Every random variable $V_r$ is here a mixture of two random variables $V_r'$, $V_r''$, of which the first, $V_r'$, is degenerate,

$$P\{V_r' = 1\} = 1, \tag{5.15}$$

and the second is continuous, its density being

$$g_r(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad x \leqslant 0,\ x \geqslant 1, \\ (p_0+r)x^{p_0+r-1} & \text{for} \quad 0 < x < 1. \end{cases} \tag{5.16}$$

### *REFERENCES*


[1] B. Epstein, *Some application of the Mellin transform in statistics*, Annals of Mathematical Statistics 19 (1948), p. 370-379.

[2] M. V. Jambunathan, *Some properties of beta and gamma distributions*, ibidem 25 (1954), p. 401-405.

[3] И. М. Рижик, И. С. Градштейн, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Москва 1951.


*Reçu par la Rédaction le 4. 3. 1961*

---

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. IX 1962 FASC. 2

# *ERGODICITÉ ET STATIONNARITÉ DES CHAÎNES DE MARKOFF VARIABLES À UN NOMBRE FINI D'ÉTATS POSSIBLES*

PAR

I. KOŹNIEWSKA (VARSOVIE)

**Introduction.** Les problèmes liés aux chaînes de Markoff constantes ont été largement discutés par de nombreux auteurs. Les chaînes de Markoff variables ont été traitées beaucoup moins fréquemment et l'ergodicité de ces chaînes, qui avait déjà attiré l'attention de Markoff (cf. [6]), quoique le terme „ergodicité'' n'ait été introduit que plus tard, soulève encore des questions non résolues. Parmi les mathématiciens qui s'en occupent, il y a d'une part l'école soviétique: Bernstein [1], Kolmogoroff [4], Siragedinoff [11], Sarimsakoff [9, 10] et Moustafin [10], dont les recherches n'ont abouti qu'à des résultats partiels. D'autre part, Hajnal [2, 3], Mott [7, 8] et Schneider [8] ont dernièrement repris le sujet.

La présente communication fait suite à celle [5], publiée il y a quelques années, sur l'ergodicité des chaînes de Markoff variables à deux états possibles. Son but est de généraliser au cas d'un nombre fini d'états possibles les résultats obtenus précédemment. Au cours des recherches, il a paru juste d'étudier en même temps la stationnarité des chaînes, vu que cette propriété joue un aussi grand rôle que l'ergodicité dans l'étude des chaînes.

**§ 1. Notations.** Nous écrirons $D = (d_1, \ldots, d_r)$ pour mettre en évidence que $D$ est un vecteur aux composantes $d_i$ $(i = 1, \ldots, r)$; $0 = (0, \ldots, 0)$ est le vecteur nul.

Nous écrirons $P = \{p_{ab}\}$ pour exprimer que $P$ est une matrice dont les éléments sont $p_{ab}$ $(a, b = 1, \ldots, r)$; $0 = \{0\}$ est la matrice nulle dont tous les éléments sont nuls; $I = \{\delta_{ab}\}$ est la matrice-unité, où $\delta_{aa} = 1$ et $\delta_{ab} = 0$ pour $a \neq b$.

$E$ ou $E_D$ est une matrice dite *ergodique* dont toutes les lignes sont identiques. On la désigne par $E = \{e_a\}$ $(a = 1, \ldots, r)$ ou par $E = E_D$ suivant qu'on veut mettre en évidence ses éléments $e_a$ ou ses lignes $D$.

**§ 2. Définition et propriétés fondamentales d'une chaîne.** Les chaînes qui seront étudiées sont celles de Markoff discontinues à un nombre fini d'états possibles. Elles ne seront pas constantes par hypothèse.

Une telle chaîne à $r$ états possibles sera définie par la répartition initiale $D_0 = (p_{0|1}, \ldots, p_{0|r})$, où $p_{0|i}$ $(i = 1, \ldots, r)$ désigne la probabilité absolue pour que le système qui évolue aléatoirement au cours du temps se trouve au moment initial à l'état $i$, et par une suite infinie de matrices de passage $P_n = \{p_{ab}^{(n)}\}$ $(a, b = 1, \ldots, r$ et $n = 1, 2, \ldots)$, où $p_{ab}^{(n)}$ désigne la probabilité conditionnelle pour que le système se trouve au moment $n$ à l'état $b$, si au moment $n-1$ il se trouvait à l'état $a$. $D_n = (p_{n|1}, \ldots, p_{n|r})$ désignera la répartition du système au moment $n$, où $p_{n|i}$ $(i = 1, \ldots, r$ et $n = 1, 2, \ldots)$ est la probabilité absolue pour que le système se trouve au moment $n$ à l'état $i$. On a les relations suivantes pour tout $n = 1, 2, \ldots$ et $a = 1, \ldots, r$:

$$\sum_{i=1}^{r} p_{n|i} = 1, \qquad \sum_{b=1}^{r} p_{ab} = 1 \quad \text{et} \quad D_n = D_0 \prod_{i=1}^{n} P_i.$$

