$$= \sum_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \operatorname{sgn}\mathfrak{p}\operatorname{sgn}\mathfrak{q} \begin{vmatrix} \xi_{p_1}BTx_{q_1} & \dots & \xi_{p_1}BTx_{q_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_{p_k}BTx_{q_1} & \dots & \xi_{p_k}BTx_{q_k} \end{vmatrix} \cdot D_r\begin{pmatrix} \xi_{p_{k+1}} & \dots & \xi_{p_{k+r}} \\ Tx_{q_{k+1}} & \dots & Tx_{q_{k+r}} \end{pmatrix}$$

$$= D_{r+k}\begin{pmatrix} \xi_1 & \dots & \xi_{r+k} \\ Tx_1 & \dots & Tx_{r+k} \end{pmatrix}.$$

This completes the proof.

Having proved the above theorem we can easily obtain the formulae for solutions of the Fredholm type (see R. Sikorski [3]).

REFERENCES

[1] A. Grothendieck, *La théorie de Fredholm*, Bulletin de la Société Mathématique de France (1956), p. 319-384.

[2] R. Sikorski, *Determinant systems*, Studia Mathematica 18 (1959), p. 161-186.

[3] — *Remarks on Leżanski's determinants*, ibidem 20 (1961), p. 145-161

Reçu par la Rédaction le 19. 9. 1962

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. X 1963 FASC. 2

SUR LES ÉQUATIONS HYPERBOLIQUES AVEC PETIT PARAMÈTRE

PAR

J. KISYŃSKI (VARSOVIE)

Considérons le problème de Cauchy abstrait

(0.1) $$\varepsilon x''(t)+x'(t)+Ax(t) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1$$

avec petit $\varepsilon > 0$ et opération A autoadjointe non négative dans un espace de Hilbert H_0. Dans le cas où $H_0 = (-\infty, +\infty)$, A est l'opération de multiplication par un nombre (non négatif) et, pour $0 \leqslant t < +\infty$, la solution du problème (0.1) prend alors la forme

(0.2) $$x(t) = x_0(t)+\varepsilon e^{-t/\varepsilon}(Ax_0+x_1)+y_\varepsilon(t),$$

où $\lim_{\varepsilon\to+0} y_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon\to+0} y'_\varepsilon(t) = 0$ uniformément sur l'intervalle $0 \leqslant t < +\infty$ et $x_0(t) = e^{-tA}x_0$ est la solution du problème

(0.3) $$x'(t)+Ax(t) = 0, \quad x(0) = x_0.$$

Zlámal [8]-[10] a montré par la méthode de Fourier que le comportement asymptotique du type (0.2) a aussi lieu pour les équations hyperboliques du second ordre du type (0.1) dans lesquelles $-A$ est une opération symétrique fortement elliptique (1). Ici, je me propose de montrer que le comportement asymptotique du type (0.2) a lieu pour tout problème du type (0.1) avec une opération A autoadjointe non négative dans un espace de Hilbert quelconque.

1. Semi-groupes à un paramètre d'opérations. Rappelons d'abord quelques notions de la théorie des semi-groupes.

Soit X un espace de Banach. On appelle *semi-groupe* (ou *groupe* respectivement) à un paramètre d'opérations dans l'espace X toute famille $S(t)$ où $0 \leqslant t < +\infty$ (ou $-\infty < t < +\infty$ respectivement) d'opé-

(1) Les équations hyperboliques dans lesquelles la seconde dérivée au temps contient un petit paramètre ont été étudiées dans [3] et dans la thèse de Nikolski citée dans [2]. Dans [8] et [10], il s'agit des équations aux coefficients dépéndant de t.

rations linéaires bornées transformant l'espace X en lui-même et telle que [2] $S(0) = 1$ et $S(t_1)S(t_2) = S(t_1+t_2)$ pour $0 \leqslant t_1, t_2 < +\infty$ (ou pour $-\infty < t_1, t_2 < +\infty$ respectivement). Un semi-groupe (ou un groupe respectivement) est dit *fortement continu* lorsqu'on a

$$\lim_{t\to 0} S(t)x = x \quad \text{pour tout } x \in X$$

au sens de la norme dans X. On appelle opération *génératrice* du semi--groupe (ou du groupe) $S(t)$ l'opération G définie par les conditions suivantes [3]:

$$D(G) = \{x\colon x\in X, \lim_{t\to 0} t^{-1}(S(t)x - x) \text{ au sens de la norme dans } X \text{ existe}\},$$

$$Gx = \lim_{\to 0} t^{-1}\big(S(t)x - x\big) \text{ pour tout } x \in D(G).$$

Soit G l'opération génératrice d'un semi-groupe (ou d'un groupe) fortement continu $S(t)$ d'opérations dans un espace de Banach X. Alors

1.1. *G est une opération fermée et son domaine $D(G)$ est dense dans X.*

1.2. *On a $dS(t)x_0/dt = GS(t)x_0 = S(t)Gx_0$ pour tout $x_0 \in D(G)$, où $0 \leqslant$ $\leqslant t < +\infty$ $(-\infty < t < +\infty$ respectivement), la fonction $x(t) = S(t)x_0$ étant pour tout $T > 0$ (ou $T \neq 0$ respectivement) la seule solution différentiable au sens de la norme dans X du problème de Cauchy $x'(t) = Gx(t)$, $x(0) = x_0$, sur l'intervalle $t(T-t) \geqslant 0$.*

1.3. *Lorsque A est une opération fermée et son domaine $D(A)$ est dense dans X, alors les conditions $A \subset G$ et $S(t)D(A) \subset D(A)$ pour tout $t \geqslant 0$ entraînent l'égalité $A = G$.*

Démonstration de 1.3. On a $\|S(t)\| \leqslant Me^{-\lambda_0 t}$. Pour tout $\lambda > \lambda_0$ l'opération $x \to L(\lambda)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}S(t)x\,dt$ est bornée et transforme X en lui-même. D'après les inclusions admises et d'après 1.2, on a $dS(t)x/dt =$ $= AS(t)x = S(t)Ax$ pour $x \in D(A)$. Par conséquent, l'opération A étant fermée, on a $(\lambda - A)L(\lambda)x = \int_0^{+\infty} (\lambda - A)e^{-\lambda t}S(t)x\,dt = L(\lambda)(\lambda - A)x =$ $= -\int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}(e^{-\lambda t}S(t)x)\,dt = x$ pour $x \in D(A)$ et $\lambda > \lambda_0$, d'où, $D(A)$ étant dense, $L(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}$ pour $\lambda > \lambda_0$. On a de même (cf. [1], théorème 11.5.1, p. 343) $L(\lambda) = (\lambda - G)^{-1}$ pour $\lambda > \lambda_0$ et par conséquent $A = G$.

