same time formula (16) holds for all $E \in \mathcal{C}$ (in view of the denumerability of $\mathcal{C}$). Lemma 4 gives $\mu(\cdot|\boldsymbol{x}) \in \mathfrak{M}_{\mathrm{ind}}$ for $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_0$.

6. Combining Theorems 1, 2, 3 and 5 obtain the main result of this paper:

THEOREM 6. *Let μ be a symmetrical measure ($\mu \in \mathfrak{M}_{\mathrm{sym}}$) and let $\mu(E|\boldsymbol{x})$ denote the conditional measure with respect to the field $\mathcal{B}_{\mathrm{inv}}$. Then:*

(α) *$\mu(\cdot|\boldsymbol{x})$ is a product measure μ-a. e.,*

(β) *$\mu(E) = \int \mu(E|\boldsymbol{x})d\mu$ for $E \in \mathcal{B}$,*

(γ) *μ is also symmetrical in the strong sense.*

Remark. Comparing Theorems 6 and 1, we see that $T = \boldsymbol{X}$, $\mathcal{T} = \mathcal{B}_{\mathrm{inv}}$ and $\tau = \mu|\mathcal{B}_{\mathrm{inv}}$. Thus, the construction in Theorem 6 is of inner character.

REFERENCES

[1] Е. Б. Дынкин, *Классы эквивалентных случайных величин*, Успехи Математических Наук 8 (1953), p. 125-130.

[2] P. R. Halmos, *Measure theory*, New York 1950.

[3] E. Hewitt and L. J. Savage, *Symmetric measures on Cartesian products*, Transactions of the American Math. Soc. 80 (1955), p. 470-501.

[4] A. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Berlin 1933.

[5] F. Riesz, *Sur la théorie ergodique*, Commentarii Mathematici Helvetici 17 (1944/45), p. 224.

[6] В. А. Рохлин, *О разложении динамической системы на транзитивные компоненты*, Математический Сборник 25 (1949), p. 235-249.

MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES

ZUR THEORIE DER LOKAL-KOMPAKTEN ABELSCHEN GRUPPEN

VON

S. HARTMAN (WROCŁAW) UND C. RYLL-NARDZEWSKI (LUBLIN)

Inhalt

Einleitung

I. Ergodizität in kompakten abelschen Gruppen

II. Der Zusammenhang und äquivalente Eigenschaften in kompakten Gruppen

III. Die Nullkomponente als direkter Summand

IV. Diskrete Charaktere und Vollständigkeit in lokal-kompakten Gruppen

V. Das Aliquotenproblem

VI. Die Phantomtopologie auf der reellen Achse

VII. Torsionsfreie fastperiodische Funktionen

Die Theorie der lokal-kompakten abelschen Gruppen ist dank den bekannten Resultaten von Pontrjagin und van Kampen zu einem in Grundzügen fertiggebauten System geworden. Beiträge anderer Autoren haben weitere einzelne Ergebnisse gebracht, so daß hier scheinbar kein Forschungsgebiet mehr vorliegt. Dennoch lehrt eine Zusammenstellung der in der Literatur zerstreuten Resultate, daß gewisse Verknüpfungen zwischen Sätzen und Begriffen nach allem Anschein außer acht gelassen wurden und daß diesbezüglich neue Probleme auftauchen. Der Zweck dieser Arbeit ist somit, bekannte Eigenschaften von lokal-kompakten abelschen Gruppen auf die gegenseitige Abhängigkeit zu untersuchen, daraus einige neue Schlüsse zu ziehen und mehrere offene Probleme zu stellen. Es wird nicht vermieden auch bekannte Sätze neu zu beweisen, wo die Darstellung dabei an Einheitlichkeit gewinnen kann.

EINLEITUNG

Hier werden wir die Grundbegriffe erörtern. Als *topologische* (insb. *lokal-kompakte*) Gruppe bezeichnen wir eine Gruppe, deren Elemente einen topologischen (insb. lokal-kompakten) Raum bilden, in welchem die Operation ab^{-1} stetig ist. Unter dem *topologischen* Raum ist hier eine Gesamtheit gemeint, in der eine Klasse von Untermengen bestimmt ist, die *Umgebungen* heißen und folgenden Bedingungen unterworfen sind: 1° jedes Element ist in einer Umgebung enthalten, 2° wenn ein Element

a zu den Umgebungen U und V gehört, dann gibt es eine Umgebung $W \subset U \cap V$ mit $a \epsilon W$, 3° für je zwei Elemente $a \neq b$ gibt es eine Umgebung, die a aber nicht b enthält. Vereinigungsmengen von Umgebungen heißen *offene Mengen*. Der Raum E heißt *kompakt*, wenn aus jeder Familie offener Mengen, welche zusammen ganz E überdecken, eine endliche Überdeckung herausgegriffen werden kann. E ist *lokal-kompakt*, wenn jedes Element eine Umgebung hat, die durch Abschließung (d. h. durch Hinzufügung aller Häufungspunkte) kompakt wird. Wir werden fast ausschließlich mit abelschen Gruppen zu tun haben und die Gruppenoperation mit $+$ bezeichnen; nur bei der multiplikativen Gruppe K der komplexen Zahlen vom Absolutbetrage 1 weichen wir davon zugunsten der üblichen Schreibweise ab. Die Gruppe K kann als Beispiel einer kompakten abelschen Gruppe dienen; sie ist der Kreisdrehungsgruppe offenbar isomorph. Andere Beispiele kann man daraus durch kartesische Produktbildung K^n erhalten. Das sind die sog. *topologischen Torusse*. Ihre Dimmension, d. h. der Exponent n kann beliebig, auch unendlich sein. Offenbar ist eine endliche Gruppe kompakt, wenn jedes Element als Umgebung betrachtet wird (sog. *diskrete Topologie*). Jede abstrakte Gruppe kann durch die diskrete Topologisierung zu einer lokal-kompakten Gruppe gemacht werden. Ein besonders wichtiges und einfaches Beispiel einer lokal-kompakten und nicht kompakten abelschen Gruppe ist die additive Gruppe L der reellen Zahlen mit der gewöhnlichen Topologie der geraden Linie.

In den lokal-kompakten Gruppen kann man ein invariantes reguläres Borelsches Maß einführen, das auf den offenen Mengen positiv und auf den kompakten endlich ist ([6], Chapter XI). Wir erklären das genauer. Sei M der Ring der Borelschen Mengen, d. h. die kleinste Mengenfamilie, die alle kompakten Untermengen der Gruppe umfaßt und abgeschlossen in bezug auf die Differenz und die abzählbare Vereinigungsbildung (also auch auf die abzählbare Durchschnittsbildung) ist. Auf M läßt sich eine nicht-negative Mengenfunktion μ definieren mit folgenden Eigenschaften: 1° für offene $U \epsilon M$ ist $\mu(U) > 0$, 2° für kompakte F ist $\mu(F) < \infty$, 3° für disjunkte $A_1, A_2, \ldots \epsilon M$ ist

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

4° für jedes $A \epsilon M$ und jedes Element s gilt $\mu(As) = \mu(A)$ (für abelsche Gruppen schreiben wir $\mu(A+s) = \mu(s+A) = \mu(A)$) und 5° $\mu(A) = \inf \mu(U)$, wo U alle offenen Mengen aus M durchläuft, die A umfassen (Regularität). μ heißt das *Maß von Haar*. Es ist durch die vorgezählten Eigenchaften bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt ([6], S. 263). Auf jeder kompakten Gruppe G ist μ endlich; wir werden es in diesem

Fall immer durch die Bedingung $\mu(G) = 1$ normieren. Außerdem ist μ auf den kompakten, auch nicht-abelschen Gruppen biinvariant, d. h. $\mu(As) = \mu(sA)$ für jedes $A \epsilon M$ und $s \epsilon G$. Der Ring M wird hier zu einem Körper, d. h. er ist einbezug auf die Komplementbildung abgeschlossen. Er umfaßt alle offenen Mengen.