Introduisons les matrices

$$H_{mn} = \{h_{ab}(m, n)\} \quad (\text{où } a, b = 1, \ldots, r;\ m = 0, 1, \ldots, n > m)$$

définies comme produits de $n-m$ matrices $P_n$:

$$H_{mn} = \prod_{i=m+1}^{n} P_i, \tag{1}$$

$h_{ab}(m, n)$ désignant la probabilité pour que le système se trouve au moment $n$ à l'état $b$, à condition qu'au moment $m$ il ait été à l'état $a$. On a donc pour tout $a = 1, \ldots, r$, tout $m = 1, 0, \ldots$ et $n > m$ la relation

$$\sum_{b=1}^{r} h_{ab}(m, n) = 1$$

et l'équation de Chapman-Kolmogoroff

$$H_{mn} = H_{mt} H_{tn} \quad \text{pour} \quad m < t < n.$$

**§ 3. Chaînes faiblement ergodiques.** En voici la définition:

Définition. Une chaîne de Markoff à matrices de passage $P_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ est dite *faiblement ergodique* [2] (ou *ergodique au sens de Kolmogoroff* [4]) si pour tout $m = 0, 1, \ldots$ et tous $i, j, k = 1, \ldots, r$

$$\lim_{n\to\infty} [h_{ij}(m, n) - h_{kj}(m, n)] = 0. \tag{1}$$

Hajnal [2], le premier, a donné une condition suffisante et nécessaire pour qu'une chaîne soit faiblement ergodique. Mais on pourrait en trouver d'autres.



Théorème 1. *La condition suffisante et nécessaire pour qu'une chaîne de Markoff ayant les matrices de passage $P_n$ soit faiblement ergodique est qu'il existe pour tout $m = 0, 1, \ldots$ une suite de matrices ergodiques $E_{mn}$ $(n = m+1, m+2, \ldots)$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} (H_{mn} - E_{mn}) = 0, \tag{2}$$

*où $H_{mn}$ est défini par la formule* (1) *du* § 2.

Démonstration. Il est évident que la condition (2) est suffisante. En effet, admettons qu'il existe pour tout $m = 0, 1, \ldots$ une suite de matrices $E_{mn} = \{e_j(m, n)\}$ (où $j = 1, \ldots, r$) satisfaisant à (2). On a donc pour tout $m = 0, 1, \ldots$ et tous $i, j, k = 1, \ldots, r$

$$\lim_{n\to\infty} [h_{ij}(m, n) - e_j(m, n)] = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} [h_{kj}(m, n) - e_j(m, n)] = 0,$$

ce qui entraîne (1).

Réciproquement, admettons (1) et posons pour tout $m = 0, 1, \ldots$ et tout $j = 1, \ldots, r$

$$e_j(m, n) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} h_{ij}(m, n),$$

où $E_{mn} = \{e_j(m, n)\}$. On a donc pour tout $m = 0, 1, \ldots$ et tous $k, j = 1, \ldots, r$

$$\lim_{n\to\infty} [h_{kj}(m, n) - e_j(m, n)] = \lim_{n\to\infty} \Big[h_{kj}(m, n) - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} h_{ij}(m, n)\Big]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} [h_{kj}(m, n) - h_{ij}(m, n)] = 0,$$

ce qui prouve que la condition (2) est vérifiée. Ainsi, elle est nécessaire.

Remarque. Il résulte du théorème 1 que pour qu'une chaîne soit faiblement ergodique, il faut que pour tout $m = 0, 1, \ldots$ chaque suite convergente extraite de la suite de matrices $H_{mn}$ $(n = m+1, m+2, \ldots)$ converge vers une matrice ergodique.

En effet, s'il existe pour un $m$ fixé une suite croissante d'indices $n_1, n_2, \ldots$, où $n_1 > m$, telle que $\lim\limits_{i\to\infty} H_{mn_i} = A_m$ et que la condition (2) est satisfaite, il existe la limite $\lim\limits_{i\to\infty} E_{mn_i} = E'_m$ (où $E'_m$ est une matrice ergodique), ce qui entraîne $\lim\limits_{i\to\infty} H_{mn_i} = E'_m$.