Il résulte de 1.1 et 1.2 qu'un semi-groupe (ou un groupe) fortement continu est univoquement défini par son opération génératrice. Nous désignerons par $\exp(tG)$ un semi-groupe (ou groupe) dont l'opération génératrice est G.

[2] L'opération de multiplication par un nombre λ sera désignée simplement par λ.

[3] $D(G)$ désigne le domaine de l'opération G quelconque.

2. Le problème (0.1) **dans le cas numérique.** Pour $H_0 = (-\infty, +\infty)$, le problème (0.1) prend la forme

$$\varepsilon x''(t) + x'(t) + \lambda x(t) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \tag{2.1}$$

où $\varepsilon > 0$ et $\lambda \geqslant 0$. Pour la solution du problème (2.1), on a les formules

$$x(t) = s_{00}(t, \varepsilon, \lambda)x_0 + s_{01}(t, \varepsilon, \lambda)x_1,$$
$$x'(t) = s_{10}(t, \varepsilon, \lambda)x_0 + s_{11}(t, \varepsilon, \lambda)x_1,$$

où

$$\begin{pmatrix} s_{00}(t,\varepsilon,\lambda) & s_{01}(t,\varepsilon,\lambda) \\ s_{10}(t,\varepsilon,\lambda) & s_{11}(t,\varepsilon,\lambda)\end{pmatrix} = \exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda/\varepsilon & -1/\varepsilon\end{pmatrix}\right) \tag{2.2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda/\varepsilon & -1/\varepsilon\end{pmatrix}^n.$$

LEMME 2.1. *On a pour $\varepsilon > 0$, $\lambda \geqslant 0$ et $-\infty < t < +\infty$*

$$|s_{ii}(t,\varepsilon,\lambda)| \leqslant \max(1, e^{-t/\varepsilon}) \quad \text{où} \quad i = 0 \text{ et } 1, \tag{2.3}$$

$$|s_{01}(t,\varepsilon,\lambda)| \leqslant \sqrt{\varepsilon/\lambda}\,\max(1, e^{-t/\varepsilon}) \quad \text{si} \quad \lambda > 0, \tag{2.4}$$

$$|s_{10}(t,\varepsilon,\lambda)| \leqslant \sqrt{\lambda/\varepsilon}\,\max(1, e^{-t/\varepsilon}), \tag{2.5}$$

$$|s_{01}(t,\varepsilon,\lambda)| \leqslant \max(\varepsilon, -te^{-t/\varepsilon}) \tag{2.6}$$

et pour $\varepsilon > 0$, $\lambda \geqslant 0$ et $t \geqslant 0$

$$|s_{11}(t,\varepsilon,\lambda) - e^{-t/\varepsilon}| \leqslant \min\left(\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon\lambda}, \varepsilon\lambda\right), \tag{2.7}$$

$$|s_{00}(t,\varepsilon,\lambda) - e^{-\lambda t}| \leqslant \min\left(\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon\lambda}, \frac{3}{2}\varepsilon\lambda\right), \tag{2.8}$$

$$|s_{10}(t,\varepsilon,\lambda) - \lambda s_{11}(t,\varepsilon,\lambda) + \lambda e^{-\lambda t}| \leqslant \lambda\min\left(\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon\lambda}, \frac{3}{2}\varepsilon\lambda\right). \tag{2.9}$$

Démonstration. Si $\lambda = 0$, ces inégalités résultent immédiatement de la formule

$$\exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/\varepsilon\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon(1 - e^{-t/\varepsilon}) \\ 0 & e^{-t/\varepsilon}\end{pmatrix}.$$

Admettons donc que $\lambda > 0$ et que ε et λ sont fixés; nous écrirons s_{ik} ou $s_{ik}(t)$ au lieu de $s_{ik}(t, \varepsilon, \lambda)$.

Soit $x(t)$ la solution du problème (2.1). Alors

$$\frac{d}{dt}(\varepsilon x'^2 + \lambda x^2) + 2x'^2 = 2x'(\varepsilon x'' + x' + \lambda x) = 0,$$

donc

$$\varepsilon\big(x'(t)\big)^2+\lambda\big(x(t)\big)^2+2\int_0^t\big(x'(\tau)\big)^2d\tau = \varepsilon x_1^2+\lambda x_0^2$$

pour $t\in(-\infty, +\infty)$ et

$$\frac{d}{dt}\big(e^{2t/\varepsilon}(\varepsilon x'^2+\lambda x^2\big) = 2(\lambda/\varepsilon)e^{2t/\varepsilon}x^2 \geqslant 0,$$

d'où

$$\varepsilon\big(x'(t)\big)^2+\lambda\big(x(t)\big)^2 \leqslant (\varepsilon x_1^2+\lambda x_0^2)e^{-2t/\varepsilon}$$

pour $t\in(-\infty, 0\rangle$. Par conséquent, puisque $x(t) = s_{00}(t)x_0+s_{01}(t)x_1$ et $x'(t) = s_{10}(t)x_0+s_{11}(t_0)x_1$, on a, en posant $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$ ou bien $x_0=1$ et $x_1 = 0$, les formules (2.3)-(2.5) ainsi que les formules

$$\int_0^{+\infty}\big(s_{10}(t)\big)^2dt \leqslant \frac{1}{2}\lambda, \tag{2.10}$$

$$\int_0^{+\infty}\big(s_{11}(t)\big)^2dt \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon. \tag{2.11}$$