Ein stetiger Homomorphismus einer lokal-kompakten abelschen Gruppe G in die Gruppe K heißt *Charakter* von G. Sind χ_1 und χ_2 Charaktere von G, so ist es das Produkt $\chi = \chi_1 \cdot \chi_2$ (hier ist $\chi(s) = \chi_1(s) \cdot \chi_2(s)$ zu setzen) und das Inverse $1/\chi_1 = \bar{\chi}_1$ auch. Alle Charaktere bilden also wieder eine Gruppe. Ihr Einselement ist der triviale Charakter $\chi(s) \equiv 1$. Sie wird topologisiert, indem man als Umgebung des Einselements die Gesamtheit von Charakteren betrachtet, die eine kompakte Untermenge von G in eine Umgebung des Einselements in K abbilden. Die so topologisierte Gruppe der Charaktere heißt *dual* zu G und wird durch G^* bezeichnet. Die Dualitätssätze von Pontrjagin [14][1]) und van Kampen [11] besagen nun:

(I) G^* is lokal-kompakt,

(II) $(G^*)^* \simeq G$ ($\simeq$ bedeutet einen isomorphen Homöomorphismus),

(III) ist G diskret, so ist G^* kompakt und umgekehrt.

Hält man in $\chi(s)$ s fest und läßt man χ ganz G^* durchlaufen, so kann man s als Charakter von G^* ansehen. Der wesentliche Sinn von (ii) besteht darin, daß man auf diese Weise alle Charaktere von G^* erhält, und jedes nur einmal. Daraus folgt

(IV) für $s, t \epsilon G$, $s \neq t$, gibt es einen Charakter χ mit $\chi(s) \neq \chi(t)$, m. a. W.: eine lokal-kompakte abelsche Gruppe hat „genügend viele'' Charaktere.

Ist H eine abgeschlossene Untergruppe einer abelschen topologischen Gruppe G, so induziert der natürliche Homomorphismus $G \to G/H$ eine Topologie in G/H: eine Umgebung des Nullelements in dieser Faktorgruppe ist durch eine Umgebung U des Nullelements in G bestimmt und besteht aus denjenigen Nebengruppen, die wenigstens ein Element $x \epsilon U$ enthalten. Ist G lokal-kompakt bzw. kompakt, so ist es G/H auch ([14], S. 116 und 117). Die Charaktere von G, welche auf H gleich 1 sind, bilden eine abgeschlossene Untergruppe A_H von G^* — den *Annihilator* von H. Nun lautet ein weiterer Dualitätssatz von Pontrjagin:

(V) ist H eine abgeschlossene Untergruppe einer lokal-kompakten abelschen Gruppe G, so gilt $H^* \simeq G^*/A_H$.

[1]) Die erste Ausgabe des Pontrjaginschen Buches ist auch in englischer Sprache erschienen (*Topological groups*, Princeton 1939). Die meisten Resultate sind dort unter zusätzlichen Voraussetzungen bewiesen, von welchen sie in der zweiten Ausgabe befreit wurden.

Ein Beispiel der Dualität: die Gruppe C der ganzen Zahlen und die Gruppe K (die Charaktere von C sind von der Form $\chi(n) = e^{2\pi i n t}$, wo die reelle Zahl t (mod 1) den Charakter bestimmt). Ein anderes Beispiel: die Gruppe L der reellen Zahlen und wieder dieselbe Gruppe L (Selbstdualität! Die Charaktere von L sind $\chi(t) = e^{i\lambda t}$ mit $\lambda \in L$).

Folgender Satz ist einfach und wichtig:

(1) $$\int_G \chi(x)\,d\mu = 0 \quad \text{für jeden nicht-trivialen Charakter } \chi.$$

I. *ERGODIZITÄT IN KOMPAKTEN ABELSCHEN GRUPPEN*

In diesem Abschnitt wird G immer eine kompakte abelsche Gruppe bezeichnen. Der berühmte Satz von Peter und Weyl ([14], S. 230) besagt in diesem Fall, daß jede komplexwertige stetige Funktion auf G durch „trigonometrische Polynome”, d. h. Funktionen der Gestalt

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \chi_k(x),$$

wo χ_k Charaktere und a_k komplexe Koeffizienten sind, gleichmäßig approximierbar ist. Für die Gruppe K sind das wirkliche trigonometrische Polynome und der Peter-Weylsche Satz reduziert sich auf den Weierstraßschen.

Satz 1. *Für jede stetige Funktion f und jedes $s \in G$ ist die Folge*

$$\Phi_{s,n}^{f}(x) = \frac{1}{n+1}\,[f(x)+f(x+s)+\ldots+f(x+ns)]$$

auf G gleichmäßig konvergent.

Dem Satz von Peter und Weyl zufolge genügt es den Beweis nur für die Charaktere zu erbringen. Man hat

(2) $$\Phi_{s,n}^{\chi}(x) = \chi(x)\,\frac{1+\chi(s)+\ldots+\chi^{n}(s)}{n+1}.$$

Ist $\chi(s) = 1$, so ist der Bruch rechts immer gleich 1 und andernfalls strebt er nach Null mit $n \to \infty$. Daraus folgt die Behauptung.

Ein Element $s \in G$ nennen wir *ergodisch*, wenn die Folge ns $(n = 1, 2, \ldots)$ in G dicht liegt. Als Beispiel nennen wir in K die Zahlen $e^{2\pi i \xi}$ mit irrationalem ξ. Wir wollen die Eigenschaften der ergodischen Elemente untersuchen, wobei der Peter-Weylsche Satz sich als Hauptmittel bewähren wird.

Bemerkung. Die Definition der Ergodizität wird nur scheinbar abgeschwächt, wenn man verlangt, daß die Menge ns mit *ganzen* n in G dicht liegt, weil die abgeschlossene Hülle von $s, 2s, 3s, \ldots$ eine kompakte Halbgruppe mit Kürzungsregel, und daher nach einem Satz von Iwasawa [4] schlechthin eine Gruppe bildet; deshalb müssen die negativen Vielfachen von s in dieser Hülle mit enthalten sein.

Satz 2. *Folgende Eigenschaften sind äquivalent:*

(a) *s ist ergodisch,*

(b) *für jeden nicht-trivialen Charakter gilt $\chi(s) \neq 1$,*

(c) *für jede stetige Funktion f und jedes $x \in G$ gilt*

$$\lim_n \Phi_{s,n}^{f}(x) = \int f(t)\,d\mu,$$

(d) *ist für eine μ-meßbare Funktion $g(x+s) = g(x)$ fast überall, so gilt $g(x) = \text{const.}$ f. ü.,*

(e) *ist für eine meßbare Menge E $\mu(E \dot{-} (E+s)) = 0$, so gilt $\mu(E) = 0$ oder $\mu(E) = 1$,*

(f) *ist für eine meßbare Menge E $E+s = E$, so gilt $\mu(E) = 0$ oder $\mu(E) = 1$,*

(g) *für jede μ-integrierbare Funktion gilt*

$$\lim_n \Phi_{s,n}^{g}(x) = \int g(t)\,d\mu \qquad \text{f. ü.}$$

Beweis. Die Relation (a) $\to$ (b) folgt unmittelbar aus der Stetigkeit von χ und der Definition eines ergodischen Elements. Nun leiten wir (c) aus (b) her. In Anbetracht des Peter-Weylschen Satzes genügt es (c) für die Charaktere zu beweisen. Für den trivialen Charakter gilt (c) trivialerweise, für andere Charaktere folgt es aus (2), (b) und (1) (s. Einleitung). Man könnte (c) unmittelbar aus (a) erhalten: die Funktion

$$\psi(x) = \lim_n \Phi_{s,n}^{f}(x)$$

ist nach Satz 1 stetig und man hat identisch $\psi(x+s) = \psi(x)$; da also die Elemente ns in G dicht liegen, so ist $\psi(x) = \text{constans} = \int \psi(x)\,d\mu = \int f(x)\,d\mu$.