THÉORÈME 2. *Vu que toute matrice de passage $P_n$ se laisse décomposer en deux matrices*

$$P_n = E_n + R_n \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

*où $E_n$ est une matrice ergodique arbitraire, la condition suffisante et nécessaire pour qu'une chaîne de Markoff ayant $P_n$ comme matrice de passage soit faiblement ergodique est que*

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{s=m}^{m+n} R_s = 0 \qquad \textit{pour tout } m = 0, 1, \ldots \tag{4}$$

Démonstration. La condition est suffisante. Admettons en effet que la chaîne satisfait à (3) et (4). En vertu des propriétés connues des matrices stochastiques, on a pour tous $s, t = 1, 2, \ldots$

$$R_s E_t = 0,$$

d'où il vient d'après (3)

$$R_s P_t = R_s R_t.$$

Par conséquent,

$$\prod_{s=m}^{m+n} P_s = (E_m + R_m) \prod_{s=m+1}^{m+n} P_s = E_m \prod_{s=m+1}^{n} P_s + R_m \prod_{s=m+1}^{m+n} P_s$$
$$= E_m \prod_{s=m+1}^{m+n} P_s + \prod_{s=m}^{m+n} R_s.$$

On en déduit d'après (4)

$$\lim_{n\to\infty} \Big( \prod_{s=m}^{m+n} P_s - E_m \prod_{s=m+1}^{m+n} P_s \Big) = 0$$

et ceci pour tout $m = 0, 1, \ldots$ Conformément au théorème 1, la dernière égalité prouve que la chaîne est faiblement ergodique.

La condition (4) est nécessaire. Nous pouvons admettre, en vertu du théorème 1, qu'il existe pour tout $m$ fixe ($m = 0, 1, \ldots$) une suite de matrices ergodiques $E_{mn}$ ($n = m+1, m+2, \ldots$) telle que

$$H_{mn} = E_{mn} + Z_{mn} \tag{5}$$

où $\lim\limits_{n\to\infty} Z_{mn} = 0$. D'autre part, on peut décomposer les matrices $P_n$,

$$P_n = F_n + R_n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

où $F_n$ sont des matrices ergodiques arbitraires. On a donc pour $n = m+1$, $m+2, \ldots$

$$R_m H_{mn} = R_m \prod_{s=m+1}^{n} P_s = \prod_{s=m}^{n} R_s. \tag{6}$$



Cependant, il résulte de (5) que

$$R_m H_{mn} = R_m Z_{mn}, \tag{7}$$

$$\lim_{n\to\infty} R_m Z_{mn} = 0. \tag{8}$$

En rapprochant les formules (6), (7) et (8), on retrouve la condition (4).

Exemple d'une chaîne faiblement ergodique:

$$P_{2n-1} = \begin{pmatrix} \frac14 & \frac12 & \frac14 \\ \frac12 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac12 & \frac12 & 0 \\ \frac14 & \frac12 & \frac14 \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Ici $\lim\limits_{n\to\infty} H_{m\,m+n}$ est égal à $E_1$ ou $E_2$ suivant que $m$ est pair (ou 0) uo impair, et on a

$$E_1 = \begin{pmatrix} \frac{20}{75} & \frac{28}{75} & \frac{27}{75} \\ \frac{20}{75} & \frac{28}{75} & \frac{27}{75} \\ \frac{20}{75} & \frac{28}{75} & \frac{27}{75} \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} \frac{19}{75} & \frac{24}{75} & \frac{32}{75} \\ \frac{19}{75} & \frac{24}{75} & \frac{32}{75} \\ \frac{19}{75} & \frac{24}{75} & \frac{32}{75} \end{pmatrix}.$$

**§ 4. Chaînes fortement ergodiques et stationnaires.** Une chaîne de Markoff dont les matrices de passage sont $P_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) est dite *fortement ergodique au sens de* [2] (ou *le plus fortement ergodique au sens de* [5]) si

$$\lim_{n\to\infty} h_{ij}(m, n) = e_j(m) \tag{1}$$

pour tout $m = 0, 1, \ldots$ et tous $i, j = 1, \ldots, r$. Il est évident que $\sum\limits_{j=1}^{r} e_j(m) = 1$ pour tout $m = 0, 1, \ldots$ On voit bien que l'ergodicité forte d'une chaîne consiste en ce que les probabilités limites $e_j(m)$ ($j = 1, \ldots, r$) ne dépendent pas de l'état initial $i$ dans lequel le système se trouve au moment $m$. Il est toutefois à remarquer que cette dépendance de $m$ n'est qu'apparente. En effet, si l'on pose $E_m = \{e_j(m)\}$ pour $j = 1, \ldots, r$, la formule (1) peut s'écrire pour tout $m = 0, 1, \ldots$ sous la forme matricielle suivante:

$$\lim_{n\to\infty} H_{mn} = E_m. \tag{2}$$

Mais comme on a aussi

$$\lim_{n\to\infty} H_{m-1\,n} = E_{m-1} \quad \text{et} \quad P_m H_{m\,n} = H_{m-1\,n},$$

on conclut que $E_m = P_m E_{m-1}$, ce qui entraîne $E_m = E_{m-1}$ pour tout $m = 1, 2, \ldots$ La formule (2) prend donc la forme indépendante de $m$

$$\lim_{n\to\infty} H_{mn} = E \tag{2'}$$

pout tout $m = 0, 1, \ldots$

A présent, nous allons rappeler deux modes de stationnarité d'une chaîne et en définir un troisième pour étudier les relations entre les deux genres d'ergodicité dont il a été question.

