odkrycie idei dowodu postawionej hipotezy?
- Czy i w jakim stopniu komputer może wyzwać aktywność matematyczną polegającą na przedłużaniu problemów?
- Czy uczeń „słaby” może skorzystać, i w jakim zakresie, z pomocy komputera przy rozwiązywaniu problemów?
- Czy uczeń „zdolny” może skorzystać, i w jakim zakresie, z pomocy komputera przy rozwiązywaniu problemów?
- Czy komputer może pomóc w „porzuceniu bez żalu” pomysłu nie prowadzącego do rozwiązania?
- Czy komputer może rozładować stres powstający w momencie braku pomysłu na rozwiązanie zadania?

Aby znaleźć, choćby częściowe, odpowiedzi na sprecyzowane wcześniej pytania szczegółowe charakteryzujące cel główny, zostały przeprowadzone badania.

Szukając problemu do moich badań przeanalizowałem wiele ciekawych zadań, z których wybrałem następujące⁴.

⁴Kąkol, H., Powązka, Z.: 1998, *Pojęcie funkcji. Część 2*, Wydawnictwo „Dla szkoły”, Bielsko-Biała.

Znajdź wszystkie wartości parametru m takie, aby funkcja dana wzorem:

$$f(x) = |mx + 1| - |2x - m|$$

była:

- a) ograniczona;
- b) ograniczona tylko z dołu;
- c) ograniczona tylko z góry.

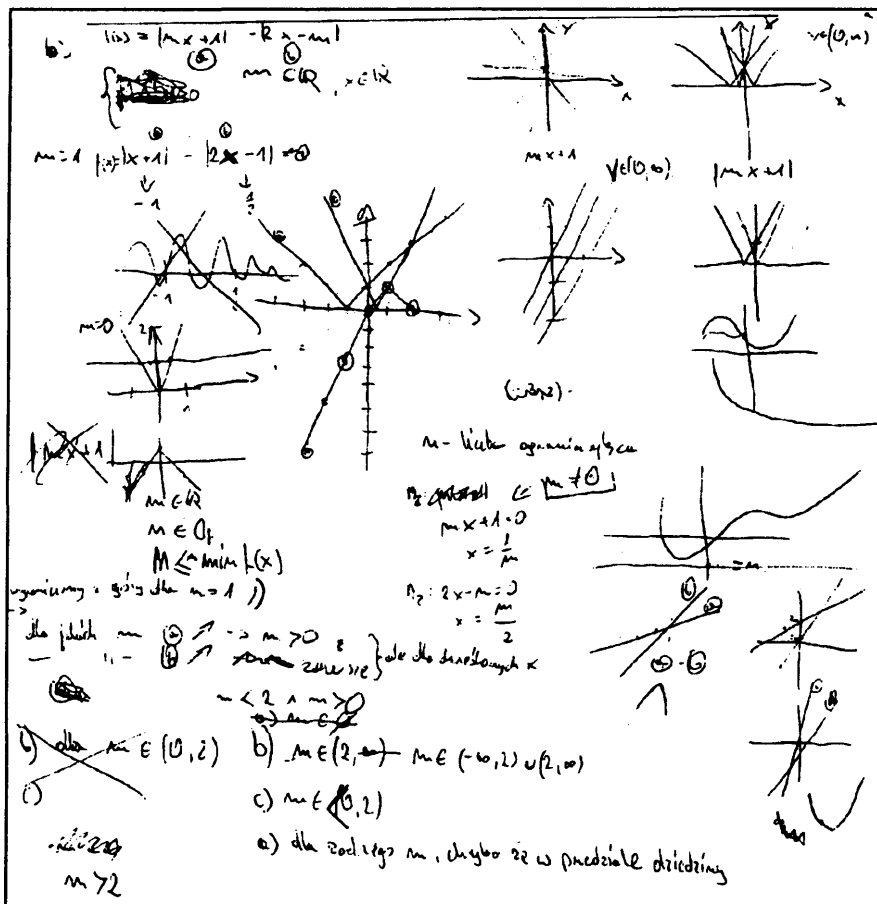
Przy wyborze tego zadania kierowałem się jego kilkoma istotnymi walorami. Zadanie to sformułowane jest w sposób przejrzysty. Pojęcia w nim występujące są znane uczniom szkoły średniej (ujęte są w programie nauczania), a na tyle łatwe, by opanował je uczeń gimnazjum. Pomimo swej prostoty treści nie jest jednak ono ani trywialne, ani też szablonowe. Sformułowany w ten sposób problem stanowi dla ucznia nowe wyzwanie, którego rozwiązanie nie jest od razu widoczne mimo, że po przeczytaniu treści uczeń intuicyjnie je rozumie. Zadanie to można rozwiązać na kilka sposobów bez użycia komputera, a dodatkowo komputer jest w stanie podsunąć nową, ciekawą metodę jego rozwiązania.