Pour démontrer les inégalités (2.6)-(2.9), nous nous appuierons sur les équations

$$ds_{00}/dt = \lambda(s_{11}-s_{00}) = s_{10} = -(\lambda/\varepsilon)s_{01}, \tag{2.12}$$

$$ds_{01}/dt = -(1/\varepsilon)s_{01}+s_{00} = s_{11}, \tag{2.13}$$

$$ds_{11}/dt = -(1/\varepsilon)s_{11}+s_{10}, \tag{2.14}$$

qui résultent des équations suivantes, évidentes d'après (2.2):

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}s_{00} & s_{01}\\ s_{10} & s_{11}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -\lambda/\varepsilon & -1/\varepsilon\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s_{00} & s_{01}\\ s_{10} & s_{11}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s_{00} & s_{01}\\ s_{10} & s_{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\lambda/\varepsilon & -1/\varepsilon\end{pmatrix}.$$

Ad (2.6). En vertu de (2.13), on a

$$s_{01}(t) = e^{-t/\varepsilon}\int_0^t e^{\tau/\varepsilon}s_{00}(\tau)d\tau,$$

d'où, en tenant compte de (2.3), il vient

$$|s_{01}(t)| \leqslant e^{-t/\varepsilon}\Big|\int_0^t \max(e^{\tau/\varepsilon}, 1)d\tau\Big| \leqslant \max(\varepsilon, -te^{-t/\varepsilon}).$$

Ad (2.7). On a $s_{11}(t) = e^{-t/\varepsilon}+e^{-t/\varepsilon}\int_0^t e^{\tau/\varepsilon}s_{10}(\tau)d\tau$ d'après (2.14). Il résulte de (2.6) et (2.12) que

$$\Big|\int_0^t e^{\tau/\varepsilon}s_{10}(\tau)d\tau\Big| \leqslant \lambda\int_0^t e^{\tau/\varepsilon}d\tau \leqslant \varepsilon\lambda e^{t/\varepsilon}.$$

Enfin, (2.10) entraîne

$$\Big|\int_0^t e^{\tau/\varepsilon}s_{10}\tau\,d\tau\Big| \leqslant \Big(\int_0^t e^{2\tau/\varepsilon}d\tau\Big)^{1/2}\Big(\int_0^t s_{10}^2d\tau\Big)^{1/2} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon\lambda}\,e^{t/\varepsilon}.$$

Ad (2.8). On a d'après (2.12)

$$s_{00}(t) = e^{-\lambda t}+\lambda e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda\tau}s_{11}(\tau)d\tau \tag{2.15}$$

et, vu que

$$\Big|\int_0^t e^{\lambda\tau}s_{11}(\tau)d\tau\Big| \leqslant \Big(\int_0^t e^{2\lambda\tau}d\tau\Big)^{1/2}\Big(\int_0^t s_{11}^2d\tau\Big)^{1/2} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon/\lambda}\,e^{\lambda\tau}$$

en vertu de (2.11), on obtient $|s_{00}(t)-e^{-\lambda t}| \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon\lambda}$. Vu (2.13), on déduit de (2.15) en intégrant par parties

$$s_{00}(t) = e^{-\lambda t}+\lambda s_{01}(t)-\lambda^2e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda\tau}s_{01}(\tau)d\tau.$$

On a d'après (2.12) et (2.10)

$$\Big|\int_0^t e^{\lambda\tau}s_{01}(\tau)d\tau\Big| = (\varepsilon/\lambda)\Big|\int_0^t e^{\lambda\tau}s_{10}(\tau)d\tau\Big| \leqslant (\varepsilon/\lambda)\Big(\int_0^t e^{2\lambda\tau}d\tau\Big)^{1/2}\Big(\int_0^t s_{10}^2d\tau\Big)^{1/2}$$
$$\leqslant \frac{1}{2}(\varepsilon/\lambda)e^{\lambda\tau},$$

d'où $|s_{00}(t)-e^{-\lambda t}| \leqslant \frac{3}{2}\varepsilon\lambda$ en vertu de (2.6).

Ad (2.9). On a $s_{10}(t)-\lambda s_{11}(t)+\lambda e^{-\lambda t} = -\lambda(s_{00}(t)-e^{-\lambda t})$ d'après (2.12). Par conséquent (2.9) résulte de (2.8).

3. Le problème (0.1) **dans un espace de Hilbert.** Soient H_0 un espace de Hilbert avec produit scalaire $(x, y)_0$ et A une opération autoadjointe non négative dans H_0. Désignons par H_1 l'espace de Hilbert constitué par $D(A^{1/2})$ avec le produit scalaire $(x, y)_1 = (x+A^{1/2}x, y+A^{1/2}y)_0$, par $\|\ \|_i$ la norme dans H_i, et par ${}_i\|\ \|_k$ la norme de l'opération bornée de H_k dans H_i. Les éléments du produit cartésien $H_1\times H_0$ seront représentés sous la forme $x = \begin{pmatrix}x_0\\ x_1\end{pmatrix}$ où $x_i\in H_{1-i}$.