Wir setzen jetzt (c) voraus und werden (d) folgern. Die Konvergenz in (c) gilt offenbar auch im Mittel:

(3) $$\lim_n \int \left|\Phi_{s,n}^{f}(x) - \int f(t)\,d\mu(t)\right| dx = 0.$$

Ist die Funktion g integrierbar, so kann sie in (3) statt f gesetzt werden, was man sofort einsieht, indem man g durch stetige Funktionen im Mittel approximiert. Ist nun $g(x) = g(x+s)$ f. ü., so ist f. ü. $\Phi_{s,n}^{g}(x) = g(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $g(x) = \int g(t)\,d\mu(t)$ f. ü.

Ist g nicht integrierbar, so erhält man (d), indem man g durch integrierbare (oder gar beschränkte) Funktionen asymptotisch approximiert.

(e) erhält man aus (d), wenn man für g die charakteristische Funktion der Menge E setzt. (f) folgt aus (e) trivialerweise. Ehe wir auch die umgekehrte Relation indirekt feststellen, bemerken wir schon hier, daß sie nicht nur in unserem Fall, sondern viel allgemeiner besteht ([10], S. 110): ist in einem Raum A ein endliches abzählbar additives Maß μ auf einem σ-Mengenkörper M bestimmt und ist T eine Abbildung von A in sich mit $\mu(T^{-1}E)=\mu(E)$ für $E\in M$ (Maßtreue), so sind folgende Bedingungen äquivalent: 1° wenn $\mu(E \dot{-} T^{-1}E)=0$ gilt (Fast-Invarianz), so ist $\mu(E)=0$ oder 1, und 2° wenn $E=T^{-1}E$ gilt, so ist $\mu(E)=0$ oder 1. Die Transformation T heißt dann *unzerlegbar*. In unserem Falle hat man $TA=A+s$ zu setzen. Wir haben also bewiesen, daß die Transformation $A+s$ mit einem ergodischen s unzerlegbar ist. Um dann (g) aus (f) zu erhalten, braucht man wieder ein stärkeres Mittel; das ist der Ergodensatz von Birkhoff (vgl. [10]), der in soeben verwendeten Bezeichnungen lautet: ist die maßtreue Transformation T unzerlegbar, so gilt für jede μ-integrierbare Funktion auf A

$$\lim_n \frac{1}{n+1}\,[g(x)+g(Tx)+\ldots+g(T^m x)] = \int g(t)\,d\mu(t) \quad \text{f. ü.}$$

Dank diesem Satze folgt (g) unmittelbar aus (f) oder (e). Endlich muß man noch die Relation (g) $\rightarrow$ (a) beweisen. Aus (g) kann man zuerst (c) herleiten: es genügt für g eine stetige Funktion f zu setzen und Satz 1 zu benutzen, nach welchem die Grenzfunktion in (c) stetig ist und also das „fast überall" sich in „überall" verwandelt. Wäre s trotz (g) nicht ergodisch, so würde man eine offene Menge U finden, die keine Vielfachen von s enthält. Sei V eine offene Menge, deren abgeschlossene Hülle $\overline{V}$ in U enthalten ist. Eine kompakte Gruppe ist total-regulär ([14], S. 114), man kann also eine stetige nicht-negative Funktion f bestimmen, die für $x\in\overline{V}$ gleich 1 und für $x\in U$ gleich 0 ist. Wenden wir (c) auf diese Funktion an, so stoßen wir auf einen Widerspruch, weil

$$\lim_n \Phi^f_{s,n}(0)=0 \quad \text{und} \quad \int f(x)\,d\mu \geqslant \mu(V)>0$$

ist.

Somit ist Satz 2 bewiesen. Der letzte Teil des Beweises lehrt, daß der Ergodensatz überflüssig ist, wenn es nur auf die Äquivalenz von (a) bis (c) ankommt. Wenn man lediglich die von Eckmann [3] bewiesene Äquivalenz (a) $\equiv$ (b) herleiten will, kann man auch den Peter-Weylschen Satz umgehen, man muß sich dann aber eines ebenso tiefliegenden Resultates bedienen, der zur Dualitätstheorie gehört, nämlich: ist H eine abgeschlossene Untergruppe einer lokal-kompakten abelschen Gruppe G und $x_0\in G$ ein Element außerhalb H, so ist jeder Charakter χ von H zu einem Charakter χ^* von G fortsetzbar, und zwar so, daß $\chi^*(x_0)\neq 1$ ([14], S. 280). Wenn man nun (b) voraussetzt und (a) verneint, so bilde man durch Abschließung der Menge aller ns eine Untergruppe H (s. Bemerkung, S. 160), die also nicht mit ganz G identisch ist, und man erweitere den trivialen Charakter χ von H zu einem nicht-trivialen Charakter χ^* von G, was auf Grund des eben erwähnten Satzes möglich ist. Da aber $\chi^*(s)=1$, gerät man in Widerspruch mit (b).

Wir beweisen noch einen Satz über ergodische Elemente, nämlich den folgenden „Gleichverteilungssatz", der den klassischen (mit $G=K$) umfaßt:

SATZ 3. *Ist s ergodisch, $U\subset G$ eine Borelsche Menge mit $\mu(\overline{U})=\mu(U)$ und $R(x,N)$ die Anzahl der Elemente $x+ns$ mit $n\leqslant N$, die in U liegen, so ist für jedes x*

$$\lim_N \frac{R(x,N)}{N}=\mu(U).$$

Anmerkung. Die Gleichverteilung in kompakten Gruppen wurde auch von Eckmann [3] untersucht, aber in seiner Definition und in dem Beweise wurde die wesentliche Bedingung $\mu(\overline{U})=\mu(U)$ übersehen. Nennen wir eine Umgebung mit dieser Eingenschaft *regulär*, so können wir behaupten, daß in jeder Umgebung U eines Elements a eine reguläre enthalten ist. In der Tat: ist $g(x)$ eine stetige Funktion mit $g(a)=0$ und $g(x)=1$ außerhalb U, so bildet für jedes positive $\lambda\leqslant 1$ die Menge $U_\lambda=\{x: g(x)<\lambda\}$ eine Umgebung von a mit $U_\lambda\subset U$. Bis auf höchstens abzählbarviele λ muß der Rand $\overline{U}_\lambda\setminus U_\lambda=\{x: g(x)=\lambda\}$ das Maß Null haben, weil sich andernfalls $\mu(U)=\infty$ ergeben würde.

Beweis von Satz 3. Sei φ die charakterische Funktion von U. Wir haben

$$R(x,N)=\sum_{n=1}^{N}\varphi(x+ns).$$

Mithin kann man die Behauptung durch die Formel

$$\lim_n \Phi^{\varphi}_{s,n}(x)=\int\varphi(t)\,d\mu(t) \qquad (x\in g) \tag{4}$$

ausdrücken. Wir zeigen:

(i) für jedes $\varepsilon>0$ kann man zwei stetige Funktionen f_1 und f_2 mit $f_1(x)\leqslant\varphi(x)\leqslant f_2(x)$ und $\int f_2(x)\,d\mu-\int f_1\,d\mu<\varepsilon$ finden.

In der Tat: die Regularität von μ hat zur Folge, daß für jedes $\varepsilon>0$ eine abgeschlossene Menge $V\subset U$ existiert, für welche $\mu(U\setminus V)<\varepsilon/2$ gilt. Wegen der über U gemachten Voraussetzung gibt es auch eine offene Menge $W\supset\overline{U}$ mit $\mu(W\setminus U)<\varepsilon$. Als f_1 und f_2 nehmen wir stetige Funktionen an, welche die Bedingungen $0\leqslant f_i(x)\leqslant 1$ $(i=1,2)$, $f_1(x)=1$

für $x \in V$, $f_1(x) = 0$ für x non $\in U$, $f_2(x) = 1$ für $x \in \overline{U}$, $f_2(x) = 0$ für x non $\in W$ erfüllen. Aus (i) folgt (4) wegen (c).