DÉFINITION 1. On dit qu'une chaîne de Markoff ayant les matrices de passage $P_n$ $(n=1,2,\ldots)$ est *stationnaire* s'il existe une répartition $D=(d_1,\ldots,d_r)$ telle que

$$DP_n = D \quad \text{pour tout } n=1,2,\ldots \tag{3}$$

Exemple:

$$P_n = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{n} & \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad D=(0,\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}).$$

DÉFINITION 2. On dira qu'une chaîne de Markoff ayant des matrices de passage $P_n$ $(n=1,2,\ldots)$ est *asymptotiquement stationnaire* s'il existe une répartition $D=(d_1,\ldots,d_r)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} DH_{mn} = D \quad \text{pour tout} \quad m=0,1,\ldots \tag{4}$$

Exemple:

$$P_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \qquad D=(\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2}).$$

Cette chaîne est asymptotiquement stationnaire sans être stationnaire.

DÉFINITION 3. Une chaîne de Markoff ayant les matrices de passage $P_n$ $(n=1,2,\ldots)$ sera dite *asymptotiquement quasi-stationnaire* au sens de Bernstein (cf. [1], p. 212) s'il existe une répartition $D$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} DP_n = D. \tag{5}$$

Exemple:

$$P_n = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{n^2} & \frac{1}{n^2} & 0 \\ 0 & 1-\frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a dans ce cas $\lim_{n\to\infty} P_n = I$; chaque répartition $D$ satisfait donc à la condition (5). Il est à remarquer que toute chaîne constante est asymptotiquement quasi-stationnaire.



Il est évident qu'une chaîne stationnaire est asymptotiquement stationnaire. D'autres relations entre différents modes de stationnarité sont moins évidentes. Le lemme suivant les met au point.

LEMME 1. *Toute chaîne asymptotiquement stationnaire est asymptotiquement quasi-stationnaire.*

Démonstration. Supposons une chaîne de Markoff asymptotiquement stationnaire et dont $P_n$ $(n=1,2,\ldots)$ sont les matrices de passage. Il existe donc une répartition $D$ vérifiant la condition (4). Il s'ensuit que pour tout $m=0,1,\ldots$ et tout $n>m$

$$DH_{mn} = D+E_{mn},$$

où $E_{mn}$ est un vecteur tel que $\lim_{n\to\infty} E_{mn}=0$ pour tout $m=0,1,\ldots$ On a alors

$$DH_{m\ n+1} = DP_{n+1}+E_{mn}P_{n+1}$$

et par conséquent, en passant à la limite pour $n$ tendant vers l'infini et pour un $m$ fixe, on trouve

$$D = \lim_{n\to\infty} DP_{n+1},$$

ce qui prouve que la même répartition $D$ qui vérifie (4) satisfait aussi à (5).

Passons aux relations entre l'ergodicité et la stationnarité d'une chaîne.

THÉORÈME 3. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une chaîne de Markoff soit fortement ergodique, est qu'elle soit faiblement ergodique et asymptotiquement stationnaire.*

Démonstration. On voit facilement que la condition est nécessaire. Toute chaîne fortement ergodique est *a fortiori* faiblement ergodique. La propriété de forte ergodicité de la chaîne peut s'énoncer comme il suit: il existe une répartition $D$ telle que $\lim_{n\to\infty} H_{mn} = E_D$ pour tout $m=0,1,\ldots$ ($E_D$ désignant une matrice ergodique dont toutes les lignes sont $D$). Ainsi la forte ergodicité entraîne que $\lim_{n\to\infty} DH_{mn}=D$ pour tout $m=0,1,\ldots$, ce qui est bien la stationnarité asymptotique de la chaîne.