Nous étudierons le problème (0.1) à l'aide du calcul fonctionnel d'une opération autoadjointe (cf. [4] et [7]). Soit $\{E_\lambda\}$ une décomposition l'unité dans H_0, telle que $A = \int_0^\infty \lambda\,dE_\lambda$. Posons pour tout $\varepsilon > 0$ fixé

$$D(A_\varepsilon) = D(A)\times D(A^{1/2}),$$

$$A_\varepsilon x = \begin{pmatrix}x_1\\ -(1/\varepsilon)Ax_0-(1/\varepsilon)x_1\end{pmatrix} \quad \text{où} \quad x = \begin{pmatrix}x_0\\ x_1\end{pmatrix}\in D(A_\varepsilon).$$

THÉORÈME 3.1. *Pour tout $\varepsilon>0$, A_ε est l'opération génératrice d'un groupe fortement continu d'opérations dans l'espace $H_1\times H_0$. Si les $s_{ik}(t,\varepsilon,\lambda)$ sont définis par la formule* (2.2), *on a, quels que soient $x=\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\end{pmatrix}\epsilon H_1\times H_0$ et $t\,\epsilon(-\infty,+\infty)$,*

$$\exp(tA_\varepsilon)x=\begin{pmatrix}S_{00}(t,\varepsilon)x_0+S_{01}(t,\varepsilon)x_1\\ S_{10}(t,\varepsilon)x_0+S_{11}(t,\varepsilon)x_1\end{pmatrix},\tag{3.1}$$

où

$$S_{ik}(t,\varepsilon)=\int_0^{+\infty}s_{ik}(t,\varepsilon,\lambda)\,dE_\lambda.\tag{3.2}$$

Ce théorème sera démontré plus loin (voir n° 4). Pour le moment nous en allons déduire une conséquence.

En vertu de 1.2, il résulte du théorème 3.1 que la fonction

$$x(t)=S_{00}(t,\varepsilon)x_0+S_{01}(t,\varepsilon)x_1\quad\text{où}\quad -\infty<t<+\infty,\tag{3.3}$$

prend pour tout $x_0\,\epsilon D(A)$ et $x_1\,\epsilon D(A^{1/2})$ ses valeurs dans $D(A)$ et qu'elle est une solution du problème (0.1) une fois continûment différentiable au sens de la norme $\|\ \|_1$ et deux fois continûment différentiable au sens de la norme $\|\ \|_0$. En outre

$$x'(t)=S_{10}(t,\varepsilon)x_0+S_{11}(t,\varepsilon)x_1\quad\text{où}\quad -\infty<t<+\infty.\tag{3.4}$$

Pour tout $T\neq 0$, la fonction (3.3) est sur l'intervalle $t(T-t)\geqslant 0$ l'unique solution du problème (0.1) qui soit deux fois différentiable au sens de la norme $\|\ \|_0$ [4].

La solution du problème (0.3) s'exprime par la formule

$$x_0(t)=\exp(-tA)x_0\quad\text{pour}\quad 0\leqslant t<+\infty,\tag{3.5}$$

où $\exp(-tA)=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}dE_\lambda$ est un semi-groupe fortement continu d'opérations dans l'espace H_0, l'opération génératrice de ce semi-groupe étant $-A$.

---

[4] Si $x(t)$ est la solution de (0.1) pour $x_0=x_1=0$, alors $x_n(t)=E_nx(t)$ satisfait à l'équation $\varepsilon x''+x_{n'}+A_nx_n=0$ où $A_n=\int_0^n\lambda\,dE_\lambda$. Comme $x_{n'}(0)=x_n(0)=0$ et A_n est une opération bornée, on a $E_nx(t)=x_n(t)\equiv 0$ pour tout $n=1,2,\ldots$, d'où $x(t)=\lim_{n\to\infty}E_nx(t)\equiv 0$ (cf. [5], p. 272).

THÉORÈME 3.2. *Quels que soient $\varepsilon>0$ et $t\geqslant 0$, on a*

$$\|S_{00}(t,\varepsilon)x-\exp(-tA)x\|_0\leqslant\begin{cases}\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}\,\|A^{1/2}x\|_0 & si\quad x\,\epsilon D(A^{1/2}),\\ \frac{3}{2}\varepsilon\|Ax\|_0 & si\quad x\,\epsilon D(A),\end{cases}\tag{3.6}$$

$$\|S_{01}(t,\varepsilon)x\|_0\leqslant\varepsilon\|x\|_0\quad pour\quad x\,\epsilon H_0,\tag{3.7}$$

$$\|S_{10}(t,\varepsilon)x-S_{11}(t,\varepsilon)Ax+\exp(-tA)Ax\|_0\tag{3.8}$$

$$\leqslant\begin{cases}\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}\,\|A^{3/2}x\|_0 & si\quad x\,\epsilon D(A^{3/2}),\\ \frac{3}{2}\varepsilon\|A^2x\|_0 & si\quad x\,\epsilon D(A^2),\end{cases}$$

$$\|S_{11}(t,\varepsilon)x-e^{-t/\varepsilon}x\|_0\leqslant\begin{cases}\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}\,\|A^{1/2}x\|_0 & si\quad x\,\epsilon D(A^{1/2}),\\ \varepsilon\|Ax\|_0 & si\quad x\,\epsilon D(A).\end{cases}\tag{3.9}$$

Démonstration. Ces inégalités résultent immédiatement du lemme 2.1. Pour $x\,\epsilon D(A^{1/2})$ par exemple, on a d'après (2.8)

$$\|S_{00}(t,\varepsilon)x-\exp(-tA)x\|_0^2=\int_0^{+\infty}\big(s_{00}(t,\varepsilon,\lambda)-e^{-\lambda t}\big)^2d\|E_\lambda x\|_0^2$$

$$\leqslant\int_0^{+\infty}\Big(\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon\lambda}\Big)^2d\|E_\lambda x\|_0^2=\frac{1}{4}\varepsilon\|A^{1/2}x\|_0^2,$$

ce qui établit la première partie de la formule (3.6). Il en est pareillement dans les autres cas.