Muß jede kompakte abelsche Gruppe ergodische Elemente haben? Die Antwort ist schon deshalb „nein", weil solche Elemente in einer endlichen Gruppe nur dann vorkommen, wenn dieselbe zyklisch ist. Ist in einer topologischen Gruppe wenigstens ein ergodisches Element vorhanden, so heißt die Gruppe *monothetisch* [2]. Sogar unendliche kompakte abelsche Gruppen brauchen nicht monothetisch zu sein. Ein Beispiel dafür ist das kartesische Produkt $Z_2^{\aleph_0}$ (Z_2 bedeutet die zyklische Gruppe der Ordnung 2), denn hier ist jedes Element von der Ordnung 2. Umgekehrt kann man aber aus der Monothetie auf Kommutativität und im Falle von lokal-kompakten Gruppen auch auf die Kompaktheit schließen, wenn auch mit einer einzigen Ausnahme in bezug auf das letztere: die freie zyklische Gruppe ist offenbar monothetisch, aber nicht kompakt. Der Schluß auf die Kommutativität ist ganz einfach: eine nichtabelsche Gruppe kann keine dichte zyklische Untergruppe enthalten. Die Kompaktheit ist nicht so leicht zu folgern; das hat Eckmann [3] getan.

II. DER ZUSAMMENHANG UND ÄQUIVALENTE EIGENSCHAFTEN IN KOMPAKTEN GRUPPEN

Wir werden folgende Eigenschaften ins Auge fassen:

(α) G wird von jeder Umgebung des Nullelements algebraisch erzeugt,

(β) ist χ ein nicht-trivialer Charakter von G, so ist $\chi(G)$ unendlich,

(γ) G ist *zusammenhängend* (d. h. nicht in zwei disjunkte nicht leere abgeschlossene Mengen zerlegbar),

(δ) G ist *vollständig*, d. h. die Gleichung $nx = a$ ist für jedes $a \in G$ und jedes ganze n lösbar.

Trivialerweise folgen (α) und (β) aus (γ) für jede topologische Gruppe. Auch die Relation (α)→(β) ist immer gültig. In der Tat: ist χ ein *diskreter* Charakter von G, d. h. ein Charakter, der endlichviele Werte annimmt ohne identisch 1 zu sein, so bildet die Menge $\{x: \chi(x) = 1\}$ eine echte offene Untergruppe von G und somit eine Umgebung des Nullelements, die nicht ganz G erzeugt. Schließlich hat (δ) immer (β) zur Folge: ist G vollständig, so muß bei jedem $\chi \in G^*$ die Gruppe $\chi(G) \subset K$ auch vollständig sein. Darum ist sie unendlich.

Im weiteren bedeutet G wieder eine kompakte abelsche Gruppe.

Satz 4. *Die Eigenschaften* (α)-(δ) *sind äquivalent.*

Dieser Satz ist bekannt (s. z. B. [12], S. 55), wir geben aber einen Beweis, der von den bisherigen abweicht.

Zunächst beweisen wir folgendes

Lemma. *Setzt man $\varphi(x) = \{\chi_1(x), \ldots, \chi_n(x)\}$ ($\chi_i \in G^*$), so hat* (β) *zur Folge, daß $H = \varphi(G) \subset K^n$ einem Torus K^r homöomorph-isomorph ist.*

Beweis. Wir bilden die zu H duale Gruppe H^*. Die zu ganz K^n duale Gruppe C^n ist direkte Summe von n freien zyklischen Gruppen, hat also ein endliches System von Erzeugenden. Dasselbe trifft folglich auf H^* zu, weil H^* auf Grund von (V) (s. Einleitung) einer Faktorgruppe von C^n isomorph ist. Daher ist H^* in etwa $r \leqslant n$ zyklische Summanden zerlegbar. Da die Voraussetzung (β) der Abwesenheit von Elementen endlicher Ordnung in H^* gleichkommt, sind alle diese Summanden frei: $H^* \simeq C^r$. Nach dem Dualitätssatz (II) (s. Einleitung) ist $(H^*)^* \simeq H$, und da $C^* \simeq K$, so ergibt sich $H \simeq K^r$.

Nun zeigen wir, daß (γ) aus (β) folgt. Jedem Element $x \in G$ ordnen wir das Zahlensystem $\psi(x) = \{\chi(x)\}$ ($\chi \in G^*$) als Punkt eines Torus $K^{\mathfrak{m}}$ ($\mathfrak{m} = \overline{\overline{G^*}}$) zu. Nach (IV) (s. Einleitung) ist $\psi(G)$ ein stetig isomorphes Bild von G. Da G kompakt ist, so hat man $\psi(G) \simeq G$. Zuerst bemerken wir, daß

$$\psi(G) = \bigcap_{\chi_1, \ldots, \chi_n} \varphi^c(G),$$

wo $\varphi^c(G)$ die Zylindermenge bedeutet, welche zur Basis das in dem Teilprodukt $K^n \subset K^{\mathfrak{m}}$ der zu $\chi_1, \ldots, \chi_n$ gehörenden „Achsen" gelegene Kompaktum $\varphi(G)$ hat, und der Durchschnitt über alle endlichen Systeme von Charakteren genommen wird. Nur die Inklusion

$$\bigcap_{\chi_1, \ldots, \chi_n} \varphi^c(G) \subset \psi(G)$$

bedarf einer Begründung, und diese erhält man leicht aus der Abgeschlossenheit von $\psi(G)$ in $K^{\mathfrak{m}}$.

Aus (β) und dem Lemma folgt, daß alle Mengen $\varphi(G)$ Torussen homöomorph, und also zusammenhängend sind. Mithin sind auch die $\varphi^c(G)$ zusammenhängend. Dasselbe muß daher auf $\psi(G)$ zutreffen. In der Tat: ließe sich $\psi(G)$ in zwei punktfremde abgeschlossene Mengen A_1 und A_2 zerlegen, so würde man offene und nach Abschließung noch disjunkte Hüllen $O_1 \supset A_1$, $O_2 \supset A_2$ finden, und wegen der Kompaktheit von $\varphi^c(G)$ gäbe es einen endlichen Durchschnitt dieser Mengen mit

$$\bigcap_{i=1}^{\nu} \varphi_i^c(G) \subset (O_1 \cup O_2);$$

deshalb zerfiele $\bigcap_{i=1}^{\nu} \varphi_i^c(G)$ in die in $\overline{O}_1$ bzw. $\overline{O}_2$ enthaltenen Teile, wäre also doch nicht zusammenhängend.

Die Relation $(\beta)\equiv(\gamma)$ kann man auch so ausdrücken, daß die zur diskreten Gruppe G^* duale Gruppe G dann und nur dann zusammenhängend ist, wenn in G^* keine Elemente endlicher Ordnung vorkommen (in [14], S. 262, bewiesen); die diskreten Charaktere sind nämlich eben die Elemente endlicher Ordnung in G^*.

Nun zeigen wir $(\beta)\to(\delta)$, was den Beweis von Satz 4 zu Ende bringt. Sei demnach (β) angenommen; wäre G nicht vollständig, so müßte für ein natürliches n die Gruppe nG von G verschieden sein. Diese Gruppe ist abgeschlossen, weil nx ein stetiger Homomorphismus und G kompakt ist. Mithin wäre G/nG eine kompakte Gruppe, die sich nicht auf das Nullelement reduziert, und also einen nicht-trivialen Charakter χ hat. Da in G/nG die Gleichung $nx=0$ für jedes x gilt, so müßte auch $\chi^n(x)=1$ identisch gelten. Macht man nun χ zu einem Charakter von G, indem man es auf den Nebengruppen konstant setzt, so entsteht ein diskreter Charakter, was der Annahme widerspricht.

