

Jana Slezáková-Kratochvílová

Uniwersytet Karola, Praga

Ewa Swoboda

Uniwersytet Rzeszowski

Kognitywne przeszkody w komunikowaniu się nauczyciel — uczeń¹

1 Wstęp

Truizmem staje się dziś twierdzenie, że rozwój wiedzy matematycznej ucznia związany jest z budowaniem jego indywidualnej sieci kognitywnej. Zaczyna się on dzięki funkcjonowaniu w realnym świecie. Poprzez zdobywanie doświadczeń i tworzenie uogólnień uczeń tworzy sobie pierwsze wyobrażenia pojęć matematycznych. (Dubinsky 2000, Hejný 1997, 2003). Na tym etapie kształtowania się wiedzy matematycznej uczeń często rozwiązuje problem poprzez odniesienie do wcześniejszych swoich doświadczeń, rozpoznając izomorfizm sytuacyjny. Im ma bogatszy zasób własnych doświadczeń i związanych z nimi działań, tym łatwiej mu tworzyć pojęcia ogólne i utrwalać procedury działań. W dydaktyce matematyki coraz częściej nawiązuje się do sformułowania, użytego przez Vergnaud'a: „pole doświadczeń”, które jest źródłem dla „pola pojęciowego” (Vergnaud, 2005).

W czasie lekcji matematyki procesy myślowe ucznia stymulowane są głównie przez rozmowy i wymianę punktów widzenia. Nauczyciel winien zaakceptować to, że uczeń samodzielnie buduje znaczenia pojęć i zjawisk matematycznych, jednak z drugiej strony winien być świadomy, że ten proces wymaga dzielenia się ideami i myślami. Matematyka jest nauką wymagającą negocjowania znaczenia pojęć i terminów, odpowiedniego posługiwania się językiem, znakami i symbolami, dostrzegania związków między sytuacją realną a abstrakcją matematyczną (por. Steinbring, 2005). Dyskusja daje szansę pokazania,

¹Praca wykonana w ramach grantu GACR 406/05/2444

jak dany problem jest rozumiany — wielokrotnie różne strony uczestniczące w rozwiązywaniu problemu rozumieją go zupełnie inaczej. Wtedy rozmowa, dyskurs jest okazją do ustalenia w miarę jednolitego spojrzenia na badany problem. Rozmowa ułatwia wymianę poglądów o matematycznych i metamatematycznych pojęciach związanych z zadaniem, o sposobach rozwiązania zadania, daje szansę na wymianę opinii i argumentów pomiędzy jej uczestnikami (uczniami i nauczycielem). Stąd komunikowanie się uczniów i nauczyciela jest traktowane jako kolejny istotny element wpływający na budowanie indywidualnej wiedzy ucznia.

W całym obszarze porozumiewania się nieuniknione jest występowanie nieporozumień. Każda informacja jest równocześnie przekazywana i odbierana, wywołując określone skutki, każda przesłana informacja powoduje u odbiorcy określone skojarzenia, interpretacje, wywołuje z jego sieci kognitywnej określone procedury. Nieporozumienia w komunikowaniu się mogą mieć różne korzenie. Teoria komunikacji jako sztuki wzajemnego porozumiewania się wymienia szereg barier, utrudniających porozumienie (McKay, Davis, Flanning, 2004). Między innymi przyjmuje się, że stopień wzajemnego zrozumienia w sposób oczywisty zależy od wspólnego obszaru doświadczeń. Mówiąc inaczej — im większy zakres wspólnych doświadczeń, tym lepsze porozumienie (Głodowski, 1994). To spostrzeżenie ma istotne konsekwencje dla procesu nauczania matematyki, w którym słowo i inne symbole mają istotne znaczenie. Epistemologia konstruktywistyczna zakłada subiektywność wiedzy, która jest zależna od indywidualnych doświadczeń. Na ogół u ludzi mających różne doświadczeniach te same słowa mają inne znaczenie. Różnice w matematycznej strukturze kognitywnej² u nauczyciela i ucznia są bardzo duże, i nie są jedynie związane z szerszym zakresem wiedzy. Nauczyciel nie tylko więcej wie, ale czasami — w odniesieniu do pewnych zagadnień — wie zupełnie inaczej niż uczeń, widząc zagadnienie z innej perspektywy. Stąd wymiana myśli nieuchronnie związana jest z nieporozumieniami: określone słowa, symbole, diagramy u każdego mogą pobudzać inne procedury, wskazywać na inne związki. W niektórych konstruktywistycznych podejściach wręcz istnieje pogląd, że nie jest możliwe wzajemne porozumienie (Sierpińska, 1996). I nie jest to związane z faktem, że nauczyciel nie słucha ucznia. Wydaje się, że uważne słuchanie to za mało, aby nauczyciel mógł skutecznie prowadzić lekcje wykorzystując dyskusje pomiędzy uczniami,

²M. Hejný mówi o wewnętrznej strukturze matematycznej (*internal mathematical structure — IMS*). Zgodnie z jego opisem *IMS jest dynamiczną siecią powiązań z wieloma elementami wiedzy, takimi jak pojęcia, fakty, relacje, przykłady, strategie rozwiązań, algorytmy, procedury, hipotezy, ..., tworzącymi węzły tej sieci. To wszystko powoduje istnienie IMS. IMS sama w sobie jest siecią, łączącą te wszystkie elementy. IMS jest równocześnie sposobem organizacji tych wszystkich elementów tworzących wiedzę* (Hejný 2001, s. 15).

jak i prowadząc dialog z uczniem. Różny poziom rozumienia znaczeń (występujący w sposób naturalny u nauczyciela i ucznia) jest podstawą konfliktów myślowych, stwarza przeszkody w porozumiewaniu się.

Biorąc pod uwagę fakt, że źródłem nieporozumień mogą być różnice w zakresie „pola doświadczeń” nauczyciela i ucznia, i wynikający z tego faktu inny indywidualny obraz matematyki, nie jest możliwe uniknięcie nieporozumień w żaden prosty sposób. Przed nauczycielem zatem staje poważne zadanie: być świadomym możliwości zaistnienia nieporozumienia, stale diagnozować przebieg dyskursu z punktu widzenia wzajemnego rozumienia się, umieć zlokalizować zaistniałe nieporozumienie oraz zanalizować jego przyczynę, by w końcu widzieć, jak rozwiązać zaistniałą sytuację. Najważniejsze jednak jest, by nauczyciel był wyczulony w kierunku możliwości nieporozumienia i by jego reakcje przede wszystkim kierowane były postawą: „czy się nawzajem rozumiemy”, a nie — „uczeń się myli”.

W trakcie konferencji CIEAEM 39, odbywającej się w Sherbrooke w Kanadzie w 1987, zostały sformułowane pewne postulaty związane z postawą nauczyciela wobec uczniowskiego błędu. Postulowano, by analiza błędów była częścią kursu kształcenia nauczycieli. Zofia Krygowska, relacjonując prace jednej z grup roboczych, sformułowała takie postulaty: *Należałoby doprowadzić do tego, aby nauczyciel umiał i chciał uświadomić sobie własne sposoby uczenia się, aby zdawał sobie sprawę z roli doświadczenia, aktywności i błędu w tym procesie, aby był świadom własnych reakcji emocjonalnych na błąd, co umożliwi mu lepsze zrozumienie uczniów, aby rozumiał, że jego wizja tego, co jest błędne, jest względna, zależna od jego koncepcji matematyki, jego wiedzy i poprzednich doświadczeń.* (Krygowska 1989, s.159). Bardzo identyfikujemy się z tymi stwierdzeniami, zwłaszcza zawartymi w ostatnim fragmencie tej wypowiedzi. U uczącego się człowieka obraz matematyki stale się zmienia i ten fakt szczególnie powinien wpływać na postawę nauczyciela związaną z interpretacją uczniowskich wypowiedzi.

Na tej samej konferencji Hans Freudenthal zwrócił uwagę na fakt, że mówiąc o błędach uczniowskich nie sposób pominąć błędów nauczycielskich. Tę wypowiedź odniósł do błędów w „sztuce nauczania”. Wyróżnił dwa typy dydaktycznych błędów, związanych z postawą nauczyciela:

1. zła interpretacja — lokalna lub globalna — uczniowskiego postępowania,
2. zła reakcja — lokalna lub globalna — na uczniowskie postępowanie.

Nasze studium traktujemy jako przyczynek do wiedzy pomocnej nauczycielowi w odpowiedniej interpretacji uczniowskiego postępowania oraz odpowiedniej reakcji na to postępowanie.

