Les intégrales qui figurent dans ces énoncés sont prises au sens de Radon-Nikodym.

Les résultats qui viennent d'être établis sont vrais pour chaque mesure de Carathéodory qui s'annule en tout point, donc aussi pour la mesure de Lebesgue (comparer [4], p. 40-45).

Tirons une conséquence de cette dernière remarque.

Interprétons $\mathcal{M}$ comme l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$ et soit $\mathfrak{M}$ le σ-corps de tous les ensembles mesurables (L) de cet intervalle; supposons $F(E)$ σ-additive dans $\mathfrak{M}$ et satisfaisant à la condition $F\big((x)\big) = 0$ pour tout $x \epsilon \mathcal{M}$; enfin, soit (2) la décomposition canonique de Lebesgue de la fonction $F(E)$ (voir p. ex. [5], p. 33-35, aussi [2], p. 419-424).

Alors, si l'hypothèse $P(2^{\aleph_0})$ est vraie[4]), deux cas seulement peuvent se présenter: ou bien $\varphi(E)$ est identiquement nulle, quelle que soit $F(E)$ satisfaisant aux conditions posées tout à l'heure; ou bien il existe un aleph inaccessible $\leqslant 2^{\aleph_0}$.

TRAVAUX CITÉS

[1] S. Banach, *Sur une classe de fonctions d'ensemble*, Fund. Math. 6 (1924), p. 170-188.

[2] H. Hahn, *Theorie der reellen Funktionen*, Berlin 1921.

[3] O. Nikodym, *Sur une généralisation des intégrales de Radon*, Fund. Math. 15 (1930), p. 131-179.

[4] J. Popruženko, *Sur la représentation analytique de certaines classes de fonctions additives d'ensemble*, Bull. Acad. Pol. Sci., Classe III, Série A (1940-1946), p. 35-49.

[5] S. Saks, *Theory of the integral*, Warszawa 1937.

[6] W. Sierpiński, *Sur un théorème de recouvrement dans la théorie générale des ensembles*, Fund. Math. 20 (1933), p. 214-220.

[7] A. Tarski, *Drei Überdeckungssätze der allgemeinen Mengenlehre*, ibidem 30 (1938), p. 132-155.

[8] S. Ulam, *Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre*, ibidem 16 (1930), p. 140-150.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 6. 4. 1956

[4]) Cette hypothèse a été introduite par M. Ulam (voir [8], p. 140-141).

REMARQUES SUR LES MESURES DANS LES ESPACES PRODUITS

PAR

N. DINCULEANU (BUCAREST)

1. Soit K un ensemble d'indices et pour tout $s \epsilon K$ soit X_s un espace et T_s une tribu[1]) de parties de X_s. Soit E l'espace produit $\prod_{s\epsilon K} X_s$ et, pour toute partie finie $I \subset K$, soit E^I l'espace produit $\prod_{s\epsilon I} X_s$ et $T^I = \prod_{s\epsilon I} T_s$ la tribu engendrée par les parties de la forme $\prod_{s\epsilon I} A_s$, où $A_s \epsilon T_s$ pour tout $s \epsilon I$. Soit $P(A)$ une mesure définie sur le clan[2]) T des parties cylindriques, dénombrablement additive sur la tribu $\mathrm{pr}_I^{-1}(T^I)$ quelle que soit la partie finie $I \subset K$. On sait que, sous certaines conditions supplémentaires ([3], [5], [6], [7]), $P(A)$ est dénombrablement additive sur T. Dans cette note on démontre deux théorèmes analogues aux théorèmes (A) et (B) de [5].

2. Soient E l'espace et T le clan définis plus haut, et $P(A)$ une mesure définie sur T, dénombrablement additive sur la tribu $\mathrm{pr}_I^{-1}(T^I)$ quelle que soit la partie finie $I \subset K$. Pour toute partie finie $I \subset K$ et $t \epsilon K$, il existe ([2], p. 95-96) une mesure conditionelle $P\big(z^I, \mathrm{pr}_t^{-1}(A_t)\big)$ définie sur $E^I \times T_t$, qui vérifie pour tout $M \epsilon T^I$ les égalités

$$\int_M P\big(z^I, \mathrm{pr}_t^{-1}(A_t)\big) P_I(dz^I) = P\big(\mathrm{pr}_I^{-1}(M) \frown \mathrm{pr}_t^{-1}(A_t)\big),$$

où $z^I \epsilon E^I$ et $P_I(A) = P\big(\mathrm{pr}_I^{-1}(A)\big)$ pour tout $A \epsilon T^I$.