Jetzt fragen wir nach der Abhängigkeit zwischen der Monothetie und dem Zusammenhang der Gruppe. Wir wollen insbesondere folgende Bedingung betrachten:

(ε) die Menge aller nicht-ergodischen Elemente hat das innere Haarsche Maß gleich Null.

Wir haben die Ergodizitätseigenschaften schon besprochen (Abschnitt I) und wissen, daß ergodische Elemente, abgesehen von der freien zyklischen Gruppe, nur in kompakten abelschen Gruppen vorkommen können. Die Bedingung (ε) kann offenbar nur durch die letzteren erfüllt sein. Wir beweisen jetzt den einfachen

Satz 5. *Die Bedingung* (ε) *hat den Zusammenhang der Gruppe zur Folge.*

Wir zeigen, daß (β) aus (ε) folgt: wenn die Gruppe einen diskreten Charakter χ hat, so ist die Menge $U=\{x:\chi(x)=1\}$ offen und von G verschieden. Nach (b) ist jedes $x\in U$ nicht-ergodisch, U hat aber ein positives Maß.

Von einer glatten Umkehrung dieses Satzes für beliebige kompakte abelsche Gruppen kann nicht die Rede sein, und zwar aus folgendem Grunde: Sei $\mathfrak{m}$ der *Separabilitätstypus der Gruppe*, d. h. es gebe $\mathfrak{m}$, und nicht weniger offene Mengen, aus denen jede offene Menge durch abzählbare Summenbildung entsteht. Es wird leicht bewiesen, daß für $\mathfrak{m}>2^{\aleph_0}$ keine abzählbare Menge in G dicht liegt; um desto mehr kann kein Element ergodisch sein. Wir stellen aber das Problem (**P 160**), ob die Umkehrung von Satz 5 bei der zusätzlichen Annahme $\mathfrak{m}\leqslant 2^{\aleph_0}$ gilt. Im Falle $\mathfrak{m}=2^{\aleph_0}$ können wir nur zeigen, daß aus dem Zusammenhang die Monothetie folgt, aber wir unterdrücken den Beweis. Im Fall $\mathfrak{m}=\aleph$, d. h. für separable zusammenhängende Gruppen, läßt sich (ε) und noch mehr behaupten: die nicht-ergodischen Elemente bilden eine F_σ-Menge vom Maße Null. Dieser Satz ist bekannt [8], wir führen aber den Beweis an.

Aus (b) folgt, daß die Menge der nicht-ergodischen Elemente als

$$\bigcup_{\chi}\{z:\chi(z)=1\}$$

dargestellt werden kann, wo die Summe über alle nicht-trivialen Charaktere genommen wird. Das ist eine abzählbare Summation, weil eine kompakte separable Gruppe höchstens abzählbarviele Charaktere hat ([14], S. 281). Die Mengen E_χ in $\{\ \}$ sind abgeschlossen und vom Maße Null. Das letztere beweist man so: da die Gruppe G zusammenhängend ist, hat sie keine diskreten Charaktere und somit gibt es zu jedem E_χ unendlichviele Nebengruppen; sie haben alle dasselbe Maß, und das ist Null, weil sonst $\mu(G)=\infty$ ausfallen würde.

Die Separabilitätsbedingung ist für die Behauptung wesentlich, weil andernfalls die Menge der ergodischen Elemente nicht notwendig meßbar ist [8].

Wir möchten uns für einen Augenblick den nicht-abelschen Gruppen zuwenden. Sei G kompakt und zusammenhängend, aber nicht abelsch. Obwohl dann kein Element allein eine dichte Untergruppe erzeugt, so können es doch zwei Elemente tun. Z. B. trifft das in der Kugeldrehungsgruppe G_2 auf je zwei Drehungen um zwei verschiedene Achsen zu, wenn nur die Drehungswinkel α, β mit der Zahl π inkommensurabel sind. Also: im Produkt $G_2\times G_2$ mit dem Haarschen Produktmaß hat fast jeder Punkt (x,y) die Eigenschaft, daß seine Koordinaten zusammen eine in G_2 dichte Untergruppe algebraisch erzeugen. Hier haben wir mit einer Ergodizität in höherer Dimension zu tun und der Satz von Eckmann findet sein Gegenstück. Wir wagen folgende Vermutung:

P 161. Sei G^n die kartesische Potenz einer kompakten zusammenhängenden und separablen Gruppe. Sei $E\subset G^n$ die folgendermaßen bestimmte Menge: $(x_1,\ldots,x_n)\in E$ dann und nur dann, wenn die Elemente $x_1,\ldots,x_n\in G$ zusammen eine in G dichte Untergruppe erzeugen. Sei schließlich μ das Haarsche Maß in G^n (also das Produkt der Maße in G). Dann ist entweder $\mu(E)=1$ oder $\mu(E)=0$.

Ist G abelsch, so besteht diese Vermutung zurecht: man hat ja $\mu(E)=1$ für jedes $n\geqslant 1$. Im allgemeinen sind wir imstande nur folgendes zu beweisen:

wenn in der Definition von E die Worte „eine in G dichte Untergruppe" durch „einen nicht-dichten Normalteiler" ersetzt werden, so hat die so definierte Menge daß Maß μ gleich Null.

Der Beweis ist dem des Halmos-Samelsonschen Satzes (S. 167) analog, bloß daß man mit Matrizendarstellungen (vgl. Abschnitt V, S. 176) statt mit Charakteren operieren muß. Auf die Einzelheiten gehen wir nicht ein.

Wir kehren zu den abelschen Gruppen zurück. Ist die Gruppe zusammenhängend, so kann Satz 3 verschärft werden. Man weiß, daß die Folge $n^k\xi$ ($k > 0$ ganz, fest) für jedes irrationale ξ im Einheitsintervall mod 1 gleichverteilt ist [16]. Das erlaubt uns zu beweisen, daß für ein ergodisches s die Aussage (c) (Abschnitt I) dann noch gilt, wenn man n^k anstatt n hineinsetzt. Allgemeiner haben wir den

SATZ 6. *Ist eine wachsende Folge natürlicher Zahlen r_n so beschaffen, daß für jedes irrationale ξ die Folge $r_n\xi$ mod 1 gleichverteilt ist, so gilt in jeder kompakten und zusammenhängenden abelschen Gruppe G für ein beliebiges ergodisches $s\in G$ und für jede stetige Funktion f*

$$(1)\qquad \lim_n \frac{1}{n}[f(x+r_1s)+\ldots+f(x+r_ns)] = \int f(t)\,d\mu \qquad (x\in G).$$

Wenn $R_x(x,N)$ die Anzahl derjenigen Elemente $x+r_ns$ mit $n\leqslant N$ bedeutet, die in einer vorgegebenen Borelschen Menge U mit $\mu(\overline{U})=\mu(U)$ liegen, so gilt

$$(2)\qquad \lim_N \frac{R_x(x,N)}{N} = \mu(U).$$

Die zweite Hälfte dieses Satzes erhält man aus der ersten genau so, wie Satz 3 aus (c) hergeleitet wurde. Wir beweisen die erste Hälfte. Es genügt (1) für Charaktere zu zeigen. Wird für f der triviale Charakter gesetzt, so haben wir 1 auf beiden Seiten. Für einen nicht-trivialen Charakter χ muß man die Gleichheit

$$(3)\qquad \lim_n \frac{1}{n}[\chi(r_1s)+\ldots+\chi(r_ns)] = 0$$

feststellen. Ist $\chi(s)=e^{2\pi i\xi}$, so muß ξ irrational sein, da wir andernfalls, für ein ganzes n, $\chi(ns)=e^{2\pi i\xi n}=1$ hätten, χ wäre also ein diskreter Charakter, und solche gibt es nicht. Aus der Irrationalität von ξ und der Beschaffenheit von r_n folgt aber (3) unmittelbar.