Same badania prowadzone były w sposób indywidualny i przebiegały w siedmiu etapach:

- Etap „zerowy” polegał na zebraniu możliwie najwięcej informacji o badanym uczniu podczas rozmowy z nim oraz w trakcie wywiadu środowiskowego.
- W pierwszym etapie uczeń proszony był o wypełnienie specjalnej ankiety. Jej celem było głębsze poznanie osobowości badanego ucznia, a w szczególności jego lęków związanych ze szkołą, z matematyką, nastawienie badanego do matematyki, nastawienia do komputera i informatyki.
- Drugi etap to próba rozwiązania problemu bez pomocy komputera. Uczeń mając do dyspozycji jedynie tablice matematyczne, przybory do pisania oraz swoją wiedzę próbował rozwiązać zadanie. Mógł także skorzystać ze specjalnie przygotowanego zestawu definicji i przykładów funkcji ograniczonej, ograniczonej tylko z dołu i ograniczonej tylko z góry. Przykład takiego rozwiązania ilustruje rysunek 1.
- Kolejny etap to rozmowa, mająca na celu wyjaśnienie przyczyn ewentualnego niepowodzenia i odkrycie problemów, z jakimi spotkał się uczeń podczas rozwiązywania zadania. Zadawane były następujące pytania:
 - ✓ Czy rozwiązywane zadanie zainteresowało cię?
 - ✓ Czy zrozumiałeś występujące w zadaniu polecenia?

- ✓ Czy znasz wszystkie pojęcia występujące w treści zadania?
- ✓ Co twoim zadaniem przyczyniło się do twojego sukcesu (twojej porażki)?

Oczywiście pytania te mogły być modyfikowane w zależności od sposobu rozwiązywania tego zadania przez ucznia.

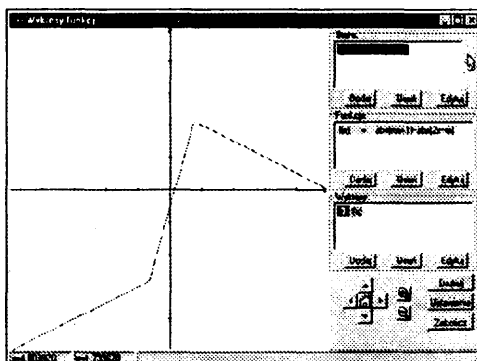


rys. 1.

- W następnym etapie uczeń zapoznał się z programem **Wykresy funkcji**⁵ (rys. 2), przy pomocy którego później rozwiązywał omawiane zadanie.
- W kolejnym etapie uczniowi udostępniony został komputer ze wspomnianym wcześniej programem i podejmował on ponowną próbę rozwiązania

⁵dostępny do pobrania na stronie www.ap.krakow.pl/mat/komputery

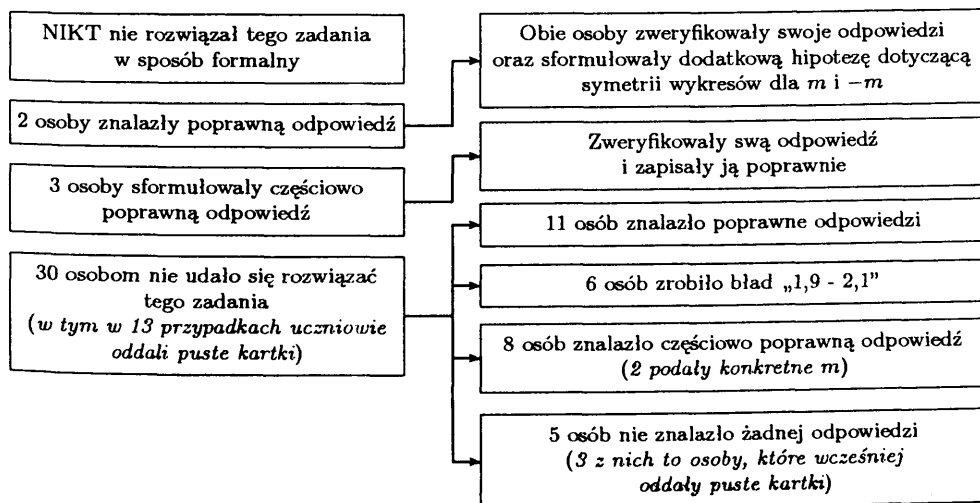
problemu. Cały ten proces rejestrowany był przy pomocy specjalnego programu. Z otrzymanego zapisu stworzony został film, który był materiałem do analizy pracy ucznia.



rys. 2.