Podczas wymiany zdań między nauczycielem i uczniem często dochodzi do nieporozumienia wynikłego z bardzo powierzchownego potraktowania uczniowskiej wypowiedzi: „poprawną odpowiedź” nauczyciel interpretuje jako tę, która oddaje „poprawne rozumienie” — choć w rzeczywistości bywa to wyuczona na pamięć sentencja czy reguła. Ten typ złego interpretowania uczniowskich wypowiedzi nie jest przedmiotem tego studium. Interesują nas jedynie takie sytuacje, w których uczestnicy dyskursu artykułują własne rozumienie pojęć, relacji i procesów. Również nie interesują nas różnice w pojęciowych i meta-pojęciowych *umiejętnościach* nauczyciela i ucznia (jest oczywiste, że nauczyciel potrafi rozwiązać pewne zadania takimi metodami, których uczeń nie zna, oraz że zna pewne pojęcia, które są jeszcze uczniowi obce).

2 Metodologia

Wspólne badania w obrębie zagadnienia komunikacji między edukatorem a uczniem rozpoczęłyśmy w roku 2000. Punktem wyjścia była analiza nieporozumień, które zaszły w trakcie prowadzenia własnych badań. Analizowałyśmy wtedy własne wywiady prowadzone z uczniami szkół podstawowych, główną zaś metodą badawczą była analiza atomiczna³ (Hejný, 1992) protokołów spotkań. Metoda ta bazuje na podziale protokołu na najmniejsze sensowne części. W częściach tych zostają zlokalizowane najistotniejsze zjawiska, nazywane tutaj statycznymi atomami, które w jakiś sposób reprezentują myśli, emocje, postawę badanej osoby (mogą to być słowa, gesty, sposób reakcji). Dalsza praca badacza polega na odtworzeniu powiązań między tymi atomami, odtworzeniu hipotetycznych „dynamicznych atomów”, które mają pokazać umysłowe i emocjonalne związki powodujące przejście od jednego statycznego atomu do drugiego. Aby móc odtworzyć powiązania pomiędzy poszczególnymi węzłami, analizuje się cały kontekst, w którym dane zjawisko miało miejsce, włączając w to poprzednie i późniejsze wypowiedzi⁴. Rezultaty, dotyczące zarówno skonstruowanych w tym celu narzędzi badawczych, jak i uzyskanych wyników (fenomenów i mechanizmów nieporozumienia), były publikowane w (Kratochvílová, Swoboda, 2002, 2003). Na obecnym etapie badań jesteśmy zainteresowane zastosowaniem osiągniętych wyników w szkolnej praktyce. Dotyczy to głównie praktyki związanej z przygotowaniem zawodowym nauczyciela matematyki, sposobem dotarcia z własnymi rezultatami badań do studentów i przygotowujących się do zawodu nauczyciela.

³Metoda wypracowana wśród uczestników Praskiego Seminarium z dydaktyki matematyki (osób skupionych wokół prof. M. Hejný'ego).

⁴Metoda ta została opublikowana w języku polskim w artykule N. Stehlikovej w Roczn. PTM, Seria V, Dydaktyka Matematyki nr. 21.

3 Niektóre fenomeny ilustrujące nieporozumienia spowodowane różnym zakresem pola doświadczeń

Przedstawimy teraz niektóre wyniki teoretycznych badań, które zaowocowały lepszym naszym rozumieniem procesu komunikowania się podczas uczenia się matematyki.

Jednym z rezultatów teoretycznej części badań było zidentyfikowanie różnych fenomenów, które funkcjonują jako przeszkody w komunikowaniu się. W tym opracowaniu skoncentrujemy się jedynie na tych, które mają charakter kognitywny i wpływają z różnego rozumienia matematyki jako nauki (u ucznia i nauczyciela):

- A. *Różne rozumienie kontekstu sytuacji/zadania.* Nauczyciel, planując zadanie lub sytuację kontekstową, która ma przybliżyć ucznia do rozumienia pojęcia — potrafi to pojęcie wyłuskać z kontekstu, wie, co jest ważne, a co nie. Funkcjonuje u niego projekcja: pojęcie matematyczne → sytuacja kontekstowa. Na przykład zadania na powiększanie figur będą w jego rozumieniu związane z pojęciem figur podobnych; zadania, w których uczeń ma badać, jak zmiana ilości jednego składnika w przepisie na „kruche ciasteczka” wpływa na zmianę ilości innego składnika — to zadanie na budowanie intuicji zmiany proporcjonalnej, itd. Uczeń rozwiązujący zaplanowane przez nauczyciela zadanie będzie starał się wykorzystać całą swoją wiedzę szkolną i pozaszkolną. Skojarzone doświadczenia mogą mieć związek z różnymi matematycznymi pojęciami, jak i mogą w ogóle nie mieć związku z matematyką. Wiedza matematyczna może okazać się inna niż ta, którą zakładał nauczyciel, a wiedza pozamatematyczna może spowodować, że pewne aspekty sytuacji, nieistotne dla nauczyciela, staną się dominujące.
- B. *Skupienie uwagi na różnych fragmentach informacji.* Sens całej wypowiedzi rozumiany jest dzięki temu, że zachowujemy w pamięci brzmienie wcześniej wypowiedzianych słów; znaczenia pojedynczych słów umieszczamy wtedy w szerszym kontekście. Na przykład zdanie „Zamek stał na wysokim wzgórzu” jest dla nas zrozumiałe, bo treść, która następuje po słowie „zamek” wskazuje na odpowiednie znaczenie pierwszego słowa⁵. Dodatkowo zdanie niesie różną treść w zależności od tego, na którym jego fragmencie odbiorca skupi uwagę: mówi o tym *gdzie* stoi zamek (na wzgórzu), lub o tym, *co stoi na wzgórzu* (zamek). Dobrym

⁵Przykład pochodzi z wykładu prof. E. Gruszczyk-Kolczyńskiej podczas seminarium „Matematyczna Edukacja Dzieci” (zima 2005/2006) odbywającego się na Uniwersytecie Warszawskim pod patronatem naukowym prof. Z. Semadeniego.

przykładem skupienia uwagi na różnych fragmentach wypowiedzi jest rozmowa między trzema osobami: O_1 : Jestem tutaj dopiero 10 minut, a już jestem cała mokra od potu. Wy też? O_2 : Tak. O_3 : Nie, my już tu jesteśmy 4 godziny. Podobne sytuacje są możliwe również w komunikacji matematycznej.

- C. *Skupienie się na własnych celach.* Nauczyciel wie, co zamierza osiągnąć proponując uczniowi rozwiązanie danego zadania. Może to być wyćwiczenie pewnej sprawności lub odkrycie określonych własności czy związków, ważnych z punktu widzenia matematyki jako nauki. Te cele często determinują sposób pracy nad zadaniem, a odstępstwo od oczekiwanych sposobów pracy jest oceniane jako działanie błędne. Uczeń podejmując zadanie chce je przede wszystkim rozwiązać, i to na ogół w najłatwiejszy dla siebie sposób, stosując znane mu (lub oceniane przez niego jako najbardziej skuteczne) sposoby postępowania. Może się również zdarzyć, że rozwiązywanie zadania będzie interpretował w świetle pewnych umów społecznych, zupełnie nieczytelnych dla nauczyciela.
- D. *Różne znaczenie nadawane temu samemu kluczowemu słowu.* Budowanie własnej matematyki jest długotrwałym procesem, w trakcie którego może następować zmiana znaczenia pewnych słów. Oto kilka przykładów: Dla ucznia polecenie „dodać” może oznaczać „powiększyć”, podczas kiedy w rozumieniu nauczyciela jest to wezwanie do stworzenia sumy. Inne jest znaczenie ułamka, rozumianego jedynie jako wynik oddzielenia z jedności pewnej liczby równych części (w takim aspekcie często jest to pojęcie wprowadzane), a inne — jako stosunek dwóch wielkości. Rozumienie funkcji u uczniów obwarowane jest wieloma ograniczeniami, które na ogół nie występują już u nauczycieli (por. Semadeni, 2002, s. 141). Różne znaczenie nadawane tym samym słowom stymuluje do wykonywania różnych procedur i operacji związanych z danym pojęciem; powoduje, że to samo słowo wywołuje inne własności, budzi inne powiązania i relacje.