Supposons maintenant une chaîne dont les matrices de passage sont $P_n$ $(n=1,2,\ldots)$, faiblement ergodique et asymptotiquement stationnaire. On démontrera d'abord que, sous ces conditions et lorsque $m_1$ est fixe, il ne peut exister qu'un seul $D$ satisfaisant à la condition

$\lim_{n\to\infty} DH_{mn} = D$. Supposons, au contraire, qu'on ait deux répartitions $D_{m_1}$ et $D'_{m_1}$ telles que

$$\lim_{n\to\infty} D_{m_1} H_{m_1 n} = D_{m_1}, \tag{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} D'_{m_1} H_{m_1\, n} = D'_{m_1}. \tag{7}$$

La chaîne étant supposée faiblement ergodique, il existe d'après la remarque au théorème 1 une suite partielle de celle des matrices $H_{m_1 n}$ $(n = m_1+1, m_1+2, \ldots,)$ telle que

$$\lim_{i\to\infty} H_{m_1 n_i} = E_A. \tag{8}$$

On aurait donc

$$\lim_{i\to\infty} D_{m_1} H_{m_1 n_i} = A, \tag{9}$$

$$\lim_{i\to\infty} D'_{m_1} H_{m_1 n_i} = A. \tag{10}$$

En rapprochant d'une part (6) et (9), d'autre part (7) et (10), on trouverait $D_{m_1} = A$ et $D'_{m_1} = A$, d'où $D_{m_1} = D'_{m_1}$. Lorsque $m_1$ est fixe, il n'existe donc qu'une seule répartition $D_{m_1}$ ayant la propriété $\lim_{n\to\infty} D_{m_1} H_{m_1\, n} = D_{m_1}$.

Cette répartition $D_{m_1}$ est cependant indépendante de $m_1$, vu que (8) entraîne l'égalité

$$\lim_{i\to\infty} H_{m_1-1\, n_i} = E_A$$

et par conséquent

$$\lim_{i\to\infty} A H_{m_1-1\, n_i} = A.$$

Finalement, il n'existe pour tout $m = 0, 1, \ldots$ qu'un seul $A$ vérifiant la condition $\lim_{n\to\infty} AH_{mn} = A$. Mais ceci prouve déjà que la chaîne est fortement ergodique, car si l'on avait $\lim_{j\to\infty} H_{m_2 n_j} = E_B$ pour un $m_2$ et pour une sous-suite $\{n_j\}$ de la suite de nombres naturels, on aurait aussi $\lim_{j\to\infty} BH_{m_2 n_j} = B$ et on en déduirait que $B = A$. Ainsi, toutes les suites extraites de la suite de matrices $H_{mn}$ $(n = m+1, \ldots)$ convergent vers $E_A$.

COROLLAIRE. *Toute chaîne de Markoff faiblement ergodique et stationnaire est fortement ergodique.*



La stationnarité asymptotique de la chaîne peut être exprimée comme il suit: il existe une telle répartition $D$ que

$$\begin{cases} DP_n - D = E_n & \text{pour tout} \quad n = 1, 2, \ldots, \\ \lim_{n\to\infty} E_n = 0. \end{cases} \tag{11}$$

En désignant par $E_n$ le vecteur $(\varepsilon_1^{(n)}, \ldots, \varepsilon_r^{(n)})$, on a

$$\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i^{(n)} = 0 \quad \text{pour tout} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

THÉORÈME 4. *La condition suffisante et nécessaire pour qu'une chaîne de Markoff ayant les matrices de passage $P_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ soit fortement ergodique, est que*

1) *cette chaîne soit faiblement ergodique;*

2) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{r-1} \varepsilon_i^{(k)} [h_{ij}(k+1, n) - h_{rj}(k+1, n)] = 0.$

Démonstration. Il sera d'abord établi que les conditions 1) et 2) sont suffisantes. Il est à remarquer que la condition 2) est plus restrictive que la stationnarité asymptotique. Admettons qu'une chaîne dont les matrices de passage sont $P_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ satisfait à 1) et 2). On a donc pour tout $m = 0, 1, \ldots$ et tout $n > m$

$$DH_{mn} = DH_{m\, n-1} P_n \quad \text{et} \quad D = DP_n - E_n,$$

d'où l'on déduit que

$$DH_{mn} - D = (DH_{m\, n-1} - D) P_n + E_n. \tag{13}$$

Posons

$$Z_{mn} = DH_{mn} - D \quad (m = 0, 1, \ldots, n > m).$$

L'équation (13) prend alors la forme

$$Z_{mn} = Z_{m\, n-1} + E_n,$$

dont la solution est pour tout $m = 0, 1, \ldots$ et tout $n > m$

$$Z_{mn} = \sum_{k=m}^{n-1} E_k H_{k+1\, n} + E_n. \tag{14}$$

Il est évident, d'après (12) que la $r$-ième composante du vecteur $E_k$ est $\varepsilon_r^{(k)} = -\sum_{i=r}^{r-1} \varepsilon_i^{(k)}$, d'où il résulte que la $j$-ième composante du vecteur $E_k H_{k+1}$ est de la forme

$$\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i^{(k)} h_{ij}(k+1, n) = \sum_{i=1}^{r-1} \varepsilon_i^{(k)} [h_{ij}(k+1, n) - h_{rj}(k+1, n)].$$

Si, à présent, on considère la relation (14), on voit aisément qu'en vertu de l'hypothèse 2) on a $\lim_{n\to\infty} Z_{mn} = 0$ pour tout $m = 0, 1, \ldots$, ce qui prouve que la chaîne est asymptotiquement stationnaire. D'autre part, d'après l'hypothèse 1) elle est faiblement ergodique. On conclut donc en vertu du théorème 3 que la chaîne est fortement ergodique.