En vertu de (3.6)-(3.9), les fonctions (3.3) et (3.5) satisfont, pour $\varepsilon>0$ et $t\geqslant 0$, aux inégalités

$$\|x(t)-x_0(t)\|_0\leqslant\varepsilon\|x_1\|_0+\begin{cases}\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}\,\|A^{1/2}x_0\|_0 \text{ si } x_0\,\epsilon D(A^{1/2}) \text{ et } x_1\,\epsilon H_0,\\ \frac{3}{2}\varepsilon\|Ax_0\|_0 \text{ si } x_0\,\epsilon D(A) \text{ et } x_1\,\epsilon H_0,\end{cases}$$

$$\|x'(t)-x_0'(t)-e^{-t/\varepsilon}(x_1+Ax_0)\|_0$$

$$\leqslant\begin{cases}\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}\,(\|A^{3/2}x_0\|_0+\|A^{1/2}(x_1+Ax_0)\|_0) \text{ si } x_0\,\epsilon D(A^{3/2}) \text{ et } x_1\,\epsilon D(A^{1/2}),\\ \varepsilon(\|A^2x_0\|_0+\frac{3}{2}\|A(x_1+Ax_0)\|_0) \text{ si } x_0\,\epsilon D(A^2) \text{ et } x_1\,\epsilon D(A);\end{cases}$$

le comportement asymptotique du type (0.2) est ainsi établi.

4. Démonstration du théorème 3.1. Nous l'appuierons sur trois lemmes.

LEMME 4.1. *Pour tout $\varepsilon>0$, A_ε est dans l'espace $H_1\times H_0$ une opération fermée et son domaine $D(A_\varepsilon)$ y est dense.*

Démonstration. $A^{1/2}$ étant une opération autoadjointe dans H_0, $D(A^{1/2})$ est $\|\ \|_0$-dense dans H_0. Puisque $1+A^{1/2}$ est une opération bornée inversible qui transforme H_1 en H_0 et que $(1+A^{1/2})D(A) = D(A^{1/2})$, on conclut que $D(A)$ est $\|\ \|_1$-dense dans H_1. Par conséquent, le domaine $D(A_\varepsilon) = D(A)\times D(A^{1/2})$ est un ensemble dense dans l'espace $H_1\times H_0$.

Vu que $\|x\|_1 \geqslant \|x\|_0$ pour $x\in H_1 = D(A^{1/2})$ et que l'opération A, en tant qu'autoadjointe, est fermée dans l'espace H_0, les conditions

$$x_{0n}\in D(A),\quad x_{1n}\in D(A^{1/2})\quad \text{pour}\quad n=1,2,\ldots,$$
$$x_0\in D(A^{1/2}),\quad x_1\in H_0,\quad y_0\in D(A^{1/2}),\quad y_1\in H_0,$$
$$\|x_{0n}-x_0\|_1\to 0,\quad \|x_{1n}-x_1\|_0\to 0,\quad \|x_{1n}-y_0\|_1\to 0,$$
$$\|\big(-(1/\varepsilon)Ax_{0n}-(1/\varepsilon)x_{1n}\big)-y_1\|_0\to 0$$

entraînent que

$$x_0\in D(A),\quad x_1\in D(A^{1/2}),\quad y_0=x_1\quad \text{et}\quad y_1=-(1/\varepsilon)Ax_0-(1/\varepsilon)x_1.$$

Par conséquent, l'opération A_ε est fermée dans l'espace $H_1\times H_0$.

LEMME 4.2. *Les intégrales (3.2) sont des opérations bornées transformant H_{1-k} en H_{1-i} et*

$$(4.1)\qquad \begin{aligned}
{}_1\|S_{00}(t,\varepsilon)\|_1 &\leqslant \max(1, e^{-t/\varepsilon}),\\
{}_1\|S_{01}(t,\varepsilon)\|_0 &\leqslant \max\big(\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon, (\sqrt{\varepsilon}-t)e^{-t/\varepsilon}\big),\\
{}_0\|S_{10}(t,\varepsilon)\|_1 &\leqslant \max\big(\sqrt{1/\varepsilon}, \sqrt{1/\varepsilon}\, e^{-t/\varepsilon}\big),\\
{}_0\|S_{11}(t,\varepsilon)\|_0 &\leqslant \max(1, e^{-t/\varepsilon})
\end{aligned}$$

pour $\varepsilon>0$ et $-\infty<t<+\infty$.

Pour tout $\varepsilon>0$ fixé la famille $S_\varepsilon(t)$, où $-\infty<t<+\infty$, d'opérations bornées transforment l'espace $H_1\times H_0$ en lui-même, définies par la formule

$$(4.2)\qquad S_\varepsilon(t)x = \begin{pmatrix} S_{00}(t,\varepsilon)x_0+S_{01}(t,\varepsilon)x_1\\ S_{10}(t,\varepsilon)x_0+S_{11}(t,\varepsilon)x_1\end{pmatrix}\quad \textit{pour}\quad x=\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\end{pmatrix}\in H_1\times H_0$$

est un groupe à un paramètre où

$$(4.3)\qquad S_\varepsilon(t)D(A_\varepsilon)\subset D(A_\varepsilon)\quad \textit{pour}\quad -\infty<t<+\infty.$$

Démonstration. Il résulte de (2.3) que $S_{ii}(t,\varepsilon)$ où $i=0$ et 1 sont des opérations bornées transformant H_0 en lui-même et que ${}_0\|S_{ii}(t,\varepsilon)\|_0 \leqslant \max(1, e^{-t/\varepsilon})$. Si $x\in H_1$ et $y=(1+A^{1/2})x$, on a $S_{00}(t,\varepsilon)x = S_{00}(t,\varepsilon)(1+A^{1/2})^{-1}y = (1+A^{1/2})^{-1}S_{00}(t,\varepsilon)y\in H_1$ et $\|S_{00}(t,\varepsilon)x\|_1 = \|S_{00}(t,\varepsilon)y\|_0 \leqslant \max(1, e^{-t/\varepsilon})\|y\|_0 = \max(1, e^{-t/\varepsilon})\|x\|_1$. Donc $S_{00}(t,\varepsilon)H_1\subset H_1$ et ${}_1\|S_{00}(t,\varepsilon)\|_1 \leqslant \max(1, e^{-t/\varepsilon})$.