Nie należy tych kategorii traktować rozłącznie. Wiele rzeczywistych sytuacji lekcyjnych można interpretować równocześnie z punktu widzenia dwóch (lub więcej) fenomenów. Samo nazwanie zjawiska jest jednak naszym celowym zabiegiem metodologicznym. Ułatwia jego wyizolowanie, podpowiada terapię.

(Jedynie dla informacji podajemy, że wyróżniłyśmy w naszych analizach nieporozumienia tkwiące również w sferze społecznej i emocjonalnej. Nie są one jednak przedmiotem naszych rozważań w tym artykule.)

4 Przykłady analiz teoretycznych

W tej części studium opiszemy własne przygotowanie do rozumienia problemu komunikacji interpersonalnej w matematycznym dyskursie. Przedstawione poniżej analizy są krytyczną refleksją własnych reakcji w kontaktach badacz — uczeń.

Opis sesji

Celem opisaney sesji badawczej było zbadanie wykorzystania matematycznej wiedzy ucznia o figurach podobnych w nietypowych sytuacjach. Przygotowany kontekst umożliwiał rozumienie podobieństwa w sensie jego potocznego znaczenia, albo w znaczeniu matematycznym (definitywnym lub pojęciowym). Narzędziem badawczym w jednej sytuacji był zestaw trzech różnych bransoletek, o różnych grubościach, wykonanych z różnych materiałów; niektóre z nich jedną z powierzchni miały wypukłą, inne – nie⁶.

Uczeń — czternastoletni Kuba — uczył się w szkole definicji figur (i brył) podobnych. Pół roku później wziął udział w sesji, opisaney poniżej. Jedną z autorek tego artykułu występowała w niej jako badacz.

Protokół:

1. Badacz 01: (*wskazując na bransoletki*) Czy te przedmioty mają jakiś związek z matematycznym pojęciem figur podobnych?
2. Kuba 01: (*bez wahania*) Te są podobne.
3. B. 02: Matematycznie?
4. K. 02: Tak. Z matematycznego punktu widzenia.
5. B. 03: (*ze zdziwieniem w głosie*) Z matematycznego punktu widzenia?
6. K. 03: Tak.
7. B. 04:
8. K. 04: Ponieważ w języku potocznym one wcale nie są podobne.

W przedstawionej powyżej scenie doszło do szeregu nieporozumień. Niektóre z nich zanalizujemy szerzej.

A. Różne rozumienie kontekstu sytuacji/zadania

Sytuacyjny kontekst zadania jest tworzony poprzez fizyczne obiekty oraz akcje na tych obiektach. W konstruktywistycznym podejściu do matematyki, pojęcia matematyczne budowane są poprzez konceptualizację realnego świata,

⁶Wyniki tych badań zostały szerzej opisane w artykule E. Swobody, zamieszczonym w Roczn. PTM, Seria V, Dydaktyka Matematyki nr 22.

w którym owe obiekty występują(i akcje na nich zachodzą). Biorąc pod uwagę ten fakt uznajemy, że matematyczny dyskurs podczas rozwiązywania zadań odbywa się na styku między realnym światem, reprezentacjami graficznymi, symbolami, i matematycznymi ideami (por. trójkąt epistemologiczny w ujęciu Steinbringa⁷. W tym samym czasie zachodzi wiele różnych relacji pomiędzy wymienionymi elementami. Różne rozumienie tych związków może być powodem wielu nieporozumień, mających swoje dalekie konsekwencje.

Opisywany problem ogólny można zaobserwować w następującym fragmencie rozmowy:

1. Badacz 01: (*wskazując na bransoletki*) Czy te przedmioty mają jakiś związek z matematycznym pojęciem figur podobnych?
2. Kuba 01: (*bez wahania*) Te są podobne.

Dwóch uczestników spotkania zupełnie inaczej odbierało przedstawioną sytuację. Badacz wiedział, że tworzenie się matematycznego pojęcia to długi okres, którego początki wielokrotnie tkwią w potocznym rozumieniu określonego pojęcia czy procedury. Takie pojęcie potoczne jest bazą; poprzez stopniowe precyzowanie własności niejasna intuicja pojęcia przeradza się w matematyczną ideę precyzyjnie opisaną poprzez definicje i umieszczoną w dedukcyjnym systemie, jakim jest matematyka jako nauka. W opisanej sytuacji badacz wiedział, że zaprezentowany kontekst dla przedstawionego problemu może reprezentować dwa znaczenia pojęcia „podobny”: jako podobieństwo w potocznym znaczeniu, i jako matematyczne podobieństwo. Badacz oczekiwał dwóch typów odpowiedzi: „nie, to nie są przedmioty podobne” (zgodnie z matematycznym rozumieniem podobieństwa), albo: „one są trochę podobne” w potocznym rozumieniu tego słowa. Uczeń jednak wcale nie zaprzętał sobie głowy podobieństwem potocznym. Wiedział, że prowadzi rozmowę z osobą zainteresowaną pojęciami matematycznymi. Dla ucznia słowo *podobny* — w zestawieniu z osobą eksperymentatora — prawdopodobnie budziło jedynie skojarzenia z matematycznym pojęciem podobieństwa, jakiego uczył się w szkole. To zaś zdominowane było przez określenie podobieństwa figur płaskich, głównie wielokątów. Dlatego zaczął doszukiwać się jedynie matematycznego podobieństwa.

W rezultacie prezentowane fizyczne obiekty miały dla obu uczestników spotkania inne powiązanie z matematycznym podobieństwem: badacz widział tam trójwymiarowe obiekty, (między którymi nie zachodziła relacja podobieństwa), uczeń — okręgi, które są zawsze podobne, niezależnie od wymiarów. Taka interpretacja ucznia jest widoczna dopiero w świetle ostatniej wypowiedzi Kuby (04).

⁷Przykłady analiz dydaktycznych prowadzonych z użyciem trójkąta epistemologicznego zostały opisane w (Jagoda et al., 2004)

Tak więc, jeżeli porównamy sytuację wyjściową dla prowadzenia rozmowy z dwóch różnych punktów widzenia (badacza, ucznia), można stwierdzić, że:

1. dla badacza obiekty były stałe, zaś *podobieństwo* mogło być rozumiane na dwa różne sposoby: jako pojęcie potoczne lub jako pojęcie matematyczne
2. dla ucznia słowo *podobieństwo* było stałe i dotyczyło matematycznego podobieństwa, jednak obiekty, wokół których toczyła się rozmowa, dopuszczały dwie różne interpretacje: jako obiekty realnego (fizycznego) świata, oraz jako reprezentanty-modele obiektów świata matematyki.

Inaczej mówiąc, obaj uczestnicy spotkania inaczej zinterpretowali *stałe* i *zmienne* występujące w tej sytuacji.

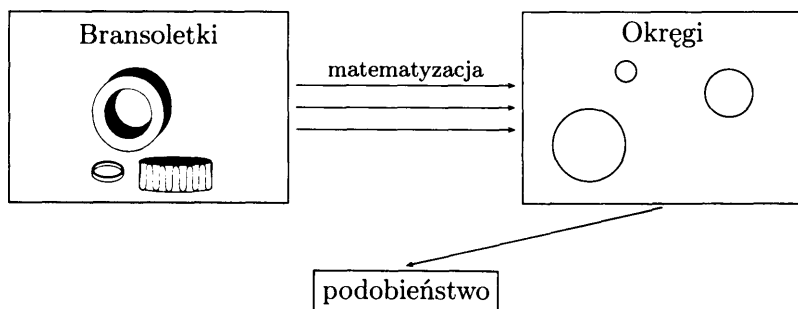
B. Skupienie uwagi na różnych fragmentach informacji

W trakcie przekazywania (i odkodowywania) informacji każdy z uczestników dyskursu może skupić się na wybranych jej fragmentach. Skupienie uwagi na różnych fragmentach powoduje, że dalsze procesy myślowe obu uczestników rozmowy przebiegają odmiennie. Zwykle nie są oni tego świadomi. Taka sytuacja może zachodzić w ogólnej rozmowie, ale okazuje się, że jest to niezwykle istotny problem w rozmowie prowadzonej podczas rozwiązywania zadań.