Wenn man zu obigen Voraussetzungen noch die Separabilität hinzufügt, so kommt

SATZ 7. *Für jede wachsende Folge natürlicher Zahlen r_n, jede stetige Funktion f und für fast jedes s gilt (1). Für dieselben s gilt (2), wenn $\mu(\overline{U})=\mu(U)$ ist.*

Wieder genügt es (1) für die Charaktere zu beweisen. Ist χ ein nicht-trivialer Charakter, so bilden die Funktionen $\varphi_n(x)=\chi(r_nx)$ ein orthonormales System auf G. In der Tat: für $n_1\neq n_2$ kommt

$$\int \chi(r_{n_1}x)\overline{\chi(r_{n_2}x)}\,d\mu = \int \chi\big((r_{n_1}-r_{n_2})x\big)\,d\mu = \int \chi^{r_{n_1}-r_{n_2}}(x)\,d\mu = 0,$$

weil $\chi^{r_{n_1}-r_{n_2}}$ kein trivialer Charakter ist (sonst wäre χ ein diskreter). Einem bekannten Satze von Banach Gemäß ist jede Folge orthonormaler Funktionen f. ü. nach dem arithmetischen Mittel nach Null konvergent. Somit gilt (1) für das gegebene χ bei fast jedem s. Da es wegen der Separabilität nur abzählbarviele Charaktere gibt, so gilt (1) bei fast jedem s für alle χ.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einem interessanten Satze, den wir noch später brauchen werden. Sei T die durch $Tx=2x$ erklärte Transformation;

SATZ 8. *In einer zusammenhängenden kompakten Gruppe ist die Transformation T unzerlegbar.*

Beweis. Wir werden mehr zeigen, nämlich: *T ist stark mischend*, d. h. man hat für je zwei Borelsche Mengen E und F

$$(4)\qquad \lim_n \mu\big(E\cap T^{-n}(F)\big) = \mu(E)\mu(F).$$

Daraus schließt man auf die Unzerlegbarkeit, indem man für E eine Menge mit $T^{-1}(E)=E$ wählt und $F=E$ setzt. Dann hat man in (4) links $\mu(E)$ und rechts $[\mu(E)]^2$. Daher ist $\mu(E)=0$ oder 1.

(4) werden wir als Sonderfall der allgemeineren Formel

$$(5)\qquad \lim_m \int f(x)g(mx)\,d\mu = \int f(x)\,d\mu\cdot\int g(x)\,d\mu \qquad (f, g\in L^2(\mu))$$

erhalten, indem wir für f und g die charakteristischen Funktionen der Mengen E und F, und $m=2^n$ setzen.

(5) genügt es für die Charaktere zu beweisen, weil diese eine orthonormale Basis im Raum $L^2(\mu)$ bilden. Ist $f\equiv g\equiv 1$, so gilt (5) trivialerweise. Ist $f=\chi_1$ und $g=\chi_2$, und sind diese Charaktere nicht beide trivial, so muß man zeigen, daß

$$(6)\qquad \lim_m \int \chi_1(x)\chi_2(mx)\,d\mu = 0.$$

Der Wert dieses Integrals ist 1, wenn $\chi_1\cdot\chi_2^m\equiv 1$ ist, und sonst 0. Der erste Fall kann nur für *einen* Wert von m vorkommen. In der Tat: wäre $\chi_1\cdot\chi_2^{m_1}\equiv\chi_1\cdot\chi_2^{m_2}\equiv 1$ $(m_1\neq m_2)$, so hätten wir $\chi_2^{m_1-m_2}\equiv 1$, und daraus würde sich $\chi_2 \equiv 1$ ergeben, denn andernfalls wäre χ_2 ein diskreter Charakter. Da müßte aber auch $\chi_1 \equiv 1$ gelten, entgegen der Voraussetzung. Also schließlich: für jedes hinreichend große m ist das Integral in (6) gleich 0. Damit ist der Beweis zu Ende.

III. DIE NULLKOMPONENTE ALS DIREKTER SUMMAND

Wir wollen voraussetzen, daß eine abgeschlossene Untergruppe A sich von der abelschen kompakten Gruppe G als ein direkter Summand trennt. Mithin ist G, algebraisch genommen, die direkte Summe der Gruppe A und eines Komplementärsummanden. Es fragt sich, ob man dann immer einen *abgeschlossenen* Komplementärsummanden B finden kann, so daß also $G = A \dotplus B$ eine sowohl algebraische, wie auch topologische Zerlegung von G in zwei kompakte Gruppen sei. Die Antwort ist: nein. Das Gegenbeispiel wird in manchen Fällen von der Komponente des Nullelements in G, d. h. von der größten zusammenhängenden Untergruppe von G (die *Nullkomponente*) geliefert. Um das zu zeigen, beweisen wir zuerst den in [12] auf S. 55 ausgesprochenen

Satz 9. *In jeder kompakten abelschen Gruppe G ist die Nullkomponente A ein direkter Summand.*

Beweis. A ist offenbar abgeschlossen. Daher ist es eine kompakte zusammenhängende Gruppe. Als solche ist sie vollständig (Satz 4). Nun, nach einem Satz von Baer ist eine vollständige Untergruppe immer ein direkter Summand (s. z. B. [13], S. 147).

Die topologische Gruppe G/A ist kompakt und nulldimensional ([14], S. 137). In der zu G dualen diskreten Gruppe G^* bilden die Elemente endlicher Ordnung eine Untergruppe T. Wir beweisen den bekannten ([14], S. 262)

Satz 10. *A ist dual zu G^*/T; G/A ist dual zu T.*

Da A kompakt und zusammenhängend ist, so ist die duale Gruppe A^* torsionsfrei (vgl. Abschnitt II). Zieht man (V) (s. Einleitung) in Betracht, so sieht man, daß A^* einer Gruppe G/T_1 isomorph ist, wo $T_1 \supset T$. In Wirklichkeit gilt $T_1 = T$, denn A besteht aus denjenigen Charakteren von G^*/T_1, die auf T_1 gleich 1 sind; wäre nun T_1 größer als T, so könnte A nicht die größte zusammenhängende Untergruppe von G sein. Die zweite Hälfte des Satzes folgt aus der ersten auf Grund von (V).

Es sei B ein Komplementärsummand zu A. In B gibt es zwei Topologien: die erste ist durch die ursprüngliche Topologie in G und die zweite durch den Isomorphismus $G/A \sim B$ induziert. Legt man in B die erste Topologie zugrunde, so ist dieser Isomorphismus von B zu G/A stetig (man beachte die Bestimmung der Umgebungen in Faktorgruppen und den Umstand, daß B aus Elementen besteht, die je einer Nebengruppe geeignet entnommen sind). Ist also B in G abgeschlossen, und daher kompakt, so ist

$$G/A \simeq B, \tag{1}$$

d. h. es besteht ein algebraischer und *topologischer* Isomorphismus zwischen den beiden Gruppen, und die beiden Topologien in B stimmen überein. Dann ist

$$G \simeq A \dotplus B. \tag{2}$$

Eine Gruppe, die zur direkten Summe zweier Gruppen dual ist, ist die direkte Summe der zu den Summanden dualen Gruppen ([14], S. 260), daher folgt aus (2), daß

$$G^* \sim A^* \dotplus B^*,$$

und wegen (1) nach Satz 10

$$G^* \sim G^*/T \dotplus T. \tag{3}$$

Nun, eine solche Zerlegung ist nicht immer möglich. Eine (abstrakte) abelsche Gruppe, in welcher die Elemente endlicher Ordnung einen direkten Summanden bilden, mag *spaltbar* heißen. Es gibt nicht-spaltbare Gruppen ([13], S. 186). Ist G^* eine solche, so ist die Nullkomponente A der Gruppe $G^{**} \simeq G$ nur ein algebraischer, nicht aber ein topologischer direkter Summand, d. h. es gibt keinen *abgeschlossenen* Komplementärsummanden zu A. Ist dagegen G^* spaltbar, gilt also (3), dann hat man (2) und G ist demnach in zwei kompakte Gruppen, die Nullkomponente und einen Komplementärsummanden zerlegbar. Somit haben wir den, ebenso bekannten ([12], S. 55),

Satz 11. *In einer kompakten abelschen Gruppe ist die Nullkomponente als ein algebraischer und topologischer Summand dann und nur dann trennbar, wenn die duale Gruppe spaltbar ist.*

Ist die Nullkomponente offen, so ist G/A endlich, also ist jeder Komplementärsummand abgeschlossen, und es gilt (2). Das ist ein einfacher Fall des allgemeineren Satzes:

Satz 12. *Ist G/A in zwei kompakte Gruppen zerlegbar, von denen eine torsionsfrei ist und die andere aus Elementen von gleichmäßig beschränkten Ordnungen besteht, so gilt* (2).