On dit qu'une mesure conditionelle $P\big(z^I, \mathrm{pr}_t^{-1}(A_t)\big)$ est *régulière par rapport aux tribus* (S^I, S_t), où $S^I \subset T^I$ et $S_t \subset T_t$, s'il existe une fonction $P(z^I, A_t)$ définie sur $E^I \times S_t$ telle que:

(a) $P(z^I, A_t)$ est (S^I)-mesurable comme fonction de z^I, quel que soit $A_t \epsilon S_t$;

(b) $P(z^I, A_t)$ est dénombrablement additive comme fonction de A_t, quel que soit $z^I \epsilon E^I$;

[1]) Une σ-algèbre dans la terminologie de P. Halmos [3]. Voir aussi [5].

[2]) Une algèbre d'après Halmos [3]. Voir aussi [5].

(c) $P(z^I, X_I) = 1$ quel que soit $z^I \in E^I$;

(d) $P(z^I, \mathrm{pr}_I^{-1}(A_t)) = P(z^I, A_t)$ presque partout (S^I), quel que soit $A_t \in S_t$.

On dit que la mesure conditionelle $P(z^I, \mathrm{pr}_t^{-1}(A_t))$ est *régulière*[3]) si elle est régulière par rapport aux tribus (T^I, T_t). Si $P(z^I, \mathrm{pr}_t^{-1}(A_t))$ est régulière, elle est régulière par rapport aux tribus $(T^I, \mathcal{T}_t)$, quelle que soit la tribu $\mathcal{T}_t \subset T_t$.

La mesure conditionelle est dite *quasi-régulière* s'il existe une tribu séparable[4]) $\mathcal{T}^I \subset T^I$ telle que $P(z^I, \mathrm{pr}_t^{-1}(A_t))$ soit régulière par rapport aux tribus $(\mathcal{T}^I, \mathcal{T}_t)$, quelle que soit la tribu séparable $\mathcal{T}_t \subset T_t$. Si $P(z^I, \mathrm{pr}_t^{-1}(A_t))$ est quasi-régulière, elle est régulière par rapport aux tribus $(\mathcal{T}'^I, \mathcal{T}_t)$, quelle que soit la tribu $\mathcal{T}'^I$ telle que $\mathcal{T}^I \subset \mathcal{T}'^I \subset T^I$ et quelle que soit la tribu séparable $\mathcal{T}_t \subset T_t$. En particulier on peut prendre $\mathcal{T}'^I = T^I$.

Dans ce qui suit, on va utiliser le théorème suivant ([5], p. 209):

(A) *Soient l'espace E, le clan T, et la mesure $P(A)$ définie sur T, dénombrablement additive sur la tribu $\mathrm{pr}_I^{-1}(T^I)$ quelle que soit la partie finie $I \subset K$. Si $K = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ et si, quel que soit $n \in K$, la mesure conditionelle $P(z^{(1,\ldots,n)}, \mathrm{pr}_{n+1}^{-1}(A_{n+1}))$ est régulière, $P(A)$ est dénombrablement additive sur T.*

3. Ce théorème nous permettra d'en démontrer un autre, en supposant que la mesure conditionelle $P(z^{(1,\ldots,n)}, \mathrm{pr}_{n+1}^{-1}(A_{n+1}))$ est quasi-régulière. Pour ce faire, on démontre d'abord le lemme suivant:

LEMME. *Si $K = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ et si, pour tout $n \in K$, la mesure conditionelle $P(z^{(1,\ldots,n)}, \mathrm{pr}_{n+1}^{-1}(A_{n+1}))$ est quasi-régulière, alors pour chaque $n \in K$, il existe une tribu séparable $S_n \subset T_n$, telle que, pour tout $n \in K$, $P(z^{(1,\ldots,n)}, \mathrm{pr}_{n+1}^{-1}(A_{n+1}))$ soit régulière par rapport aux tribus $\left(\prod_{i=1}^{n} S_i, S_{n+1}\right)$.*

Démonstration. Pour chaque $n \in K$, soit $S^{(1,\ldots,n)}$ la tribu séparable telle que $P(z^{(1,\ldots,n)}, \mathrm{pr}_{n+1}^{-1}(A_{n+1}))$ soit régulière par rapport aux tribus $(S^{(1,\ldots,n)}, S'_{n+1})$, quelle que soit la tribu séparable $S'_{n+1} \subset T_{n+1}$. On peut supposer que $S^{(1,\ldots,n)}$ est de la forme $\prod_{n=1}^{n} S_i^n$, où $S_i^n \subset T_i$ est une tribu séparable pour chaque i $(i = 1, \ldots, n)$. Pour chaque $i \in K$, soit S_i la tribu engendrée par la réunion $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_i^n$; S_i est séparable, et pour chaque $n \in K$

---

[3]) La notion de mesure conditionelle régulière est due à J. L. Doob.