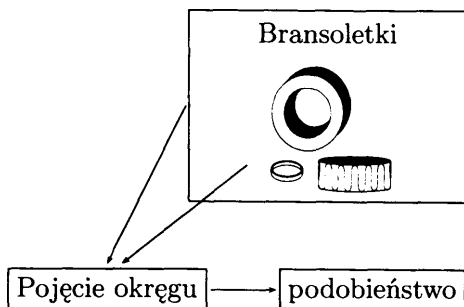
W wypowiedzi (B 01) dla badacza najistotniejszym słowem było „podobieństwo”; dla ucznia — słowo „matematyczne”. Spowodowało to, że procesy myślowe obu uczestników poszły w zupełnie innym kierunku. Badacz dokonywał *rozróżnienia* pomiędzy rozumieniem słowa „podobny” w sensie matematycznym i potocznym. Chłopiec dokonał *projekcji* realnych obiektów w świat obiektów matematycznych. Dla eksperymentatora te fizyczne przedmioty ujmowane były całościowo, jako trójwymiarowe obiekty. Nie były podobne w sensie matematycznej relacji podobieństwa. Różniły się proporcjami wewnętrznymi, powierzchnia niektórych była gładka a innych grawerowana, niektóre miały zewnętrzne powierzchnie płaskie, inne — wypukłe. Mogły być uważane za podobne w sensie potocznego podobieństwa — służyły do tego samego celu (ozdoba ręki), miały zbliżony kształt, chociaż wykonane były z innych surowców i inaczej ozdobione. Wydawało mu się więc, że mogą dobrze różnicować podejście „matematyczne” i „potoczne”. U chłopca widok kilku bransolet mógł budzić skojarzenie z dobrze znanym matematycznym obiektem — okręgiem. Jest to tym bardziej prawdopodobne, że podczas szkolnych lekcji o okręgu wykorzystywane są takie modele jak brzeg szklanki czy garnuszka, bransoletka, obrączka, pierścionek. Uczeń bransoletki potraktował jako fizyczne modele, reprezentacje dla okręgów.

Trudno dokładnie odtworzyć drogę myślową Kuby. Nasuwają się tutaj dwie możliwe interpretacje:

- Jeżeli w danej sytuacji zadaniowej istotną cechą była różna wielkość fizycznych obiektów, to — być może — Kuba stworzył w myśli kilka okręgów, różnych pod względem wielkości. Przedmioty, na które patrzył, zinterpretował jako realne reprezentacje okręgów różnej wielkości. Jeżeli tak, to posłużył się kilkoma znakami — wyobrażeniami — symbolicznymi reprezentacjami okręgu.



- Jest również możliwe, że w danej sytuacji zafunkcjonował schemat szkolnych sytuacji z lekcji o okręgach. Często nauczyciele kształtując pojęcie okręgu odwołują się do przedmiotów codziennego użytku, a ich wielkość nie odgrywa żadnej roli. Fizyczne obiekty (bransoletki) miały więc związek z jednym matematycznym pojęciem (okrąg).



Niezależnie od drogi myślowej, pierwsza odpowiedź znaczy: okręgi są figurami podobnymi. Aktywność Kuby w tym zadaniu polegała więc przede wszystkim na dokonaniu matematyzacji i podaniu odpowiedzi o związkach pomiędzy okręgami.

C. Różne znaczenie nadawane temu samemu kluczowemu słowu

Generalnie, kiedy uczestnicy rozmowy chcą zaznaczyć, że określone słowo ma istotne znaczenie, są w stanie podkreślić to, stosując specjalną intonację, umieszczając to słowo na początku zdania, itd. Przez to zwykle nietrudno jest ocenić, które słowo jest istotne, a które nieco mniej. Trudność pojawia się wtedy, kiedy słowo jest rozpoznane przez obu uczestników rozmowy jako ważne, jednak jego znaczenie, nadawane przez obie strony dyskursu, jest inne. Wtedy obraz myślowy skojarzony z tym słowem jest inny u każdego uczestnika rozmowy — i w sposób oczywisty proces myślowy u każdego z nich przebiega zupełnie inaczej. Taka sytuacja może występować często w interakcji nauczyciel — uczeń, i może być związana z różnym poziomem wiedzy matematycznej.

Oto stosowny fragment protokołu, ilustrujący opisane zjawisko.

3. B.02: Matematycznie?

4. K.02: Tak. Z matematycznego punktu widzenia.

Pytanie zostało posłane, ale nie zostało odkodowane zgodnie z intencją pytającego.

W pytaniu badacza (B.02) słowo „matematycznie” miało inne znaczenie dla badacza, i inne dla ucznia. Różne znaczenie słowa jest związane z różnym poziomem matematycznych doświadczeń obu uczestników. Badacz swój „świat matematyki” miał w pewnym sensie ustabilizowany: rozumiał go jako dedukcyjną strukturę, gdzie obiekty i relacje matematyczne funkcjonują w obrębie znaczeń wyznaczonych przez definicje i aksjomaty. Słowo „matematycznie”, zawarte w pytaniu, znaczyło więc — „zgodnie z matematyczną definicją tego pojęcia”.

Dla ucznia świat matematyki dopiero się tworzył. Budowanie świata matematyki przebiegało poprzez przechodzenie od obiektów realnych do matematycznych i związane było ze schematyzowaniem, uogólnianiem, skupianiem uwagi na pewnych własnościach realnych obiektów przy równoczesnym pomijaniu innych. Dlatego słowo „matematyczny”, zawarte w pytaniu nauczyciela, znaczyło: „po dokonaniu matematyzacji”. Było to słowo, które oznaczało proces, aktywność myślową, tak jak to definiuje A. Sierpiska (2002): „Abstrahowanie to dualna aktywność umysłowa, dzięki której niektóre aspekty są ignorowane, podczas gdy inne — akcentowane.”⁸

Na pytanie: *matematycznie?* uczeń odpowiedział: *z matematycznego punktu widzenia*, Przeformułowanie wypowiedzi przez ucznia powinno wyraźnie wskazać badaczowi możliwość innej (niż własna) interpretacji.

⁸Abstraction is a dual mental activity whereby some aspects are ignored while others are highlighted.

D. Skupienie się na własnych celach

Sytuacja taka zachodzi, gdy uczestnicy dyskursu są skupieni na własnych celach, przez co nie są otwarci na inne idee, które mogą się pojawić podczas wymiany poglądów. Uczestnik dyskusji, zajęty swoim punktem widzenia, jest bardzo sztywny w co najmniej dwóch aspektach: śle informacje jedynie w jeden sposób oraz odbiera informacje jedynie poprzez pryzmat swoich własnych celów. Nie jest w stanie zaakceptować żadnej zewnętrznej informacji, ani posłać informacji w taki sposób, by została ona zaakceptowana przez drugiego uczestnika dyskursu.

5. B. 03: (*ze zdziwieniem w głosie*) Z matematycznego punktu widzenia?

6. K. 03: Tak.

7. B. 04:?

Celem badacza było zdiagnozowanie, czy uczeń jest w stanie odróżnić potoczą interpretację słowa „podobny” od interpretacji matematycznej. Oczekiwał jedynie dwóch możliwych odpowiedzi:

- *Nie, nie są one podobne*, co jego zdaniem wskazywałoby na fakt, że uczeń posługuje się matematycznymi warunkami definicyjnymi w określeniu związków między zaprezentowanymi obiektami, albo:
- *Tak, są trochę podobne*, co oznaczałoby, że uczeń stosuje potoczne rozumienie podobieństwa.

W odniesieniu do Kuby (którego poznał jako ucznia inteligentnego) oczekiwał odpowiedzi pierwszej. To, co usłyszał, było absolutnie sprzeczne z własnymi oczekiwaniami, i to z dwóch powodów: Kuba, jako chłopiec inteligentny „powinien” odpowiedzieć „dobrze” — a nie odpowiedział; bransoletki matematyczne nie były podobne, a Kuba upiera się, że są. Nie brał pod uwagę interpretacji innej niż własna, przez co nie był w stanie interpretować wypowiedzi Kuby w żaden inny sposób. Skupienie się na własnej interpretacji, brak otwarcia na rozumienie prezentowane przez ucznia spowodowało blokadę w prowadzonej rozmowie. Badacz ani nie potrafił zmienić własnego sposobu komunikowania się z chłopcem tak, by było jasne, o co chodzi w rozmowie, ani nie poprosił ucznia o wyjaśnienie, dlaczego podał taką odpowiedź.

Kuba nie czuł żadnej potrzeby korygowania swego zdania. Dokonał przecież matematyzacji tych obiektów i wiedział, że zachodzi między nimi relacja podobieństwa. Dlatego pytanie badacza wpisał w konwencję szkolnej gry: nauczyciel wcale nie pyta dlatego, że nie wie, tylko oczekuje pełniejszej odpowiedzi lub jest to pytanie podchwytliwe.