Beweis. Die zum torsionsfreien Summanden von G/A duale Gruppe ist vollständig und die zu dem zweiten Summanden duale ist wieder eine Gruppe mit beschränkten Ordnungen. In der Tat: das erste folgt aus Satz 16[2]) und das zweite erhält man, indem man bemerkt, daß mit $mx = 0$ $(x \epsilon G)$ auch $\chi^m(x) \equiv 1$ für jedes χ aus G^* gelten muß, daß also die Ordnungen in der dualen Gruppe ebenso beschränkt sind. Man weiß, daß eine hinreichende Bedingung dafür, daß die Gruppe spaltbar sei, die Zerlegbarkeit von T in einen vollständigen Summanden und einen Summanden mit beschränkten Ordnungen ist ([13], S. 186). Somit wird der Beweis durch Anwendung von Satz 10 und 11 zu Ende geführt.

Bemerkung. Ist G^* nicht spaltbar, so sind die kompakten Gruppen G und $A \dotplus G/A$ algebraisch isomorph, aber topologisch verschieden. Hier liegt also ein Beispiel dafür vor, daß eine und dieselbe abstrakte Gruppe zwei wesentlich verschiedene kompakte Topologien zulassen kann. Diese Erscheinung tritt übrigens schon bei den bekanntesten Gruppen auf (vgl. Abschnitt VI). Auf jeden Fall: läßt eine abelsche Gruppe überhaupt eine kompakte Topologie zu, so läßt sie auch eine derartige zu, bei welcher sich die Nullkomponente topologisch trennt.

IV. DISKRETE CHARAKTERE UND VOLLSTÄNDIKGEIT VON LOKAL-KOMPAKTEN GRUPPEN

Wir fragen, ob die Äquivalenz der Eigenschaften (α) bis (δ) (Abschnitt II) noch besteht, wenn man statt der Kompaktheit nur die lokale Kompaktheit der Gruppe voraussetzt. Die Antwort ist „nein", wir werden aber vor allem positive Aussagen finden.

SATZ 13. *Für lokal-kompakte abelsche Gruppen ist* (α) *mit* (γ) *äquivalent.*

Nur die Implikation (α) → (γ) braucht einen Beweis. Jede abelsche Gruppe, die von einer kompakten Umgebung des Nullelements erzeugt werden kann (sog. *Gruppen kompakter Herkunft*) ist als direkte Summe einer kompakten Gruppe, einer endlichen Anzahl von Vektorgruppen und einer endlichen Anzahl von diskreten zyklischen Gruppen darstellbar ([14], S. 274). Da G von jeder Umgebung des Nullelements generierbar ist, so scheidet das Auftreten eines diskreten Summanden aus, und G ist in eine kompakte und eine Vektorgruppe zerlegbar. Der kompakte Summand muß (α) erfüllen, er erfüllt also auch (γ) (Satz 4). Daher ist G als direkte Summe zweier zusammenhängender Gruppen selbst zusammenhängend.

SATZ 14. *Aus* (γ) *folgt* (δ).

[2]) Vgl. Abschnitt IV; diese Vorwegnahme ist gestattet, weil Satz 16 ganz unabhängig vom Abschnitt III bewiesen ist.

Eine zusammenhängende lokal-kompakte Gruppe ist als direkte Summe einer zusammenhängenden kompakten Gruppe und einer Vektorgruppe darstellbar (vgl. Beweis von Satz 13). Diese beiden sind vollständig (vgl. wieder Satz 4), also ist es G auch.

Die Äquivalenz besteht aber weder zwischen (β) und (γ) noch zwischen (γ) und (δ). Das Beispiel der Gruppe R der rationalen Zahlen mit Addition lehrt beides: sie ist vollständig, hat daher auch keine diskreten Charaktere, sie ist aber diskret und also nicht zusammenhängend. Schwieriger ist der Beweis von

SATZ 15 (H. Freudenthal). (δ) *folgt nicht aus* (β).

Hierzu gehört ein Beispiel, das den Verfassern von Herrn H. Freudenthal mitgeteilt worden ist[3]). Sei H die Gruppe der rationalen Zahlen mit Addition mod 1. Die Gruppe G bestehe aus allen Folgen $x = (x_1, x_2, \ldots)$ von Zahlen aus H, in denen fast alle Elemente (d. h. von einer gewissen Stelle ab) gleich 0 oder 1/2 sind. Die Gruppenoperation wird koordinatenweise ausgeführt. Die Umgebungen U_n des Nullelements sollen aus denjenigen Folgen bestehen, in denen $x_i = 0$ oder 1/2 für jedes i und $x_i = 0$ für $i \leqslant n$ ist. Demnach sind alle U_n kompakt, weil sie der „Cantorschen" Gruppe $Z_2^{\aleph_0}$, wo Z_2 die zyklische Gruppe von der Ordnung 2 bedeutet, isomorph sind. Daher ist G lokal-kompakt.

G ist nicht vollständig: die Division von x durch eine gerade Zahl ist nur dann (aber auch immer dann) ausführbar, wenn fast alle x_i gleich 0 sind. Die Menge aller dieser x heiße A. Für jedes n gilt offenbar

$$G = A + U_n. \tag{1}$$

Sei χ ein Charakter von G, der nur endlichviele, etwa m Werte annimmt. Dann ist

$$\chi(2mG) = \chi(A) = 1. \tag{2}$$

Es gibt eine Umgebung U_n, in welcher χ gleich 1 ist. Aus (1) und (2) folgt $\chi(G) = 1$, also ist χ der triviale Charakter.

Es sei bemerkt, daß der für kompakte Gruppen angegebene Beweis der Implikation (β) → (δ) nur deshalb für die lokal-kompakten versagt, weil dann kein Grund dafür besteht, die Menge nG als abgeschlossen zu betrachten. Obiges Beispiel lehrt, daß es tatsächlich nicht immer so ist. Offenbar ist es aber so in den diskreten Gruppen. Daher der

SATZ 16. *Eine nicht vollständige diskrete Gruppe hat immer einen diskreten Charakter.*

In dem Beispiel von Freudenthal sind die Mengen nG $(n = 1, 2, \ldots)$ von der Klasse F_σ. Das kann man für die separablen lokal-kompakten

[3]) Ein anderes Beispiel hat Herr W. T. van Est gegeben.

Gruppen allgemein behaupten, weil dann G eine Summe abzählbarvieler kompakter Mengen Z_i ist und die nZ_i abgeschlossen sind.

Das Beispiel von Herrn Freudenthal könnte den Eindruck erwecken, als ob das Vorhandensein vieler Elemente endlicher Ordnung für die Eigenschaft „(β) und nicht (δ)" verantwortlich wäre. Daß es dem nicht so ist, überzeugt man sich an Hand folgender Modifizierung dieses Beispiels, welche die Konstruktion einer torsionsfreien Gruppe mit derselben Eigenschaft bezweckt.