Prouvons maintenant la nécessité de la condition. Admettons qu'une chaîne de Markoff dont les matrices de passage sont $P_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ est fortement ergodique. Bien entendu, c'est à plus forte raison une chaîne faiblement ergodique. Ainsi, elle satisfait à 1). Il ne reste donc qu'à établir 2). D'après le théorème 3, la chaîne est asymptotiquement stationnaire et *a fortiori* asymptotiquement quasi-stationnaire (cf. le lemme 1). Il résulte de l'ergodicité forte de la chaîne qu'il existe une matrice $E_D$ telle que l'on a pour tout $m = 0, 1, \ldots$ et tout $n > m$

$$H_{mn} - E_D = \Delta_{m+1\,n} \tag{15}$$

où pour tout $m = 0, 1, \ldots$ tous $i, j = 1, \ldots, r$ et tout $n > m$

$$\Delta_{mn} = \{\delta_{ij}(m, n)\} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \Delta_{mn} = 0.$$

Par contre, il s'ensuit de la stationnarité asymptotique de la chaîne que, pour tout $n = 1, 2, \ldots$, on a les relations (11) et (12). On voit donc aisément que pour tout $k = 1, 2, \ldots$ et $n > k$

$$E_k \Delta_{k+1\,n} = (DP_k - D)(H_{kn} - E_D) = DH_{k-1\,n} - DH_{kn}.$$

On a par conséquent

$$\sum_{k=m}^{n-1} E_k \Delta_{k+1\,n} = \sum_{k=m}^{n-1} (DH_{k-1\,n} - DH_{kn}) = DH_{m-1\,n} - DP_n,$$

d'où il vient pour tout $m = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{n-1} E_k \Delta_{k+1\,n} = \lim_{n\to\infty} (DH_{m-1\,n} - DP_n) = 0.$$

Si l'on transcrit le résultat obtenu pour la suite des vecteurs $\sum_{k=m}^{n-1} E_k \Delta_{k+1\,n}$ en des termes de leurs composantes, on trouve: pour tout $m = 1, 2, \ldots$ et tout $j = 1, \ldots, r$, on a $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{n-1} \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i^{(k)} \delta_{ij}(k+1, n) = 0$.

Si à présent on tient compte de la formule (12), on est amené à la relation

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{n-1} \sum_{i=1}^{r-1} \varepsilon_i^{(k)} [\delta_{ij}(k+1, n) - \delta_{rj}(k+1, n)] = 0, \tag{16}$$

valable pour tout $m = 1, 2, \ldots$ et tout $j = 1, \ldots, r$.



On déduit enfin de (15) que, pour tout $i, j = 1, \ldots, r$, tout $k = 0, 1, \ldots$ et tout $n = k+1, k+2, \ldots$, on a

$$\delta_{ij}(k+1, n) = h_{ij}(k+1, n) - d_j, \quad \text{où} \quad D = (d_1, \ldots, d_r),$$

ce qui entraîne

$$\delta_{ij}(k+1, n) - \delta_{rj}(k+1, n) = h_{ij}(k+1, n) - h_{rj}(k+1, n) \tag{17}$$

pour tout $i, j = 1, \ldots, r$, tout $k = 0, 1, \ldots$ et $n > k$. Si l'on porte les valeurs (17) dans (16), on retrouve la condition 2) de l'énoncé du théorème, qui se trouve donc démontré.

Il n'est peut-être pas sans intérêt de faire remarquer que, dans le cas d'une chaîne de Markoff constante, les notions d'ergodicité forte et faible sont équivalentes. On le vérifie sans peine en s'appuyant sur le théorème 2 (§ 3). Considérons à cet effet une chaîne de Markoff faiblement ergodique dont la matrice de passage est $P$. Si l'on pose

$$P = E + R, \tag{18}$$

où $E$ est une matrice ergodique arbitraire on a $\lim_{n\to\infty} R^n = 0$ en vertu du théorème 2 précité. Il s'ensuit que $I - R$ n'est pas une matrice singulière et que la série $\sum_{n=1}^{\infty} R^n$ est convergente. On déduit de (18) l'égalité

$$P^n = E + E \sum_{i=1}^{n-1} R^i + R^n$$

et par conséquent l'existence de $\lim_{n\to\infty} P^n = E_1$, où $E_1$ est une matrice ergodique. Mais cela prouve déjà la forte ergodicité de la chaîne.