Il résulte de (2.4) et (2.6) que $S_{01}(t,\varepsilon)$ et $A^{1/2}S_{01}(t,\varepsilon)$ sont des opérations bornées transformant H_0 en lui-même et que ${}_0\|S_{01}(t,\varepsilon)\|_0 \leqslant \max(\varepsilon, -te^{-t/\varepsilon})$, ${}_0\|A^{1/2}S_{01}(t,\varepsilon)\|_0 \leqslant \sqrt{\varepsilon}\max(1, e^{-t/\varepsilon})$, d'où $S_{01}(t,\varepsilon)H_0\subset H_1$ et ${}_1\|S_{01}(t,\varepsilon)\|_0 \leqslant \max(\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon, (\sqrt{\varepsilon}-t)e^{-t/\varepsilon})$.

Il résulte de (2.5) que $|s_{10}(t,\varepsilon,\lambda)(1+\sqrt{\lambda})^{-1}| \leqslant \sqrt{1/\varepsilon}\max(1, e^{-t/\varepsilon})$. Si $x\in H_1$ et $y=(1+A^{1/2})x$, on a

$$\begin{aligned}
\|S_{10}(t,\varepsilon)x\|_0^2 &= \int_0^{+\infty}\big(s_{10}(t,\varepsilon,\lambda)\big)^2 d\|E_\lambda x\|_0^2\\
&= \int_0^{+\infty}\big(s_{10}(t,\varepsilon,\lambda)(1+\sqrt{\lambda})^{-1}\big)^2 d\|E_\lambda y\|_0^2\\
&\leqslant (1/\varepsilon)\max(1, e^{-2t/\varepsilon})\|y\|_0^2 = (1/\varepsilon)\max(1, e^{-2t/\varepsilon})\|x\|_1^2,
\end{aligned}$$

donc

$$H_1\subset D\big(S_{10}(t,\varepsilon)\big)\quad \text{et}\quad {}_0\|S_{10}(t,\varepsilon)\|_1 \leqslant \sqrt{1/\varepsilon}\max(1, e^{-t/\varepsilon}).$$

Par conséquent, $S_{ik}(t,\varepsilon)$ sont des opérations bornées transformant H_{1-k} en H_{1-i} et les thèses (4.1) sont établies. La formule (4.2) définit donc des opérations bornées transformant l'espace $H_1\times H_0$ en lui-même. Les propriétés des groupes de la famille d'opérations $S_\varepsilon(t)$ résultent de celles des matrices (2.2). Enfin, l'inclusion (4.3) est équivalente à l'ensemble des inclusions

$$(4.4)\qquad \begin{aligned}
&S_{00}(t,\varepsilon)D(A)\subset D(A), && S_{01}(r,\varepsilon)D(A^{1/2})\subset D(A),\\
&S_{10}(t,\varepsilon)D(A)\subset D(A^{1/2}), && S_{11}(t,\varepsilon)D(A^{1/2})\subset D(A^{1/2}).
\end{aligned}$$

Comme $D(A) = \{x\colon x\in H_0, \int_0^{+\infty}\lambda^2 d\|E_\lambda x\|_0^2 < +\infty\}$, il s'ensuit que si $x\in D(A)$ et $y=S_{00}(t,\varepsilon)x$, on a d'après (2.3)

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\lambda^2 d\|E_\lambda y\|_0^2 &= \int_0^{\infty}\big(\lambda s_{00}(t,\varepsilon,\lambda)\big)^2 d\|E_\lambda x\|_0^2\\
&\leqslant \max(1, e^{-2t/\varepsilon})\int_0^{+\infty}\lambda^2 d\|E_\lambda x\|_0^2 < +\infty,
\end{aligned}$$

donc $y\in D(A)$, ce qui prouve la première des inclusions (4.4). Les autres inclusions (4.4) s'établissent d'une manière analogue.

LEMME 4.3. *Pour tout $\varepsilon>0$ et tout $x\in D(A_\varepsilon)$, on a $\lim_{t\to 0} t^{-1}\big(S_\varepsilon(t)x-x\big) = A_\varepsilon x$ au sens de la norme dans $H_1\times H_0$.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que, quels que soient $\varepsilon > 0$, $x_0 \in D(A)$ et $x_1 \in D(A^{1/2})$ fixés, on a

$$(4.5)\qquad \begin{aligned} &\lim_{t\to 0} ||t^{-1}(S_{00}(t, \varepsilon_0)x_0 - x_0)||_1 = 0,\\ &\lim_{t\to 0} ||t^{-1}S_{01}(t, \varepsilon)x_1 - x_1||_1 = 0,\\ &\lim_{t\to 0} ||t^{-1}S_{10}(t, \varepsilon)x_0 + (1/\varepsilon)Ax_0||_0 = 0,\\ &\lim_{t\to 0} ||t^{-1}(S_{11}(t, \varepsilon)x_1 - x_1) + (1/\varepsilon)x_1||_0 = 0. \end{aligned}$$

Or on a pour $\varepsilon > 0$ et $x \in D(A)$ fixés

$$(4.6)\qquad ||t^{-1}(S_{00}(t, \varepsilon)x - x)||_1^2 = ||(1+A^{1/2})t^{-1}(S_{00}(t, \varepsilon)x - x)||_0^2$$
$$= \int_0^{+\infty} \left((1+\sqrt{\lambda})t^{-1}(s_{00}(t, \varepsilon, \lambda) - 1)\right)^2 d||E_\lambda x||^2 = \int_0^{+\infty} f_t(\lambda)\, d||E_\lambda y||_0^2,$$

où $y = (1+A^{1/2})^2 x$ et, en vertu de (2.12) et (2.5),

$$(4.7)\qquad f_t(\lambda) = \left(t^{-1}(s_{00}(t, \varepsilon, \lambda) - 1)(1+\sqrt{\lambda})^{-1}\right)^2$$
$$= \left(t^{-1}\int_0^t s_{10}(\tau, \varepsilon, \lambda)(1+\sqrt{\lambda})^{-1} d\tau\right)^2 \leqslant (1/\varepsilon)\max(1, e^{-2t/\varepsilon}).$$