5 Analiza nieporozumień podczas komunikacji — problem teoretyczny, czy praktyczny?

Przedstawione powyżej analizy mogą być odbierane jako rozważania bardzo teoretyczne. Mogą być również kwitowane jako nieistotne. Cóż bowiem dziwnego jest w tym, że w rozmowie dwóch osób dochodzi do nieporozumień? Na ogół prędzej czy później następuje wyjaśnienie, o co naprawdę chodzi osobom prowadzącym dyskurs (zakładając, że rzeczywiście chcą się porozumieć). Jednak w sytuacji budowania wiedzy matematycznej poprzez dyskurs ten „marginalny” problem staje się istotnym utrudnieniem w uczeniu się matematyki przez ucznia. Zobrazujemy to przykładami, pochodzącymi z rzeczywiście odbywających się lekcji matematyki (zarówno w Polsce, jak i w Czechach). Problemy przyporządkujemy tym samym kategoriom, które zostały wymienione w par. 3 oraz zostały wyróżnione w analizie rozmowy z Kubą.

Pierwsze wrażenie związane z tymi przykładami może być takie: to są sytuacje banalne, codziennie mamy z nimi do czynienia na lekcjach matematyki. Być może właśnie dlatego warto się im przyjrzeć dokładniej.

6 Ad A — Różne rozumienie kontekstu sytuacji/zadania

Przykład 1

Lekcja matematyki w klasie I gimnazjum (prowadzona przez studenta).

Temat lekcji: *Symetria w układzie współrzędnych*.

Wprowadzenie do tematu: uczniowie mają zaznaczać punkty symetryczne do danych względem osi OX i OY . Uczeń podchodzi do tablicy i zaznacza punkt symetryczny do zaznaczonego w układzie, a następnie zapisuje współrzędne obu punktów:

U. 01: dany punkt $A = (-3, 2)$, punkt do niego symetryczny $A_1 = \dots$

W tym momencie włącza się nauczyciel.

N. 01: Ale tak nie możemy oznaczyć. Jak mamy punkt symetryczny do danego względem jednej osi, to oznaczamy go A' , a względem drugiej A'' . No to teraz zapisz już poprawnie.

Uczniowie wykonują pozostałe przykłady stosując podane przez nauczyciela oznaczenia. W dalszej części lekcji pojawia się zadanie:

Podane są dwa punkty. Wskaż, względem której osi układu współrzędnych są one symetryczne. $A = (4, -1)$, $B = (4, 1)$.

U. 02: Ale te punkty nie mogą być symetryczne.

N. 02: Dlaczego?

U. 03: Bo tam powinno być A' albo A'' , a jest B . Więc nie ma tam żadnej symetrii.

Komentarz:

Stosowanie określonej symboliki dla punktów jest oczywiście zabiegiem konwencjonalnym, i jako taki powinien być rozumiany zarówno przez nauczyciela, jak i przez uczniów: nie jest specjalnie istotne, jak „nazwiemy” pewne punkty, nazwa służy zatrzymaniu uwagi na określonym punkcie. Dla nauczyciela ten fakt był oczywisty. Nauczyciel (student) wprowadzając oznaczenia A' , A'' ukierunkowany był na oznaczenia podręcznikowe w tym fragmencie. Wydawało mu się, że stosowanie przez uczniów w ich samodzielnej pracy tych samych oznaczeń, z jakimi za chwilę spotkają się podczas analizowania tekstu podręcznikowego, ma sens: czytając tekst będą mogli go potraktować jako werbalizację swoich wcześniejszych działań.

Istnieją jednak sytuacje w matematyce, gdy chcemy, by symbol matematyczny był interpretowany jednoznacznie. Matematyka wymaga posługiwania się znakami i symbolami. W symbolicznym języku matematyki, niezależnie od poziomu rozumienia pojęcia $\int$ — to zwyczajowo przyjęty symbol całki, Δ — symbol wyróżnika trójkątów kwadratowych, $\sqrt{}$ — symbol pierwiastka, x to zmienna niezależna, itd. Funkcjonowanie w świecie znanych symboli i oznaczeń bardzo ułatwia prowadzenie rozumowań. We wczesnych etapach uczenia się matematyki często stosuje się kolejność: najpierw sytuacja problemowa, potem zapis symboliczny, zakładając, że w dalszych etapach stosowania matematyki uczniowie potrafią przełożyć symbol na odpowiednie jego znaczenie. W opisywanym przykładzie uczniowie na wcześniejszych lekcjach analizowali dowolne symetrie i wtedy wprowadzali dowolne oznaczenia dla punktów i ich obrazów. Tutaj — przy symetrii względem osi układu współrzędnych — nauczyciel zażądał określonych oznaczeń. Sam fakt, że uczeń został skarcony za stosowanie zapisu $A_1 = \dots$ zamiast $A' = \dots$, a później konsekwentne trzymanie się tej symboliki spowodowało, że uczniowie symbolikę skojarzyli z pojęciem i uznali ją za integralną część pojęcia. Mogli uznać, że ta symetria jest w jakiś specjalny sposób traktowana, jest inna niż omawiane wcześniej. W obraz pojęcia symetrii względem jednej z osi współrzędnych wpisał się symbol A' albo A'' . W kolejnym etapie lekcji ten obraz należało zburzyć.

Przykład 2

Ta sytuacja pochodzi z klasy V (dzieci 10-11 letnie).

Uczniowie dostali do rozwiązywania następujące zadanie:



Zbuduj trapez, który można rozdzielić na dwa trójkąty prostokątne. Dzieci przez chwilę samodzielnie myślały nad problemem. W końcu jeden z uczniów — Maciej — podszedł do nauczyciela i zaprezentował swoje rozwiązanie. Wyglądało ono jak na rysunku obok. Wywiązała się rozmowa:

N. 01: No tak, ale to jest trójkąt, a nie trapez.

Maciej 01: Trójkąt to nie trapez? (ze zdziwieniem w głosie)

N. 02: Oczywiście, że nie!

Maciej wrócił do ławki i przez chwilę pracował w milczeniu. (2 minuty). Po chwili wrócił do nauczyciela.

Maciej 02: To zadanie nie ma rozwiązania, ponieważ pięciokąt można rozdzielić jedynie na trójkąt i na czworokąt.

Komentarz:

W języku czeskim nazwa „trapez” brzmi *lichoběžník*. W tym języku istnieje również przymiotnik *lichý* co znaczy nieparzysty. Z dalszej wypowiedzi ucznia widać, że dla niego słowo *lichoběžník* oznaczało zbiór wielokątów o nieparzystej liczbie boków.

W tym przykładzie łatwo rozpoznać, że dwóch uczestników rozmowy funkcjonowało „w innym świecie”, wywołanym nazwą obiektu, będącą elementem kontekstu sytuacyjnego zadania. Nauczyciel ani nie pomyślał, że tego typu skojarzenie może przyjść uczniowi do głowy. U niego nazwa obiektu jednoznacznie kojarzyła się z tym, z czym „powinna”. Negatywne konsekwencje tej sytuacji nie tkwią w tym, że nauczyciel nie był świadomy, w jaki sposób treść zadania jest odbierana przez ucznia — tego raczej nie był w stanie przewidzieć. Nieodpowiednia była reakcja N.02 na zaproponowane przez ucznia rozwiązanie. Uczeń przecież spytał: (M.01) *Trójkąt to nie trapez?*, a matematyczna i pedagogiczna wiedza nauczyciela powinna zasignalizować, że uczeń może zupełnie inaczej interpretować założenia zadania. Wystarczyło wtedy jedynie zapytać: *dłaczego uważasz, że trójkąt to lichoběžník?* Zamiast tego uczeń zupełnie niepotrzebnie, acz rzetelnie, wykonał nową pracę. Przekonanie, że była to praca bezcelowa, może być czynnikiem zniechęcającym do podejmowania dalszych wysiłków, tym razem w obrębie zadania już rozumianego zgodnie z intencją nauczyciela.

Ad B — Skupienie uwagi na różnych fragmentach informacji**Przykład 3**

Lekcja matematyki w klasie V, wrzesień.

Temat lekcji: Rozwiązywanie zadań tekstowych

Uczniowie rozwiązują zadanie następującej treści: *W dniu święta szkoły uczniowie klasy IVa zorganizowali loterię. Jeden los kosztował 2 zł. Uczniowie zebrali razem 120 zł. Ile sprzedali losów?* Jeden z uczniów podchodzi do tablicy i zaczyna pracę nad zadaniem.

1. Uczeń 01: *Mówi cicho do siebie* Jeden los kosztuje 2 zł. Uczniowie zebrali 120 zł. *Pisze* $120 : 2$
2. N. 01: sugerujesz...
3. U. 02: 120 podzielone na dwa.
4. N. 02: *patrzy na to co uczeń napisał, podchodzi do tablicy i dopisuje:* $120 \text{ zł} : 2 \text{ zł}$
5. U. 03: *kończy pisanie:* 60 zł

Komentarz:

Uczeń zrozumiał treść zadania, rozpoznał związki występujące między liczbami, znalazł metodę rozwiązania. Wiedział, że należy wykonać dzielenie. Skupił się na zapisaniu odpowiedniego działania na liczbach. Działanie miało służyć jedynie otrzymaniu liczbowego rozwiązania — i w tym momencie było oderwane od treści, w której była mowa o pieniądzach. Świadczy o tym wypowiedź (3) *120 podzielone na dwa*, co jest popularnym sposobem czytania działania dzielenia, bez rozróżniania, czy jest to dzielenie jako mieszczenie, czy jako podział. Uczeń prawdopodobnie zamierzał pracować realizując (nieświadomie) etapy: zrozumienie zadania, zbudowanie matematycznego modelu, rozwiązanie zadania w modelu, interpretowanie otrzymanego wyniku zgodnie z treścią zadania. Dla nauczyciela jednak było ważne, by nie gubić faktu, że dla rozwiązania zadania trzeba rozdzielić 120 zł na porcje 2-złotowe. Ten element informacji związanej z zadaniem postanowił uwypuklić, dopisując skrót zł przy liczbach napisanych przez ucznia. Nie pozwolił więc uczniowi pracować w obrębie tych informacji, które tamten uznał za istotne i wystarczające.

Uczeń nie odczytał intencji nauczyciela, na co wskazuje ostateczny zapis (5): 60 zł. Doliczył swoje dzielenie do końca, i na wszelki wypadek przy wyniku dopisał to, na co zwracał uwagę nauczyciel — zł.

Nauczyciel niepotrzebnie podkreślił, że w zadaniu jest mowa o pieniądzach. Ten fragment informacji z zadania tekstowego był najmniej istotny. Na dodatek wprowadził chaos do pracy ucznia. Oderwał od własnego toku myślenia lub zmusił do wykonywania czynności, których sensu uczeń w tej chwili chyba

nawet nie zamierzał analizować. Spowodował, że uczeń przez chwilę przestał myśleć, a zaczął działać tak, by spełnić hipotetyczne oczekiwania nauczyciela.

Ad C — Różne znaczenie nadawane temu samemu kluczowemu słowu

Przykład 4.

Przykład pochodzi z badań J. Hawro i B. Maj (niepublikowane). Przedstawiony dialog toczył się między uczniami I klasy gimnazjum oraz ich nauczycielką podczas omawiania wyników testu dotyczącego rozumienia pojęcia funkcji.

1. N.01: Ile rozwiązań ma równanie $x + y = 5$?
2. U₁.01: Tylko jedno, np.: $3 + 2 = 5$
3. U₂.01: Ale przecież mogą być jeszcze inne liczby, np. $10 + (-5) = 5$
4. U₁.02: No właśnie, zawsze będzie 5.

Istotą nieporozumienia było znaczenie nadawane słowu „rozwiązanie”. Nauczyciel rozumiał je oczywiście zgodnie z matematycznym sensem, związanym z równaniami i pierwiastkami równania. W rozumieniu ucznia U₁ „rozwiązanie” otrzymujemy przez wykonanie określonej procedury (tutaj — dodania do siebie dwóch liczb). Zakończona procedura działań na liczbach daje pewien określony wynik, i jest on „rozwiązaniem”. W tym przypadku — miała to być liczba 5, i tylko 5. (U₁.01, U₁.02). Takie rozumienie „rozwiązania” jest związane z rozumieniem symbolu „=”. Często występuje ono u dzieci w wieku wczesnoszkolnym. Różnicuje ono zapis $3 + 4 = 7$ oraz $7 = 3 + 4$. Pierwszy z tych zapisów to kod dla dodawania: trzy (np. elementy) zostały dodane do czterech (elementów), i w wyniku takiej procedury powstała liczba 7. Liczba 7 jest tu „rozwiązaniem”, kończy całą procedurę dodawania. Drugi zapis ($7 = 3 + 4$), który może kodem dla procedury rozkładu liczby 7 na dwa składniki, jest dla dziecka bez sensu.

Inna interpretacja dialogu może wynikać ze stosowania procedury rozwiązywania układów dwóch równań z dwiema niewiadomymi. Uczniowie wiedzą, że otrzymując układ równań powinni wykonać szereg skomplikowanych kroków, by doprowadzić do „rozwiązania” postaci $x = \dots$, $y = \dots$. Gdy nauczyciel pytał na koniec: co jest rozwiązaniem układu, prawidłowa (akceptowana przez nauczyciela) odpowiedź często brzmi: $x =$ (określona wartość liczbową), $y =$ (określona wartość liczbową). Wartość liczbową, odczytywaną z zapisu $x = \dots$ może więc być utożsamiana z rozwiązaniem równania. W stosunku do równania z cytowanego przykładu nie bardzo wiadomo, jakie wykonywać przekształcenia. Zapis symboliczny jest prawie taki sam, jak przy „rozwiązaniach”

Ad B — Skupienie uwagi na różnych fragmentach informacji**Przykład 3**

Lekcja matematyki w klasie V, wrzesień.

Temat lekcji: *Rozwiązywanie zadań tekstowych*

Uczniowie rozwiązują zadanie następującej treści: *W dniu święta szkoły uczniowie klasy IVa zorganizowali loterię. Jeden los kosztował 2 zł. Uczniowie zebrali razem 120 zł. Ile sprzedali losów?* Jeden z uczniów podchodzi do tablicy i zaczyna pracę nad zadaniem.

1. Uczeń 01: *Mówi cicho do siebie* Jeden los kosztuje 2 zł. Uczniowie zebrali 120 zł. *Pisze* $120 : 2$
2. N. 01: sugerujesz...
3. U. 02: 120 podzielone na dwa.
4. N. 02: *patrzy na to co uczeń napisał, podchodzi do tablicy i dopisuje:* $120 \text{ zł} : 2 \text{ zł}$
5. U. 03: *kończy pisanie:* 60 zł

Komentarz:

Uczeń zrozumiał treść zadania, rozpoznał związki występujące między liczbami, znalazł metodę rozwiązania. Wiedział, że należy wykonać dzielenie. Skupił się na zapisaniu odpowiedniego działania na liczbach. Działanie miało służyć jedynie otrzymaniu liczbowego rozwiązania — i w tym momencie było oderwane od treści, w której była mowa o pieniądzach. Świadczy o tym wypowiedź (3) *120 podzielone na dwa*, co jest popularnym sposobem czytania działania dzielenia, bez rozróżniania, czy jest to dzielenie jako mieszczenie, czy jako podział. Uczeń prawdopodobnie zamierzał pracować realizując (nieświadomie) etapy: zrozumienie zadania, zbudowanie matematycznego modelu, rozwiązanie zadania w modelu, interpretowanie otrzymanego wyniku zgodnie z treścią zadania. Dla nauczyciela jednak było ważne, by nie gubić faktu, że dla rozwiązania zadania trzeba rozdzielić 120 zł na porcje 2-złotowe. Ten element informacji związanej z zadaniem postanowił uwypuklić, dopisując skrót zł przy liczbach napisanych przez ucznia. Nie pozwolił więc uczniowi pracować w obrębie tych informacji, które tamten uznał za istotne i wystarczające.

Uczeń nie odczytał intencji nauczyciela, na co wskazuje ostateczny zapis (5): 60 zł. Doliczył swoje dzielenie do końca, i na wszelki wypadek przy wyniku dopisał to, na co zwracał uwagę nauczyciel — zł.

Nauczyciel niepotrzebnie podkreślił, że w zadaniu jest mowa o pieniądzach. Ten fragment informacji z zadania tekstowego był najmniej istotny. Na dodatek wprowadził chaos do pracy ucznia. Oderwał od własnego toku myślenia lub zmusił do wykonywania czynności, których sensu uczeń w tej chwili chyba

nawet nie zamierzał analizować. Spowodował, że uczeń przez chwilę przestał myśleć, a zaczął działać tak, by spełnić hipotetyczne oczekiwania nauczyciela.

Ad C — Różne znaczenie nadawane temu samemu kluczowemu słowu

Przykład 4.

Przykład pochodzi z badań J. Hawro i B. Maj (niepublikowane). Przedstawiony dialog toczył się między uczniami I klasy gimnazjum oraz ich nauczycielką podczas omawiania wyników testu dotyczącego rozumienia pojęcia funkcji.

1. N.01: Ile rozwiązań ma równanie $x + y = 5$?
2. U₁.01: Tylko jedno, np.: $3 + 2 = 5$
3. U₂.01: Ale przecież mogą być jeszcze inne liczby, np. $10 + (-5) = 5$
4. U₁.02: No właśnie, zawsze będzie 5.

Istotą nieporozumienia było znaczenie nadawane słowu „rozwiązanie”. Nauczyciel rozumiał je oczywiście zgodnie z matematycznym sensem, związanym z równaniami i pierwiastkami równania. W rozumieniu ucznia U₁ „rozwiązanie” otrzymujemy przez wykonanie określonej procedury (tutaj — dodania do siebie dwóch liczb). Zakończona procedura działań na liczbach daje pewien określony wynik, i jest on „rozwiązaniem”. W tym przypadku — miała to być liczba 5, i tylko 5. (U₁.01, U₁.02). Takie rozumienie „rozwiązania” jest związane z rozumieniem symbolu „=”. Często występuje ono u dzieci w wieku wczesnoszkolnym. Różnicuje ono zapis $3 + 4 = 7$ oraz $7 = 3 + 4$. Pierwszy z tych zapisów to kod dla dodawania: trzy (np. elementy) zostały dodane do czterech (elementów), i w wyniku takiej procedury powstała liczba 7. Liczba 7 jest tu „rozwiązaniem”, kończy całą procedurę dodawania. Drugi zapis ($7 = 3 + 4$), który może kodem dla procedury rozkładu liczby 7 na dwa składniki, jest dla dziecka bez sensu.

Inna interpretacja dialogu może wynikać ze stosowania procedury rozwiązywania układów dwóch równań z dwiema niewiadomymi. Uczniowie wiedzą, że otrzymując układ równań powinni wykonać szereg skomplikowanych kroków, by doprowadzić do „rozwiązania” postaci $x = \dots$, $y = \dots$. Gdy nauczyciel pytał na koniec: co jest rozwiązaniem układu, prawidłowa (akceptowana przez nauczyciela) odpowiedź często brzmi: $x =$ (określona wartość liczbową), $y =$ (określona wartość liczbową). Wartość liczbową, odczytywaną z zapisu $x = \dots$ może więc być utożsamiana z rozwiązaniem równania. W stosunku do równania z cytowanego przykładu nie bardzo wiadomo, jakie wykonywać przekształcenia. Zapis symboliczny jest prawie taki sam, jak przy „rozwiązaniach”

znanych z wcześniejszych doświadczeń z równaniami. ($x = \dots$), tyle, że teraz jest to $x + y = \dots$.

Niezależnie od tego, jaką przyjmiemy interpretację odpowiedzi ucznia, jest jasne, że identyfikuje on „rozwiązanie” z wartością liczbową stojącą po prawej stronie znaku równości. Nauczyciel mógł zakładać, że uczeń klasy gimnazjalnej znak równości potraktuje jako symbol relacji symetrycznej, zaś poleceniu rozwiązanie równania nada sens bliski swojemu rozumieniu. Dlatego odpowiedź pierwszego ucznia zinterpretował jako odpowiedź błędną, gdyż odmienną od oczekiwanej: jest nieskończenie wiele par rozwiązań.

Ad D — Skupienie się na własnych celach

Przykład 5 (o mnożeniu przez pełne dziesiątki)

Widać to w zamieszczonym fragmencie protokołu lekcji w klasie III⁹.

Lekcja poświęcona jest mnożeniu liczb jednocyfrowych przez pełne dziesiątki. Nauczycielka zapisuje na tablicy działanie:

$$(30 \cdot 5 + 4 \cdot 70 + 50 \cdot 5) - (50 \cdot 5 + 5 \cdot 30 + 70 \cdot 4) =$$

N: Kto to obliczy?

U: Zero.

N: Skąd wiesz że zero, trzeba policzyć. (Wskazuje innego ucznia). Podejdź ty do tablicy i zapisz swoje obliczenia.

U: $(30 \cdot 5 + 4 \cdot 70 + 50 \cdot 5) - (50 \cdot 5 + 5 \cdot 30 + 70 \cdot 4) = (150 + 280 + 250) - (250 + 150 + 280) = 680 - 680 = 0$

N: Dobrze policzył? Tak, dobrze. Teraz zapiszę wam nowe działania:

$$(2 \cdot 80 + 6 \cdot 60 + 80 \cdot 6) - (6 \cdot 60 + 8 \cdot 60 + 2 \cdot 80) =$$

U: (kilku) Tu też będzie zero.

N: A skąd wiecie, matematycy się znaleźli, trzeba policzyć!

Komentarz:

Ta pani, która zamierzała „ćwiczyć” z dziećmi działania z mnożeniem przez pełne dziesiątki, wiedziała, że ta umiejętność jest bardzo ważna — nasz system liczenia jest systemem pozycyjnym dziesiętkowym, wiele zapisów w przyszłości będzie miało notację w postaci iloczynu liczby przez potęgę liczby 10, algorytmy wielu działań (np. mnożenie pisemne) wymagają dobrego zrozumienia, na czym polega mnożenie przez pełne dziesiątki, itd. Wynik, który należało otrzymać, nie był dla niej ważny, najważniejsze (jej zdaniem) było wykonywanie obliczeń, w trakcie których dzieci doskonaliłyby sprawność w mnożeniu

⁹Przykład ten cytuję E. Urbańska, 1996, s. 138.

przez pełne dziesiątki. Jednak skupienie się na własnym celu przesłoniło jej to, że zaistniała w klasie niezwykle ciekawa i konstruktywna sytuacja dydaktyczna. Co więcej — bardzo negatywnie oceniła tego typu zachowania dzieci, traktując je jako przejaw „wymigiwania się” od rzetelnej pracy.

Cel dziecka był zupełnie inny — wiedziało, że aby rozwiązać to zadanie do końca, trzeba podać wynik. Analizując przedstawiony zapis zadania zauważyły przy tym coś znacznie ważniejszego — zobaczyły zastosowanie praw matematycznych. Nie tylko przewidywały wynik, ale były go pewne. Wiedziały, że w takim razie wykonywanie wszystkich mozolnych przeliczeń nie ma żadnego sensu. Zaprezentowały więc postawę bardzo matematycznie pożądaną: odkryły własną strategię rozwiązania zadania, widziały słuszność tej strategii oraz jej użyteczność. Zmuszone przez nauczycielkę do zapisywania obliczeń, nauczyły się dwóch rzeczy: że nie warto być pomysłowym i oryginalnym, oraz że zadania matematyczne są nudne.

7 Podsumowanie

Podstawowym celem prowadzonych przez nas badań jest możliwość usprawnienia procesu kształcenia nauczyciela matematyki. Realizowanie lekcji matematyki w duchu konstruktywizmu stawia przed nauczycielem wyzwania, które wcześniej skrywały się w cieniu. M. Hejny i F. Kuřina stwierdzają, że jednym z najważniejszych składników matematycznego kształcenia jest wytworzenie środowiska umożliwiającego (stymulującego) twórczość własną ucznia. (Hejny, Kuřina, 2001). Wiąże się z tym umiejętność takiego prowadzenia dialogu z uczniem, który umożliwi mu tworzenie jego własnej wiedzy matematycznej, bez utrudnień wynikłych z tego, że nauczyciel go nie rozumie lub, że realizuje swoją własną wizję matematyki. W toku interakcji każda strona uczestnicząca w rozmowie ma swoją koncepcję, swój system oczekiwań, model myślowy. Na ogół każdy chce przekonać drugą osobę do własnego punktu widzenia — a takie przekonywanie polega na zrozumieniu argumentów przeciwnika i na ich obaleniu. Problem polega jednak na tym, że argumenty przeciwnika na ogół są interpretowane wewnątrz własnego systemu myślowego i własnego systemu umowy społecznej.

W niektórych pracach dotyczących konstruktywistycznego podejścia do nauczania matematyki przebija nuta gorzkiej refleksji. Twierdzi się, że podejście konstruktywistyczne pozostawiło nauczyciela matematyki zupełnie bezradnym wobec wyzwań, jakie przed nim to podejście stawia: nie sugeruje się żadnych nowych metod pracy na lekcji; metod opartych o wiedzę teoretyczną, ale użytecznych w praktyce. My uważamy, że istnieje wiele sposobów, by przygoto-

wywać nauczyciela do świadomego realizowania założeń konstruktywizmu w pracy z uczniem. Jednym z takich sposobów jest właśnie uwrażliwianie na sens uczniowskich wypowiedzi — budowanie umiejętności słuchania i interpretowania wypowiedzi uczniów. Kompetencje, jak współuczestniczyć w uczniowskim tworzeniu wiedzy, powinny być budowane na bazie wiedzy matematycznej, psychologicznej, pedagogicznej. Powinny zawierać również elementy wiedzy z teorii komunikacji. Te elementy wiedzy powinny wzajemnie się wspierać. Nauczyciel może tę wiedzy zdobywać np. przez czytanie artykułów takich jak ten. Jednak kompetencje w umiejętnym wykorzystaniu tak zdobytej wiedzy trzeba budować na bazie własnych doświadczeń, prowadząc krytyczną analizę własnych zachowań i reakcji w czasie, gdy uczniowie pracują na lekcji. W trakcie bieżącej konwersacji na ogół brakuje czasu na dokładną ocenę zdarzenia, prowadzącą do wykrycia źródeł nieporozumienia. Ale nauczyciel ma obowiązek w takich sytuacjach przede wszystkim powstrzymać się od negatywnej oceny wypowiedzi ucznia, powinien umieć wzbudzić w sobie refleksję, że być może uczeń i on po prostu się nie rozumieją, dać szansę uczniowi na wyjaśnienie swojego punktu widzenia. Potem (być może w szerszym gronie nauczycielskim) powinna nastąpić refleksja i próba pogłębionej analizy zaistniałej sytuacji.

Sugerujemy, by w pracy z przyszłymi nauczycielami starać się rozwijać ich kompetencje w rozpoznawaniu, lokalizowaniu oraz próbach zapobiegania nieporozumieniom podczas rozwiązywania w klasie zadań. Taka praca może przebiegać wielofazowo: można zaczynać od analizowania szkolnych sytuacji, w których wyraźnie można rozpoznać i zdiagnozować nieporozumienie. Stopniowo potem można przechodzić do sytuacji niezbyt czytelnych i oczywistych, w których jednak zachodzą nieporozumienia. Osoba czuwająca nad przebiegiem analizy winna nawiązywać do założeń teoretycznych, wskazywać na ich związek z obserwowaną szkolną rzeczywistością. W każdej z takich sytuacji warto dyskutować hipotetyczny scenariusz „właściwych” nauczycielskich reakcji.

Literatura

- D u b i n s k y, E.: 2000, APOS theory, *Proceedings of XXIII Conference PME 1* Haifa, Israel.
- F r e u d e n t h a l, H.: 1989, Błędy nauczyciela — analiza dydaktyczna. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **10**, 109–115.
- G ł o d o w s k i, W.: 1994, *Komunikowanie interpersonalne. Biblioteczka Oficera Prasowego* **11/94**, Biuro Prasy i Informacji Ministerstwa Obrony Narodowej, Warszawa.

- Hejný, M.: 1992, Analysis of students' solutions of equations $x^2 = a^2$ and $x^2 - a^2 = 0$. *ADUC* 1, 65-82.
- Hejný, M.: 1997, Rozwój wiedzy matematycznej, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* 19, 15-28.
- Hejný, M.: 2001, Creating mathematical Structure. *Proceedings CERME2, Marianske Lazne, J. Novotna (red.)*, Charles University, Prague, 14-24.
- Hejný, M.: 2003, Understanding and structure. *Proceedings CERME3 Bellaria-Italy, 28th Febr. - 3rd 2003*, ISBN 88 8492 184 8.
- Hejný, M., Kuřina, F.: 2001, *Dítě, škola a matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování*. Portal, s.r.o., Praha, 160-162.
- Jagoda, E., Pytlak, M., Swoboda, E., Turnau, S., Urbáňská, A.: 2004, Trójkąt epistemologiczny w badaniu tworzenia się wiedzy matematycznej, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* 27, 93-126.
- Kieran, C., Forman, E., Sfard, A.: 2001, Bridging the Individual and the Social: Discursive Approach to Research in Mathematics Education, *Educational Studies in Mathematics, A PME Special Issue*, 46, 1-3.
- Kratochvilova, J., Swoboda, E.: 2002, Analiza interakcji zachodzących podczas badań z dydaktyki matematyki, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* 24, 7-39.
- Kratochvilova, J., Swoboda, E.: 2003, Aspects Affecting Pupil's Thinking in Mathematics During Interactions Resarcher-Pupil, *Proceedings CERME3 Bellaria-Italy, 28th Febr. - 3rd 2003*, ISBN 88 8492 184 8.
- Krygowska, A. Z.: 1989, CIEAEM 39, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* 10, 149-160.
- McKay, M., Davis, M., Flanning, P.: 2004, *Sztuka skutecznego porozumiewania się*, Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne, Gdańsk 16-19.
- Semadeni, Z.: 2002, Trudności epistemologiczne związane z pojęciami: pary uporządkowanej i funkcji, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* 24, 119-144.
- Sfard, A., Nesher, P., Streefland, L., Cobb, P., Mason, J.: 1998, Learning mathematics through conversation: Is it as good as they say? *For the Learning of Mathematics*, 18 (1), 41-51.
- Sierpińska, A.: 1996, Trzy podejścia do „problemu komunikacji” w nauczaniu matematyki, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* 18, 5-29.
- Sierpińska, A.: 2002, Abstraction: Theories about the Emergence of Knowledge Structures, *Proceedings PME26*, 1, 129.
- Stehlikova, N.: 1999, Metody badawcze stosowane przez uczestników praskiego seminarium z dydaktyki matematyki, *Roczniki Polskiego Towarzy-*

stwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki **21**, 85–95.

Steinbring, H.: 2005, *The construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interactions, an Epistemological Perspective*, Mathematics Education Library, Springer, New York.

Swoboda, E.: 2000, O kształtowaniu się pojęcia matematycznego — studium przypadku. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **22**, 109–144.

Urbáňská, E.: 1996, Przykłady trudności i błędów w kształtowaniu pojęć i praw matematycznych w klasach początkowych. *Problemy Studiów Nauczycielskich* **6**, WSP, Kraków, 133–143.

Vergnaud, G.: 2005, Field of experience and conceptual field. Can these concepts help us reflect on the aims of mathematics education? *Proceedings CIEAEM 57 conference, Piazza Armerina, 23–30 July 2005*.

Cognitive obstacles in teacher-student communication

S u m m a r y

One of the phenomena characteristic of class communication is misunderstanding. In order, for a teacher, to understand students, he/she must be able to discern misunderstanding in communication. This paper presents a way, in which a teacher can develop this competence. We will describe moments of mutual misunderstandings in communication, which happened during our experiments. By analyzing and labeling them, we will illuminate some obstacles in mathematical discourse.

The analyzed problem is not only a theoretical one. We present why, in our opinion, distinguished phenomena should be treated as obstacles in learning mathematics, by showing and analyzing them in school practice.

Obstacles we described are the following:

“Different understanding of the task/situation context”

When a teacher is planning a task or experiment, which can draw pupils close to some mathematical concept, the teacher recognizes this concept in the whole situation. He/she knows what is important and what is not. A pupil who is trying to understand the situation can take into account these phenomena, which are close to his/her experience. While solving the problem he/she could use his/her own knowledge which, in his/her opinion, is useful for this situation. It could cause children’s work to go in the direction, which was not planned by the teacher.

“Different importance assigned to words in a statement”

A mathematical task brings different content, depending on which part the receiver focuses. The meaning of the whole statement is understood as we keep in mind the meaning of previously spoken words; the meaning of separate words is put into a broader context and we understand the relations between parts of the statement.

“Focus on your own aims”

The teacher knows what he aims at when suggesting work on a certain mathematical problem to the pupil. This can be exercising a skill or discovering certain properties and relations. These aims often determine the way of work on the task. Not following the expected patterns of work is often understood as a mistake.

A pupil, when taking a task, aims first of all at finding a solution in the possible easiest way, using well-known (or considered most effective) ways of work

“Different understanding of the key word”

Constructing own mathematics is a long-lasting process, during which the meaning of some words can change. Different meaning given to the same words stimulates taking different actions connected with this particular concept; it results in one word evoking different properties, different connections and relations.