**§ 5. Autres notions d'ergodicité.** On peut encore introduire de nouvelles notions d'ergodicité, utiles pour l'étude des conditions pour qu'une suite de variables aléatoires obéisse à la loi forte des grands nombres.

DÉFINITION 1. Une chaîne de Markoff dont les matrices de passage sont $P_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sera dite *ergodique de degré* $a$, où $0 < a \leqslant 1$ lorsque, pour tous $i, j, k = 1, \ldots, r$ et tout $m = 0, 1, \ldots$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} \sum_{s=1}^{n} [h_{ij}(m, m+s) - h_{kj}(m, m+s)] = 0. \tag{19}$$

Il résulte de cette définition qu'une chaîne ergodique de degré $0 < \beta < 1$ est ergodique aussi de degré $\beta_1$ où $\beta < \beta_1 \leqslant 1$. Les chaînes faiblement ergodiques et fortement ergodiques au sens du § 3 et du § 4 sont ergodiques de degré $a = 1$.

THÉORÈME 5. *La condition suffisante et nécessaire pour qu'une chaîne de Markoff dont les matrices de passage sont $P_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ soit ergodique de degré $a$, où $0 < a \leqslant 1$, est qu'il existe pour tout $m = 0, 1, \ldots$ une suite de matrices ergodiques $E_{mn}$ $(n = m+1, \ldots)$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} \sum_{s=m+1}^{m+n} (H_{ms} - E_{ms}) = 0. \tag{20}$$

Démonstration. La condition est suffisante. Considérons une chaîne définie par ses matrices de passage $P_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et admettons qu'il existe, quel que soit $m = 0, 1, \ldots$, une suite $E_{mn} = e_j(m, n)$ satisfaisant à la condition (20) pour un $a$ donné tel que $0 < a \leqslant 1$. On a donc pour tout $m = 0, 1, \ldots$ et tous $i, j = 1, \ldots, r$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} \sum_{s=1}^{n} [h_{ij}(m, m+s) - e_j(m, m+s)] = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} \sum_{s=1}^{n} [h_{kj}(m, m+s) - e_j(m, m+s)] = 0,$$

ce qui implique évidemment (19).

La condition est nécessaire. Soit $P_n$ une chaîne ergodique de degré $a$ où $0 < a \leqslant 1$. Soit $E_{mn} = \{e_j(m, s)\}$ $(j = 1, \ldots, r)$, pour tout $m = 0, 1, \ldots$ et tout $s > m$, où

$$e_j(m, s) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} h_{ij}(m, s).$$

On a alors pour tout $m = 0, 1, \ldots$ et tous $i, j, k = 1, \ldots, r$

$$\frac{1}{n^a} \sum_{s=m+1}^{m+n} [h_{kj}(m, n) - e_j(m, n)] = \frac{1}{n^a} \sum_{s=m+1}^{m+n} [h_{kj}(m, n) - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} h_{ij}(m, n)]$$
$$= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{n^a} \sum_{s=m+1}^{m+n} [h_{kj}(m, n) - h_{ij}(m, n)]$$

et il est évident que la suite des matrices $E_{mn}$ $(n = m+1, m+2, \ldots)$ satisfait à (20).

DÉFINITION 2. Une chaîne de Markoff dont les matrices de passage sont $P_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sera dite d'une *ergodicité stationnaire* de degré $a$ lorsque $0 < a \leqslant 1$ et qu'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ et tous $i, j, k = 1, \ldots, r$ un $N$ tel que l'on a pour tout $n > N$ l'inégalité

$$\frac{1}{n^a} \sum_{t=1}^{n} |h_{ij}(s, s+t) - h_{kj}(s, s+t)| < \varepsilon, \tag{21}$$

quel que soit $s = 0, 1, 2, \ldots$



LEMME 2. *Si une chaîne de Markoff dont les matrices de passage sont $P_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ est d'une ergodicité stationnaire de degré $a$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ et tous $i, j = 1, \ldots, r$ un $N$ tel que l'on a pour tout $n > N$*

$$\frac{1}{n^a} \sum_{t=1}^{n} |h_{ij}(s, s+t) - p_{s+t|j}| < \varepsilon, \tag{22}$$

*quel que soit $s = 0, 1, 2, \ldots$*

La démonstration du lemme 2 résulte facilement des formules qui suivent:

$$\frac{1}{n^a} \sum_{t=1}^{n} |h_{ij}(s, s+t) - p_{s+t|j}| = \frac{1}{n^a} \sum_{t=1}^{n} \Big| \sum_{k=1}^{r} [h_{ij}(s, s+t) p_{s|k} - p_{s|k} h_{kj}(s, s+t)] \Big|$$
$$\leqslant \frac{1}{n^a} \sum_{t=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} |h_{ij}(s, s+t) - h_{kj}(s, s+t)|$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{n^a} \sum_{t=1}^{n} |h_{ij}(s, s+t) - h_{kj}(s, s+t)|.$$