[4]) Une *tribu séparable* est une tribu engendrée par une famille dénombrable de parties.

on a $S^{(1,\ldots,n)} \subset \prod_{i=1}^{n} S_i$, donc $P(z^{(1,\ldots,n)}, \mathrm{pr}_{n+1}^{-1}(A_{n+1}))$ est régulière par rapport aux tribus $\left(\prod_{i=1}^{n} S_i, S_{n+1}\right)$.

Remarque. Si, pour tout $n \in K$, $\mathcal{T}_n$ est une tribu séparable telle que $S_n \subset \mathcal{T}_n \subset T_n$, alors pour chaque $n \in K$, $P(z^{(1,\ldots,n)}, \mathrm{pr}_{n+1}^{-1}(A_{n+1}))$ est régulière par rapport aux tribus $\left(\prod_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i, \mathcal{T}_{n+1}\right)$.

THÉORÈME 1. *Soient l'espace E, le clan T, et la mesure $P(A)$ définie sur T, dénombrablement additive sur la tribu $\mathrm{pr}_I^{-1}(T^I)$ quelle que soit la partie finie $I \subset K$. Si $K = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ et si, pour chaque $n \in K$, la mesure conditionelle $P(z^{(1,\ldots,n)}, \mathrm{pr}_{n+1}^{-1}(A_{n+1}))$ est quasi-régulière, $P(A)$ est dénombrablement additive sur T.*

Démonstration. Soit $H_1, H_2, \ldots$ une suite décroissante de parties appartenant à T, telles que $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n = \Phi$. Montrons que

$$\lim_{n\to\infty} P(H_n) = 0.$$

On peut supposer que pour chaque n, $H_n = \mathrm{pr}_{(1,2,\ldots,n)}^{-1}(\bar{H}_n)$, où $\bar{H}_n \in T^{(1,2,\ldots,n)}$. Pour chaque $n \in K$, il existe[5]) n tribus séparables $T_1^n \subset T_1$, $T_2^n \subset T_2, \ldots, T_n^n \subset T_n$, telles que $\bar{H}_n \in \prod_{i=1}^{n} T_i^n$. Pour tout $i \in K$, soit T'_i la tribu séparable engendrée par la réunion $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_i^n$. Pour tout $n \in K$, soit $\mathcal{T}_n$ la tribu engendrée par la rénion $T'_n \cup S_n$, où, pour chaque $n \in K$, S_n est la tribu construite dans le lemme ci-dessus. $\mathcal{T}_n$ est séparable et pour chaque $n \in K$, $\bar{H}_n \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i$. Il résulte de la remarque du lemme que pour chaque $n \in K$, $P(z^{(1,\ldots,n)}, \mathrm{pr}_{n+1}^{-1}(A_{n+1}))$ est régulière par rapport aux tribus $\left(\prod_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i, \mathcal{T}_{n+1}\right)$.

Soit $\mathcal{T}$ le clan construit à partir des tribus $\mathcal{T}_n$ par la même méthode que celle utilisée pour construire le clan T à partir des tribus T_n. Comme on a, pour chaque $n \in K$, $H_n \subset \mathcal{T}$, il résulte du théorème (A) que $\lim_{n\to\infty} P(H_n) = 0$.

On peut appliquer le théorème (A), car la mesure conditionelle $P(z^{(1,\ldots,n)}, \mathrm{pr}_{n+1}^{-1}(A_{n+1}))$, calculée à l'aide des tribus $\left(\prod_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i, \mathcal{T}_{n+1}\right)$, est encore régulière.

---

[5]) Cette affirmation est une conséquence immédiate du théorème D de P. Halmos ([3], p. 24).