En vertu de (4.7), les fonctions $f_t(\lambda)$ sont, pour $t \geqslant -1$, bornées dans leur ensemble sur l'intervalle $0 \leqslant \lambda < +\infty$ par la fonction égale identiquement à $(1/\varepsilon)e^{2/\varepsilon}$, qui est sommable sur cet intervalle par rapport à la mesure $||E_\lambda y||_0^2$. Vu que $\lim_{t\to 0} s_{10}(t, \varepsilon, \lambda) = s_{10}(0, \varepsilon, \lambda) = 0$, on a d'après (4.7) $\lim_{t\to 0} f_t(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in \langle 0, +\infty)$. Il en résulte en vertu du théorème de Lebesgue sur la convergence bornée que l'on a l'égalité $\lim_{t\to 0} \int_0^{+\infty} f_t(\lambda)\, d||E_\lambda y||_0^2 = 0$. La première des égalités (4.5) est ainsi établie en vertu de (4.6). Les autres égalités (4.5) se démontrent d'une manière analogue.

Les lemmes 4.1-4.3 étant démontrés, reprenons la démonstration du théorème 3.1.

$D(A_\varepsilon)$ étant dense dans $H_1 \times H_0$, il résulte de (4.1) et du lemme 4.3 que le groupe $S_\varepsilon(t)$ est fortement continu. Soit G_ε son opération génératrice. Conformément au lemme 4.3, on a $A_\varepsilon \subset G_\varepsilon$. En vertu de (4.3), du lemme 4.1 et de 1.3, on a donc $A_\varepsilon = G_\varepsilon$. Par conséquent, A_ε est une opération génératrice du groupe $S_\varepsilon(t)$ et on a $\exp(tA_\varepsilon) = S_\varepsilon(t)$, d'où la formule (3.1) en vertu de (4.2).

5. Équations du type $\varepsilon x''(t) + x'(t) + Ax(t) = f(t)$.

Sous les hypothèses de 3 (voir p. 336) considérons les problèmes

$$(5.1)\qquad \varepsilon x''(t) + x'(t) + Ax(t) = f(t), \quad x(0) = x'(0) = 0,$$

$$(5.2)\qquad x'(t) + Ax(t) = f(t), \quad x(0) = 0,$$

où $f(t)$ est une fonction donnée ayant ses valeurs dans H_0. Il résulte du théorème 3.1 en vertu de celui de Phillips (voir [6], théorème 6.3, p. 219) le suivant

THÉORÈME 5.1. *La fonction $f(t)$ étant continûment différentiable pour $-\infty < t < +\infty$ au sens de la norme $||\ ||_0$, la fonction*

$$(5.3)\qquad x(t) = (1/\varepsilon)\int_0^t S_{01}(\tau, \varepsilon) f(t-\tau)\, d\tau, \quad -\infty < t < +\infty,$$

prend, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, ses valeurs dans le domaine $D(A)$ et elle est une solution du problème (5.1) *une fois continûment différentiable au sens de la norme $||\ ||_1$ et deux fois continûment différentiable au sens de la norme $||\ ||_0$. La fonction*

$$(5.4)\qquad x_0(t) = \int_0^t \exp(-\tau A) f(t-\tau)\, d\tau, \quad 0 \leqslant t < +\infty,$$

prend ses valeurs dans $D(A)$ et elle est une solution du problème (5.2) *une fois continûment différentiable au sens de la norme $||\ ||_0$.*

Démontrons, pour terminer, le suivant

THÉORÈME 5.2. *Sous les hypothèses du théorème* 5.1, *on a*

$$(5.5)\qquad ||x(t) - x_0(t)||_0 \leqslant \left(2\varepsilon \int_0^t ||f(\tau)||_0^2\, d\tau\right)^{1/2}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t \geqslant 0$, et

$$(5.6)\qquad \lim_{\varepsilon\to+0} ||x'(t) - x_0(t) + e^{-t/\varepsilon} f(0)||_0 = 0$$

uniformément sur tout intervalle fini $0 \leqslant t \leqslant T$.

Démonstration. Nous allons montrer d'abord que

$$(5.7)\qquad \int_0^{+\infty} ||\exp(-tA)x - (1/\varepsilon)S_{01}(t, \varepsilon)x||_0^2\, dt \leqslant 2\varepsilon ||x||_0^2$$

pour $\varepsilon > 0$ et $x \in H_0$.

En effet, posons pour $\varepsilon > 0$ et $\lambda > 0$ fixés

$$u(t) = e^{-\lambda t} - s_{00}(t, \varepsilon, \lambda).$$

Alors $u(0) = 0$ et, d'après (2.12),

$$u(t) + (1/\lambda)u'(t) = -s_{11}(t, \varepsilon, \lambda),$$

d'où

$$\big(u(t)\big)^2+(1/2\lambda)\frac{d}{dt}\big(u(t)\big)^2 = -u(t)s_{11}(t,\varepsilon,\lambda),$$

$$\int_0^t \big(u(\tau)\big)^2 d\tau+(1/2\lambda)\big(u(t)\big)^2 \leqslant \Big(\int_0^t \big(u(\tau)\big)^2 d\tau\Big)^{1/2}\Big(\int_0^t \big(s_{11}(\tau,\varepsilon,\lambda)\big)^2 d\tau\Big)^{1/2}$$

donc en vertu de (2.11),

$$\int_0^{+\infty} \big(e^{-\lambda t}-s_{00}(t,\varepsilon,\lambda)\big)^2 dt \leqslant \int_0^{+\infty} \big(s_{11}(t,\varepsilon,\lambda)\big)^2 dt \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$$

pour $\varepsilon>0$ et $\lambda>0$. Vu que $s_{00}(t,\varepsilon,0)\equiv 1$, c'est aussi vrai pour $\lambda=0$ et vu que $(1/\varepsilon)s_{01}(t,\varepsilon,\lambda)=s_{00}(t,\varepsilon,\lambda)-s_{11}(t,\varepsilon,\lambda)$, on a par conséquent

$$\int_0^{+\infty} \big(e^{-\lambda t}-(1/\varepsilon)s_{01}(t,\varepsilon,\lambda)\big)^2 dt \leqslant 2\varepsilon \quad \text{pour} \quad \varepsilon>0 \quad \text{et} \quad \lambda\geqslant 0.$$

On a donc, en vertu du théorème de Fubini

$$\int_0^{+\infty} \|\exp(-tA)x-(1/\varepsilon)S_{01}(t,\varepsilon)x\|_0^2 dt$$
$$=\int_0^{+\infty}\Big\{\int_0^{+\infty} \big(e^{-\lambda t}-(1/\varepsilon)s_{01}(t,\varepsilon,\lambda)\big)^2 dt\Big\}\, d\|E_\lambda x\|_0^2$$
$$\leqslant 2\varepsilon\int_0^{+\infty} d\|E_\lambda x\|_0^2 = 2\varepsilon\|x\|_0^2.$$

Ceci établi, posons pour $t\geqslant 0$ fixé $x=x_0(t)-x(t)$. Alors, d'après (5.3), (5.4) et (5.7), on a

$$\|x\|_0^2=\Big(\int_0^t \big(\exp(-\tau A)-(1/\varepsilon)S_{01}(\tau,\varepsilon)\big)f(t-\tau)d\tau, x\Big)_0 = \int_0^t \big(f(t-\tau)$$

et

$$\exp(-\tau A)x-(1/\varepsilon)S_{01}(\tau,\varepsilon)x\big)_1^0 d\tau \leqslant \Big(\int_0^t \|f(\tau)\|_0^2 d\tau\Big)^{1/2}(2\varepsilon\|x\|_0^2)^{1/2},$$

d'où (5.5).

On a d'après (5.3) et (5.4)

$$x'(t)=(1/\varepsilon)S_{01}(t,\varepsilon)f(0)+(1/\varepsilon)\int_0^t S_{01}(\tau,\varepsilon)f'(t-\tau)d\tau,$$

$$x_0'(t)=\exp(-tA)f(0)+\int_0^t \exp(-\tau A)f'(t-\tau)d\tau.$$

On a aussi d'après (3.2) et (2.12)

$$(1/\varepsilon)S_{01}(t,\varepsilon)f(0)=S_{00}(t,\varepsilon)f(0)-S_{11}(t,\varepsilon)f(0).$$

De même que dans le cas de (5.5), il vient

$$\Big\|\int_0^t \big(\exp(-\tau A)-(1/\varepsilon)S_{01}(\tau,\varepsilon)\big)f'(t-\tau)d\tau\Big\|_0 \leqslant \Big(2\varepsilon\int_0^t \|f'(\tau)\|_0^2 d\tau\Big)^{1/2},$$

donc

(5.8)
$$\|x'(t)-x_0'(t)+e^{-t/\varepsilon}f(0)\|_0$$
$$\leqslant \Big(2\varepsilon\int_0^t \|f'(\tau)\|_0^2 d\tau\Big)^{1/2}+\|\big(\exp(-tA)-S_{00}(t,\varepsilon)\big)f(0)\|_0+$$
$$+\|\big(S_{11}(t,\varepsilon)-e^{-t/\varepsilon}\big)f(0)\|_0$$

pour tout $\varepsilon>0$ et $t\geqslant 0$. Comme ${}_0\|\exp(-tA)\|_0\leqslant 1$, ${}_0\|S_{00}(t,\varepsilon)\|_0\leqslant 1$ et ${}_0\|S_{11}(t,\varepsilon)\|_0\leqslant 1$ pour $\varepsilon>0$ et $t\geqslant 0$, $D(A)$ étant dense dans H_0, les inégalités (3.6), (3.9) et (5.8) entraînent (5.6).

Les autres évaluations de $x(t)-x_0(t)$ et $x'(t)-x_0'(t)+e^{-t/\varepsilon}f(0)$ résultent immédiatement de (3.6), (3.9), (5.3) et (5.4) sous les hypothèses que $f(t)$ et $f'(t)$ prennent ses valeurs dans les domaines $D(A)$ et $D(A^{1/2})$ (cf. les évaluations correspondantes dans [8]-[10]).

TRAVAUX CITÉS

[1] E. Hille and R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Providence 1957.

[2] М. И. Вышик и Л. А. Люстерник, *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром,* Успехи Математических Наук 12 (1957), выпуск 5 (77), p. 3-122.

[3] В. П. Маслов, *О некоторых методах функционального анализа в теории операторных и дифференциальных уравнений в частных производных с параметрами,* Успехи Математических Наук 14 (1959), выпуск 4 (88), p. 179-185.

[4] K. Maurin, *Über gemischte Rand- und Anfangswertprobleme im Großen für eine Klasse von Gleichungssystemen auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Eine Begründung der Fouriermethode*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Cl. III, 3 (1955), N° 9, p. 471-475.

[5] — *Metody przestrzeni Hilberta*, Monografie Matematyczne 36, Warszawa 1959.

[6] R. S. Phillips, *Perturbation theory for semi-groups of linear operators*, Transactions of the American Mathematical Society 74 (1953), p. 199-221.

[7] K. Yosida, *On Cauchy's problem in the large for wave equations*, Proceedings of the Japan Academy 28 (1952), p. 396-403.

[8] M. Zlámal, *О смешанной задаче для одного гиперболического уравнения с малым параметром,* Czechoslovak Mathematical Journal 9 (84) (1959), p. 218-242.

[9] — *Sur l'équation des télégraphistes avec un petit paramètre*, Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Serie ottava, Rendiconti, Classe di Science fisiche, matematiche e naturali 27 (1959), p. 324-332.

[10] — *Смешанная задача для гиперболических уравнений с малым параметром,* Czechoslovak Mathematical Journal 10 (85) (1960), p. 83-122.

Reçu par la Rédaction le 10. 4. 1962