- Etap ostatni to kolejna rozmowa z uczniem. Jej celem była próba znalezienia odpowiedzi na pytania:
 - ✓ Czy jesteś przekonany, że znaleziona odpowiedź jest poprawna?
 - ✓ Czy czujesz potrzebę uzasadnienia poprawności znalezionej odpowiedzi?

W ten sposób zostało przebadanych 35 osób ostatnich dwóch klasy szkoły średniej (wiek 18-19 lat). Poniżej otrzymane wyniki (rys. 3.)



rys. 3.

Analiza zebranego materiału pozwoliła na sformułowanie częściowych odpowiedzi, na niektóre wcześniej postawione pytania, a także pokazała inne, ciekawe fakty. Oto one:

- Nie ulega żadnym wątpliwości, że właściwie dobrany program komputerowy, spełniający rolę służebną w rozwiązywaniu odpowiedniego problemu, może przyczynić się do znalezienia odpowiedzi na postawione w tym problemie pytania.
- Większość uczniów znalazła prawidłową odpowiedź na sformułowane w zadaniu pytania. Byli jednak uczniowie, którym komputer nie był w stanie pomóc w tym zakresie. Można więc wnioskować, że w niektórych sytuacjach komputer może okazać się pomocny w rozwiązywaniu problemów, w innych nie.
- Rodzi się przypuszczenie, iż w tradycyjnym rozwiązywaniu zadań większy nacisk kładzie się na uzyskanie prawidłowej odpowiedzi, niż na znajdowanie sposobów rozwiązania zadania. Komputer pozwalając uczniom znaleźć poprawną odpowiedź, jest tak dla nich przekonywujący, że zupełnie nie czują potrzeby dowodzenia zaobserwowanych spostrzeżeń. Komputer w tej sytuacji jawi się jako pewnego rodzaju przeszkoda epistemologiczna⁶. Uczniowie, którzy uzyskali z pomocą komputera satysfakcjonującą ich odpowiedź, zaprzestali dalszej aktywności w celu uzasadnienia ich poprawności. Komputer osłabił ich dalszą motywację do działania. Co więcej, prowokowani do udowodnienia swoich hipotez, na ogół, jeszcze raz odtwarzali przebieg swojej pracy na komputerze, tzn. przeprowadzali pewnego rodzaju dowód komputerowy, nie czując potrzeby matematycznego uzasadnienia.
- Poczynione obserwacje zdają się być zgodne z teorią „pomostów” B. Kutzlera⁷, która mówi, że użycie komputera pomaga uczniom słabszym pokonać bariery, polegające na niezrozumieniu wcześniej przerabianych tematów. Uczeń mający pewne zaległości z programu szkolnego, nie zawsze był w stanie rozwiązać postawionego przed nim problemu, jednak zastosowanie komputera w trakcie rozwiązywania zadania, odsunęło na dalszy plan braki w jego wiedzy. Uczeń mógł nadal pracować nad zadaniem, a w konsekwencji nabywać nowe doświadczenia i wiedzę. Jego luki w wiadomościach nie pogłębiły się. Komputer stał się „pomostem” nad nie do końca opanowanymi umiejętnościami, do których może powrócić później w odpowiedniejszym momencie.

⁶Sierpińska, A.: 1998, Pojęcie przeszkody epistemologicznej w nauczaniu matematyki, *Dydaktyka Matematyki* 8, 103-153

⁷Kutzler, B. — <http://b.kutzler.com/bk/a-pt/ped-tool.html#scaffolding>

- Komputer jest w stanie stworzyć inną sytuację dydaktyczną, w której uczeń wyzbywa się stresów (lęków) wynikających z nieumiejętności rozwiązywania problemu, a tym samym wzmacnia zainteresowanie problemem, pozwala go równocześnie lepiej zrozumieć i w konsekwencji umożliwia znalezienie odpowiedzi na postawione w problemie pytania. Komputer jest w stanie ponownie zaktywizować i zachęcić uczniów do pracy nad porzuconym problemem.
- Komputer może również pomóc w zrozumieniu pojęć matematycznych występujących w rozwiązywanym zadaniu, ilustrując, na przykład, obrazy tych pojęć. Tak było przy rozwiązywaniu omawianego zadania z pojęciem funkcji ograniczonej, pojęciem parametru, pojęciem wartości bezwzględnej. Wiele osób, którym nie udało się rozwiązać postawionego problemu, wyraźnie podkreślało, że co prawda komputer nie pomógł im w znalezieniu odpowiedzi na postawione w zadaniu pytania, lecz pomógł zrozumieć pojęcie ograniczoności funkcji, której wcześniej nie rozumieli.