Du théorème 1 on déduit immédiatement le

THÉORÈME 2. *Soient E un espace, T un clan et $P(A)$ une mesure définie sur T, dénombrablement additive sur la tribu $\mathrm{pr}_I^{-1}(T^I)$, quelle que soit la partie finie $I \subset K$. Si, quels que soient la partie finie $I \subset K$ et $t \in K-I$, la mesure conditionelle $P(z^I, \mathrm{pr}_t^{-1}(A_t))$ est quasi-régulière, $P(A)$ est dénombrablement additive sur T.*

4. Problèmes ouverts. On ne sait pas si le théorème 2 est vrai si l'on suppose que $P(z^I, \mathrm{pr}_t^{-1}(A_t))$ est régulière par rapport aux tribus $(T^I, \mathcal{T}_t)$, quelle que soit la tribu séparable $\mathcal{T}_t \subset T_t$ (**P 196**). S'il en étant ainsi, les résultats de Ionescu Tulcea [5], de Marczewski [6]) [6], de Ryll-Nardzewski [7] et de cette note en seraient des cas particuliers. En ce qui concerne les résultats de Marczewski et de Ryll-Nardzewski, ce fait se déduit en tenant compte de [7], théorèmes I, III et IV, et de [2], théorème 3.1, p. 96-98.

On pourait aussi demander un exemple de mesure conditionelle $P(z^I, \mathrm{pr}_t^{-1}(A_t))$ qui soit régulière par rapport aux tribus $(T^I, \mathcal{T}_t)$ quelle que soit la tribu séparable $\mathcal{T}_t \subset T_t$, et qui ne soit pas régulière ou quasi-régulière (**P 197**).

TRAVAUX CITÉS

[1] E. Sparre Andersen and B. Jessen, *On the introduction of measures in infinite product sets*, Danske Vid. Selsk. Mat. Fys. Medd. 25 (1948), Nr 4.

[2] J. L. Doob, *Stochastic processes with an integral-valued parameter*, Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1938), p. 87-149.

[3] — *Stochastic processes*, New York 1953.

[4] P. R. Halmos, *Measure theory*, New York 1950.

[5] C. T. Ionescu-Tulcea, *Mesures dans les espaces produits*, Rend. Acad. Naz. Lincei 7 (1949), p. 208-211.

[6] E. Marczewski, *On compact measures*, Fund. Math. 40 (1953), p. 113-124.

[7] C. Ryll-Nardzewski, *On quasi-compact measures*, ibidem 40 (1953), p. 125-130.

Reçu par la Rédaction le 1. 7. 1956

[6]) En ce qui concerne l'additivité dénombrable de la mesure.

BEMERKUNGEN ÜBER HAUSDORFFSCHE MASSE UND HAUSDORFFSCHE DIMENSIONEN IN LIESCHEN GRUPPEN

VON

A. GOETZ (WROCŁAW)

Einleitung. In der vorliegenden Arbeit werden linksinvariante Hausdorffsche Maße in Lieschen Gruppen behandelt. Die Konstruktionsidee von invarianten Maßen in topologischen Gruppen hat Oxtoby in [5] entwickelt.

In § 1 wird der Begriff des Hausdorffschen Maßes und der Hausdorffschen Dimension eingeführt und es werden einige Hilfssätze bewiesen, die im weiteren angewendet werden.

In § 2 wird bewiesen, daß für die „Riemannsche" linksinvariante Metrik in einer n-gliedrigen Lieschen Gruppe (eine solche Metrik kann man z. B. mit Hilfe der Maurer-Cartanschen Formen $\omega^1, \ldots, \omega^n$ bilden, indem man $ds^2 = (\omega^1)^2 + \ldots + (\omega^n)^2$ setzt) das n-dimensionale Hausdorffsche Maß gleich dem Haarschen Maß ist, und daraus wird abgeleitet, daß das n-dimensionale Hausdorffsche Maß in einem n-dimensionalen Riemannschen Raume dem klassischen Inhalt proportional ist[1]).

In § 3 wird bewiesen, daß für die Hausdorffsche Dimension h_ϱ einer n-gliedrigen Lieschen Gruppe G mit einer beliebigen linksinvarianten Metrik $\varrho(x,y)$, welche die Topologie von G nicht ändert, die Ungleichungen gelten:

$$\frac{n}{\log_2\left[\limsup\limits_{x\to e}\dfrac{\varrho(e,x^2)}{\varrho(e,x)}\right]} \leqslant h_\varrho \leqslant \frac{n}{\log_2\left[\liminf\limits_{x\to e}\dfrac{\varrho(e,x^2)}{\varrho(e,x)}\right]},$$

wo e das Einheitselement der Gruppe ist. Wenn

$$\liminf_{x\to e}\frac{\varrho(e,x^2)}{\varrho(e,x)} \leqslant 1$$

ist, so gilt nur die erste Ungleichung, die im Falle von

$$\limsup_{x\to e}\frac{\varrho(e,x^2)}{\varrho(e,x)} = 1$$

[1]) Vergleiche [4], wo das letztgenannte Resultat auf eine andere Weise abgeleitet wird.