Pour terminer, encore une notion d'ergodicité:

DÉFINITION 3. Appelons une chaîne de Markoff dont les matrices de passage sont $P_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *extra-ergodique* si l'on a pour tout $j = 1, 2, \ldots, r$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \max_i |p_{ij}^{(s)} - p_{s|j}| < \infty.$$

THÉORÈME 6. *Une chaîne de Markoff constante et dont la matrice de passage est régulière est une chaîne extra-ergodique.*

Démonstration. On a en effet pour une telle chaîne la limitation connue suivante: pour tous les $i, j = 1, \ldots, r$ et tout $s = 1, 2, \ldots$,

$$|p_{ij}^{(s)} - p_{s|j}| \leqslant \frac{1}{s^a} \quad \text{où} \quad a > 1,$$

ce qui prouve le théorème.

Je voudrais remercier le Dr S. Gładysz pour ses judicieuses remarques sur les rédactions successives de cette communication.

## TRAVAUX CITÉS

[1] С. Бернштейн, *Теория вероятностей*, Москва — Ленинград 1946.

[2] J. Hajnal, *The ergodic properties of non-homogeneous finite Markov chains*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 52 (1956), p. 67-77.

[3] — *Weak ergodicity in non-homogeneous Markov chains*, ibidem 54 (1958), p. 233-246.

[4] A. Kolmogorov, *Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Mathematische Annalen 104 (1931), p. 415-458.

[5] I. Koźniewska, *Ergodicity of non-homogeneous Markov chains with two states*, Colloquium Mathematicum 5 (1958), p. 208-215.

[6] А. Марков, *Исследование общего случая испытаний, связанных в цепь*, Избранные Труды, Москва 1951.

[7] J. L. Mott, *Conditions for the ergodicity of non-homogeneous finite Markov chains*, Proceedings of the Royal Edinbourgh Society, Sectio A, 64 (1957), p. 369-380.

[8] J. L. Mott and H. Schneider, *Matrix norms applied to weakly ergodic Markov chains*, Archiv of Mathematics 8 (1957), p. 331-333.

[9] Т. А. Сарымсаков, *Об эргодическом принципе для неоднородных цепей Маркова*, Доклады Академии Наук СССР 90 (1952), p. 25-28.

[10] Т. А. Сарымсаков и Х. А. Мустафин, *К эргодической теореме для неоднородных цепей Маркова*, Труды Средне-Азиатского Университета 74 (1957), физ.-мат. науки 15, p. 1-38.

[11] С. Х. Сираждинов, *Эргодический принцип для неоднородных цепей Маркова*, Доклады Академии Наук СССР 71 (1950), p. 821-834.

*Reçu par la Rédaction le 5. 11. 1961*

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. IX 1962 FASC. 2

# *ON THE JOINT LIMITING DISTRIBUTION OF TIMES SPENT IN PARTICULAR STATES BY A MARKOV PROCESS*

BY

A. PLUCIŃSKA (WARSAW)

We consider a homogeneous separable Markov process $\xi(t)$ with a finite number of possible states $a_0, a_1, \ldots, a_k$. Let $p_{ij}(t)$ be the probabilities of transition from the state $a_i$ to the state $a_j$ in time $t$ $(i, j = 0, 1, \ldots, k)$. We suppose that

1° $\lim_{t\to 0^+} p_{ii}(t) = 1$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$,

2° for each pair $i, j$ $(i, j = 0, 1, \ldots, k)$ there exists $t_0$ such that $p_{ij}(t_0) > 0$.

It follows from these assumptions that almost all sample functions are step functions and $p_{ij}(t) > 0$ if $t > 0$ (cf. [2], chapter VI).

Denote by $X_i(t)$ the total time spent in the state $a_i$ during the time interval $[0, t]$. Thus

$$X_i(t) = \int_0^t \chi_i(u)\,du \qquad (i = 0, 1, \ldots, k), \tag{1}$$

where $\chi_i(t)$ is the characteristic function of the set $\{t : \xi(t) = a_i\}$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$. It is quite clear that $\sum_{i=0}^{k} X_i(t) = t$.

The aim of this paper is to find the limiting $k$-dimensional cumulative distribution function of the random variable $\{X_1(t), \ldots, X_k(t)\}$ when $t \to \infty$.

The one-dimensional variable $X_i(t)$ has been investigated by Takács [7]–[9] and Rényi [5] (in [8] and [9] the assumptions are more general). In the case of Markov chains the above-mentioned problem was treated by Romanowski [6], p. 233, and Kolmogorov [4].

Since almost all sample functions are step functions, we may define a sequence of random variables $x_i^1, \bar{x}_i^1, x_i^2, \bar{x}_i^2, \ldots$, as follows: