Now for $n = 1, 2, \ldots$, let $\varepsilon_n = 2/(4n+1)\pi$ and let γ_n be a homeomorphism of the interval $[0, 3+2/\pi]$ onto the interval $[3+2/\pi, 6+4/\pi - \varepsilon_n]$ which maps the endpoints in the indicated order. Let $\varphi_n(\zeta t) = \zeta\gamma_n t$ for $t \epsilon [0, 3+2/\pi]$, $\varphi_n(\zeta t) = \zeta\gamma_n{}^{-1}t$ for $t \epsilon [3+2/\pi, 6+4/\pi - \varepsilon_n]$, and complete the definition of φ_n by setting $\varphi_n\zeta t = \varphi_n\big(0, \sin 1/(6+4/\pi - t)\big)$ for $t \epsilon [6+4/\pi-\varepsilon_n, 6+4/\pi]$. It is easily verified that φ_n is continuous at each point of $K\backslash\{\zeta(3+2/\pi)\}$, and that for each $\varepsilon' > \varepsilon_n$, the point $\zeta(3+2/\pi)$ admits a neighborhood U in K such that $\operatorname{diam}\varphi_n U < \varepsilon'$. Thus φ_n is $2\varepsilon_n$-continuous. But it can be verified further that $\varrho(\zeta t, \varphi_n \zeta t) \geqslant 2/\pi - \varepsilon_n$ for all $t \epsilon T$, and consequently the plane continuum K does not have the proximate fixed-point property.

Thus far we have confined our attention to metric spaces. But this was only for the sake of simplicity, and generalizations to uniform spaces are almost immediate. Proposition 2 is easily extended to cover "nearly upper semicontinuous" mappings which associate with each point of P a closed convex subset of P. The resulting generalization of Kakutani's fixed-point theorem [3] can be applied after the manner of Theorem 3 above to a compact convex set in an arbitrary locally convex Hausdorff linear space. This leads to an extension of the fixed-point theorem of Fan [1] and Glicksberg [2]. From a rather special case of that extension, the following result can be deduced:

7. THEOREM. *Suppose X is a compact Hausdorff space which is an absolute retract for such spaces. Then for each open covering $\mathcal{U}$ of X there exists a finite open covering $\mathcal{V}$ of X which has the following property:*

if φ is any mapping of X into X such that each point of X admits a neighborhood N_x for which φN_x lies in some member of $\mathcal{V}$, then there exists a point $x_0 \epsilon X$ such that x_0 and φx_0 lie together in some member of $\mathcal{U}$.

REFERENCES

[1] Ky Fan, *Fixed-point and minimax theorems in locally convex topologica linear spaces*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 38 (1952), p. 121-126.

[2] I. J. Glicksberg, *A further generalization of the Kakutani fixed-point theorem, with applications to Nash equilibrium points*, Proceedings of the American Mathematical Society 3 (1952), p. 170-174.

[3] Shizuo Kakutani, *A generalization of Brouwer's fixed-point theorem*, Duke Mathematical Journal 8 (1941), p. 457-459.

Reçu par la Rédaction le 19. 2. 1960

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VIII 1961 FASC. 1

SUR LES FONCTIONS QUASICONTINUES AU SENS DE S. KEMPISTY

PAR

S. MARCUS (BUCAREST)

1. Propriétés de structure. A et A' étant deux espaces topologiques, désignons par f une fonction définie dans A et ayant ses valeurs dans A'.

En généralisant la notion de quasicontinuité, introduite par Kempisty [4], convenons de dire que f est *quasicontinue* au point $x \epsilon A$ lorsque, pour tout voisinage U de x et pour tout voisinage V de $f(x)$, il existe un ensemble ouvert $G \subset U$ tel que $f(G) \subset V$.

B et B' étant deux espaces métriques avec les distances ϱ et ϱ' respectivement, désignons par φ une fonction définie dans B et ayant ses valeurs dans B'. Elle sera dite *avoisinée* („neighborly" selon Morse et Bledsoe [1]) au point $x \epsilon B$ lorsqu'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une sphère $S \subset B$ telle que $\varrho(x, y) + \varrho'\big(\varphi(x), \varphi(y)\big) < \varepsilon$ quel que soit $y \epsilon S$.

Elle sera dite *avoisinée au sens large* („neighborly *" selon Bledsoe [1]) au point $x \epsilon B$ lorsqu'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une sphère $S \subset B$ telle que $\varrho(x, y) + \varrho'\big(\varphi(y), \varphi(z)\big) < \varepsilon$ quels que soient $y \epsilon S$ et $z \epsilon S$.

Enfin, appelons la fonction φ *apparentée* („cliquiss" selon Thielman [8] et [9]) au point $x \epsilon B$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute sphère ouverte S contenant x, il existe une sphère $S_1 \subset S$ telle que $\varrho'\big(\varphi(y), \varphi(z)\big) < \varepsilon$ quels que soient $y \epsilon S_1$ et $z \epsilon S_1$.

Toutes les quatre notions sont des généralisations de celle de continuité. Les relations suivantes entre elles (pour les fonctions φ définies dans un espace B métrique) sont faciles à démontrer:

(i) *La quasicontinuité d'une fonction φ en un point $x \epsilon B$ équivaut à l'avoisinement de cette fonction en même point.*

(ii) *L'apparentage d'une fonction φ en un point $x \epsilon B$ équivaut à l'avoisinement au sens large de cette fonction en même point.*

(iii) *La quasicontinuité d'une fonction φ en un point $x \epsilon B$ entraîne l'apparentage de cette fonction en x.*

La réciproque n'est pas vraie: la fonction

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{pour} \quad x = 0 \end{cases}$$

est apparentée au point $x = 0$ sans y être quasicontinue.

Quelle est la structure de l'ensemble des points où une fonction est apparentée sans y être quasicontinue?

D'abord, un résultat préliminaire:

(iv) *Si les points où f est apparentée forment un ensemble partout dense dans B, les points de discontinuité de f forment un ensemble de première catégorie.*

En effet, $S \subset B$ étant une sphère ouverte, il existe un point $x \in S$ dans lequel f est apparentée. Il y a donc, pour $\varepsilon > 0$, une sphère $S_1 \subset S$ telle que $\varrho'(f(y), f(z)) < \varepsilon$ pour $y \in S_1$ et $z \in S_1$. Il s'ensuit que l'oscillation de f dans S_1 ne dépasse pas ε, donc que les points de B où l'oscillation de f dépasse ε forment un ensemble rare. En conséquence l'ensemble des points de discontinuité de f est de première catégorie.

Dans le cas particulier où B est un espace complet, (iv) entraîne le corollaire suivant:

(iv′) *Pour qu'une fonction soit apparentée dans B, il faut et il suffit qu'elle y soit ponctuellement discontinue* (1).

(v) *Les points de B où une fonction f est apparentée sans y être continue forment un ensemble de première catégorie.*

Soient en effet C l'ensemble des points où f est apparentée et D celui des points de discontinuité de f. Dans chaque sphère où C est dense, l'ensemble D, et à plus forte raison l'ensemble $C \frown D$, est de première catégorie en vertu de (iv). Par conséquent $C \frown D$ est de première catégorie dans B.

(vi) *Il existe une fonction φ de première classe de Baire d'une variable réelle et telle que les points où φ est apparentée sans être quasicontinue forment un ensemble de mesure positive dans chaque intervalle.*

Soit en effet I le segment $0 \leqslant x \leqslant 1$. Considérons (voir [6]) une fonction dérivée φ qui n'est pas négative dans I et pour laquelle les ensembles $\{x; \varphi(x) = 0\}$ et $\{x; \varphi(x) > 0\}$ sont denses dans I. D'après un théorème classique de Denjoy [3], l'ensemble $\{x; \varphi(x) > k\}$ est vide ou de mesure positive, quel que soit k réel. L'ensemble $\{x; \varphi(x) > 0\} \frown I$ est donc de mesure positive pour chaque sous-intervalle de I. D'autre part, l'ensemble $\{x; \varphi(x) = 0\}$ étant dense dans I, la fonction φ n'est

(1) C'est une généralisation d'un théorème énoncé dans [1] sans démonstration.

quasicontinue en aucun point de l'ensemble $\{x; \varphi(x) > 0\}$ (2). En même temps φ, en tant qu'une dérivée, est de première classe de Baire, donc ponctuellement discontinue dans I. En vertu de (iv′), φ est par conséquent apparentée dans I.

En vertu de (iv′), toute fonction monotone dans I y est apparentée. Néanmoins

(vii) *Il existe une fonction g monotone dans I et telle que les points où elle n'est pas quasicontinue forment un ensemble dense dans I.*

Soit en effet $r_1, r_2, \ldots$ la suite des nombres rationnels de I. Posons:

$$\psi(x) = \sum_{r_n < x} \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \psi(x) \text{ pour } x \text{ irrationnel}, \\ \psi(r_n) - \dfrac{1}{2 \cdot 2^n} \text{ pour } n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

La fonction g est croissante dans I, mais elle n'est continue en r_n ni de gauche, ni de droite. Elle n'est donc quasicontinue au point r_n pour aucun $n = 1, 2, \ldots$, car la continuité unilatérale est nécessaire pour la quasicontinuité dans un point de discontinuité de première espèce.

(viii) *Toute fonction apparentée dans un espace métrique B et ayant ses valeurs dans un espace métrique séparable B' jouit de la propriété de Baire au sens large.*

Vu (iv′) et [5], p. 306, toute fonction apparentée dans B et ayant ses valeurs dans B' séparable jouit de la propriété de Baire au sens large.

(ix) *Il existe une fonction réelle de variable réelle, de deuxième classe de Baire et qui n'est apparentée en aucun point.*

La fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \text{ irrationnel}, \\ 1 & \text{pour } x \text{ rationnel} \end{cases}$$

est en effet de deuxième classe de Baire sans être apparentée en aucun point.

(x) *Il existe une fonction réelle, quasicontinue en tout point de I, mais non mesurable au sens de Lebesgue.*

(xi) *Quel que soit l'ordinal α de première ou seconde classe transfinie, il existe une fonction quasicontinue dans I et de classe α de Baire effective dans I.*

En effet, $P \subset I$ étant un ensemble parfait rare et de mesure positive, désignons par N l'ensemble des extrémités de tous les intervalles fermés

(2) Il en résulte, entre autres, l'inexactitude du théorème 3 de [7], d'après lequel toute fonction de première classe de Baire et jouissant de la propriété de Darboux sur un intervalle y est avoisinée, donc quasicontinue en vertu de (i).

$I_1, I_2, \ldots$ contigus à P, supposés numérotés de façon que chaque voisinage d'un point de $P-N$ contienne un intervalle à indice pair et un autre à indice impair. Considérons un ensemble arbitraire $R \subset P-N$ et posons pour $n = 1, 2, \ldots$

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ lorsque } x \in R \text{ ou bien } x \in I_{2n-1}, \\ 1 \text{ lorsque } x \in P-N-R \text{ ou bien } x \in I_{2n}. \end{cases}$$

La fonction f est évidemment quasicontinue dans I. Si l'ensemble R n'est pas mesurable au sens de Lebesgue (ce qui est possible, P étant supposé de mesure positive), la fonction f n'est pas mesurable non plus, ce qui démontre (x).

Mais on peut choisir R mesurable et tel qu'il soit d'une classe borelienne α donnée d'avance, donc que la fonction f appartienne à la classe α de Baire. On a ainsi (xi).

(xii) *Il existe une fonction réelle f apparentée dans I, mais qui n'est pas mesurable par rapport à aucun sous-ensemble de mesure positive de I.*

En effet, considérons dans I une suite $P_1, P_2, \ldots$ d'ensembles parfaits, rares, disjoints et tels que la mesure de P_n soit $1/2^n$. Désignons par A_n un sous-ensemble quelconque de P_n, non mesurable et dont la mesure extérieure soit $1/2^n$. La fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1/n, \text{ si } x \in A_n \ (n = 1, 2, \ldots), \\ 0, \text{ si } x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \end{cases}$$

satisfait aux conditions requises (³).

D'après Bledsoe [1] et en vertu de (i), on a le théorème suivant lorsque B est un espace complet:

(xiii) *La limite d'une suite convergente $\{f_n\}$ de fonctions quasicontinues dans B est une fonction ponctuellement discontinue dans B* (⁴).

2. Applications à la différentiabilité des fonctions de plusieurs variables. Considérons une fonction réelle f de plusieurs variables réelles $x_1, x_2, \ldots, x_n$ définie dans un domaine $D \subset R^n$ et continue dans D par

(³) Il est facile de modifier cette construction pour obtenir une fonction avoisinée qui n'est mesurable par rapport à aucun ensemble de mesure positive (théorème énoncé par Bledsoe [1] sans démonstration).

(⁴) L'hypothèse de quasicontinuité simultanée des fonctions f_n, faite pour le même but par Kempisty [4], est superflue.

rapport à chaque variable séparément. Admettons qu'il existe dans D, pour un certain i, la dérivée partielle finie $\partial f/\partial x_i$. Alors en posant

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

$$\varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = m\left[f\left(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i + \frac{1}{m}, x_{i+1}, \ldots, x_n\right) - \right.$$
$$\left. - f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)\right],$$

on a

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lim_{m\to\infty} \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Mais la fonction f étant continue dans D par rapport à chacune des variables, il en est de même de la fonction φ_m. Il s'ensuit (Kempisty [4], p. 186) que φ_m est quasicontinue dans D. En vertu de (xiii), on peut donc énoncer le théorème

(xiv) *Si une fonction réelle $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est continue dans un domaine D par rapport à chacune des variables et s'il existe pour un certain i la dérivée partielle d'ordre premier par rapport à x_i, cette dérivée est ponctuellement discontinue dans D.*

On retrouve ainsi le résultat que Kempisty avait obtenu à l'aide de sa notion de quasicontinuité simultanée ([4], p. 194).

Il est à noter que, pour les fonctions de deux variables, le théorème (xiv) peut être déduit aussi d'un théorème de Tolstov ([10], théorème 4) d'après lequel f étant une fonction de deux variables, continue dans un domaine $D \subset R^2$ par rapport à chacune d'elles séparément et y ayant la dérivée partielle finie d'ordre m par rapport à x, cette dérivée est de première classe de Baire, quel que soit l'entier positif m. Le théorème (xiv) pour le cas de deux variables se trouve établi déjà dans la Thèse de Baire (par un raisonnement plus spécial).

Si l'on tient compte du théorème classique de Stolz, d'après lequel toute fonction de deux variables, partiellement dérivable, est différentiable en chaque point où au moins une des dérivées partielles d'ordre premier est continue, on déduit de (xiv) le corollaire suivant:

(xiv′) *Les points d'un domaine $D \subset R^2$ dans lesquels une fonction de deux variables, ayant les dérivées partielles d'ordre premier finies dans D, n'est pas différentiable forment un ensemble E de première catégorie.*

Un exemple de Tolstov ([10], p. 431-433) montre que l'ensemble exceptionnel E considéré dans le corollaire (xiv′), bien que de première catégorie, peut être d'une mesure arbitrairement proche de celle de D. En se bornant au cas où la fonction f est différentiable dans D, il semble intéressant d'établir la structure de l'ensemble des points où l'une au moins des dérivées partielles d'ordre premier est discontinue. Cet ensemble est, en tout cas, de première catégorie. Mais quelle est sa mesure? Peut-il être dense dans D? Voici la réponse à ces questions:

(xv) *Il existe une fonction $F(x,y)$ ayant en chaque point du carré-unité des dérivées partielles d'ordre premier finies, et telle que les points où l'une au moins de ces dérivées est discontinue forment un ensemble de mesure linéaire positive sur tout segment de droite parallèle à Ox ou à Oy.*

Telle est en effet la fonction $F(x,y) = \varphi(x)+\varphi(y)$, où φ est la fonction utilisée dans la démonstration de (v).

3. Applications au problème de commutativité de l'opération de dérivation dans le calcul des dérivées partielles mixtes. D'après un théorème de Currier [2], retrouvé et précisé par Tolstov [10], quelle que soit la fonction f de deux variables ayant dans D toutes les dérivées partielles (finies) d'ordre 2, on a presque partout dans D

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}.$$

Peut-on affirmer que l'ensemble des points où les deux dérivées partielles mixtes sont différentes (donc qui est de mesure nulle) est de première catégorie de Baire? Le théorème suivant donne la réponse affirmative à cette question:

(xvi) *Étant donné un entier positif p, soit $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction réelle ayant toutes les dérivées partielles mixtes (finies) d'ordre p dans un domaine $D \subset R^n$ et telle que, pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$, la dérivée partielle d'ordre $p-1$ par rapport à x_i est continue par rapport à x_i. Alors deux dérivées partielles mixtes d'ordre p au plus et qui ne diffèrent que par l'ordre de dérivation coïncident dans D, sauf tout au plus dans un ensemble de première catégorie.*

En effet, vu le théorème classique de Schwarz sur la commutativité de l'opération de dérivation, il suffit de montrer qu'il existe un ensemble E de première catégorie et tel que toutes les dérivées partielles mixtes de f d'ordre p au plus sont continues aux points de $D-E$. Mais chacune des dérivées partielles d'ordre $p-1$ au plus étant, par hypothèse, continue dans D par rapport à chaque variable x_i séparément, chacune des dérivées partielles mixtes d'ordre p au plus est ponctuellement discontinue dans D en vertu de (xiv).

Il est à remarquer que le théorème (xvi) cesse d'être vrai si l'on remplace dans son énoncé les mots *première catégorie* par les mots *mesure nulle*. En effet, comme l'a montré Tolstov [11], il existe une fonction $f(x,y)$ continue dans un domaine $D \subset R^2$, ayant les dérivées partielles d'ordre 1 continues dans D et dont les dérivées partielles mixtes d'ordre 2 existent partout dans D, mais y diffèrent sur un ensemble de mesure positive.

Pour le cas particulier des fonctions de deux variables, le théorème (xvi) se laisse également déduire du théorème précité de Tolstov ([10], théorème 4), dont la démonstration est toutefois moins simple.

TRAVAUX CITÉS

[1] W. Bledsoe, *Neighborly functions*, Proceedings of the American Mathematical Society 3 (1952), p. 114-115.

[2] A. E. Currier, *Proof of the fundamental theorems on second order cross partial derivatives*, Transactions of the American Mathematical Society 35 (1933), p. 245-253.

[3] A. Denjoy, *Sur une propriété des fonctions dérivées*, L'Enseignement Mathématique 18 (1916), p. 320-328.

[4] S. Kempisty, *Sur les fonctions quasicontinues*, Fundamenta Mathematicae 19 (1932), p. 184-197.

[5] C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Wrocław 1948.

[6] D. Pompeiu, *Sur les fonctions dérivées*, Mathematische Annalen 63 (1907), p. 326.

[7] N. B. Smith, *Types of functions*, Proceedings of the Iowa Academy of Sciences 61 (1954), p. 324-329 (cité d'après Mathematical Reviews 1955, p. 682).

[8] H. P. Thielman, *Pathological functions*, Proceedings of the Iowa Academy of Sciences 59 (1952), p. 338-343 (cité d'après Mathematical Reviews 1953, p. 628).

[9] — *Types of functions*, American Mathematical Monthly 60 (1953), p. 156-161 (cité d'après Mathematical Reviews 1953, p. 628).

[10] G. P. Tolstov, *Sur les dérivées partielles* (en russe), Izviestia Akademii Nauk 13 (1949), p. 425-446.

[11] — *Sur la dérivée partielle mixte d'ordre* 2 (en russe), Matematičeskiĭ Sbornik 24 (1949), p. 27-51.

Reçu par la Rédaction le 1. 12. 1958