Sei Γ eine kompakte nicht zusammenhängende (und also nach Satz 4 nicht vollständige) separable torsionsfreie Gruppe. Als solche könnte man die zur Gruppe H aus dem vorigen Beispiel duale Gruppe H^* nehmen (daß sie die verlangten Eigenschaften hat, kann man leicht auf Grund der in dieser Arbeit vorgeführten Sätze beweisen, oder auch aus ihrer Beschaffenheit als „starke" direkte Summe der Gruppen der ganzen p-adischen Zahlen nach allen Primzahlen p folgern; vgl. dazu S. 179).

Eine torsionsfreie abelsche Gruppe kann in eine ebenso torsionsfreie vollständige Gruppe algebraisch eingebettet werden ([13], S. 191). Sei B eine solche Gruppe, die Γ umfaßt. Im weiteren wird B eine ähnliche Rolle spielen, wie H in dem Freudenthalschen Beispiel. Γ übernimmt dagegen die Rolle der dortigen Gruppe Z_2. Wir bilden G aus allen Folgen $x = (x_1, x_2, \ldots)$, in welchen alle x_i zu B und fast alle x_i zu Γ gehören. Die Gruppenoperation wird koordinatenweise aus B in G übertragen. Die Umgebungen des Nullelements in G werden folgendermaßen erklärt: ist O eine beliebige Umgebung des Nullelements in Γ, so besteht die durch sie bestimmte Umgebung des Nullelements in G aus denjenigen Folgen, in denen $x_i \in \Gamma$ $(i = 1, 2, \ldots)$ und $x_i \in O$ für $i \leqslant n$. Alle diese Umgebungen sind lokal-kompakt, weil sie den Umgebungen des Nullelements in der kompakten Gruppe $\Gamma^{\aleph_0}$ homöomorph sind. Also ist auch G lokal-kompakt.

G ist torsionsfrei, weil B es ist. G ist nicht vollständig. In der Tat: Γ ist nicht vollständig und folglich gibt es ein $a \in \Gamma$ und eine natürliche Zahl n derart, daß die Gleichung $ny = a$ in Γ unlösbar ist. Die Folge $a, a, \ldots$ stellt ein durch n nicht dividierbares Element von G dar, weil sonst die Quotienten a/n zu Γ gehören müßten. Wohl aber kann man ein $x \in G$ durch jedes n dividieren, sobald fast alle x_i gleich dem Nullelement in B sind. Die Menge aller dieser x heiße wieder A. Für jede Umgebung U des Nullelements in G gilt offenbar $G = A + U$. Endlich hat man nur die Schlußüberlegung aus dem vorigen Beispiel wörtlich zu wiederholen, um bewiesen zu haben, daß die Gruppe G keine diskreten Charaktere besitzt.

Da die Gruppe Γ separabel ist, so erfüllt sie umsomehr das erste Abzählbarkeitsaxiom, d. h. sie hat ein vollständiges abzählbares System von Umgebungen des Nullelements, und dasselbe trifft noch auf G zu, was man der Definition von Umgebungen in dieser Gruppe leicht entnimmt. Trotzdem ist G nicht separabel, weil es dort keine dichte Folge von Elementen gibt. Neuestens hat uns Herr J. Łoś ein Beispiel einer torsionsfreien lokal-kompakten und *separablen* abelschen Gruppe mitgeteilt, die (β) aber nicht (δ) erfüllt. Die von Freudenthal angegebene Gruppe G ist zwar separabel, aber nicht torsionsfrei.

Andererseits können diskrete Charaktere auch dann vorkommen, wenn nicht alle Mengen nG abgeschlossen sind.

Ein Beispiel dafür findet man bei Braconnier in [1], S. 11-12; es wurde zu einem anderen Zwecke konstruiert.

Leicht beweisbar ist der

SATZ 17. *Ist G lokal-kompakt und nicht vollständig, so hat es einen nicht-trivialen Charakter, der endlich- oder abzählbarviele Werte annimmt.*

In der Tat: Laut dem allgemeinen Zerlegungssatz gibt es eine abgeschlossene Gruppe $H \subset G$ derart, daß 1° G/H diskret ist, 2° H in zwei direkte Summanden, einen kompakten und einen einer Vektorgruppe isomorphen, zerfällt ([14], S. 269-278). Ist $G = H$, so hat der kompakte Summand von G wohl einen diskreten Charakter (Satz 4) und also die Gruppe G auch (man benutze die Dualität von direkten Summen, wie auf S. 171) Reduziert sich die Gruppe G/H nicht auf das Nullelement, so hat man nur zu beweisen, daß *diese* Gruppe die Behauptung erfüllt, weil jedem Charakter von G/H ein Charakter von G entspricht, der auf den Nebengruppen von H konstant ist und demnach keine neuen Werte annimmt. Nun, ist G/H vollständig, so hat sie einen abzählbaren direkten Summanden ([13], S. 149), daher auch einen Charakter mit verlangten Eigenschaften. Ist die Gruppe G/H nicht vollständig, so hat sie sogar einen diskreten Charakter (Satz 16).

V. DAS ALIQUOTENPROBLEM

Da die kompakten zusammenhängenden abelschen Gruppen vollständig sind, scheint die Frage interessant, ob für jedes $a \in G$ die Menge der aliquoten Teile a/n $(n = 1, 2, \ldots)$ sich im Nullpunkt häuft. Das würde bedeuten, daß jede Umgebung U des Nullpunktes nicht nur ein System von Erzeugenden für ganz G bildet, sondern durch bloßes Ausmultiplizieren ihrer Elemente mit $1, 2, 3, \ldots$ zur ganzen Gruppe G hinausschwillt: $G = U \cup 2U \cup 3U \cup \ldots$ Für torsionsfreie Gruppen kann man offenbar von einer wohlbestimmten Folge a/n sprechen und fragen, ob sie eine nach Null konvergente Teilfolge enthalten muß (wenigstens, wenn die Gruppe separabel ist). Wir geben eine bejahende Antwort auf diese Frage, fassen aber das Problem etwas allgemeiner auf.

Es sei G eine kompakte und nicht notwendig abelsche Gruppe. Es gilt der folgende

SATZ 18. *Ist für $a \epsilon G$ die Gleichung*

$$x^n = a \tag{1}$$

für jedes n lösbar, so ist für jede Umgebung U des Einselements ein n und ein $x_1 \epsilon U$ mit $x_1^n = a$ zu finden. Dabei kann n so gewählt werden, daß es eine Zahl m_0 nicht übertrifft, die nur von U, nicht also von a abhängt.

Da in einer abelschen kompakten und zusammenhängenden Gruppe die Gleichung (1) (mit der additiven Schreibweise) für jedes a und n lösbar ist, so wird sich aus diesem Satz sofort ergeben, daß die aliquoten Teile a/n sich für jedes a im Nullpunkt häufen und daß dabei in beliebiger Umgebung U dieses Punktes einer von ihnen zu finden ist, dessen Nenner unterhalb einer nur von U abhängigen Schranke liegt. Das ist also eine positive Antwort auf das zu Anfang dieses Abschnitts gestellte Problem, und zwar in verschärfter Form. Den Beweis von Satz 18 stüzzen wir auf folgendes

LEMMA. *Für jede Umgebung des Einselements gibt es eine ganze Zahl $m > 0$ derart, daß für jedes $b \epsilon G$ unter den Elementen $b, b^2, \ldots, b^m$ wenigstens eines zu U gehört.*

Unter einer *unitären Darstellung* einer kompakten Gruppe G versteht man bekanntlich einen stegigen Homomorphismus $D(x)$ von G in eine Gruppe von unitären Matrizen. Sei U eine Umgebung des Einselements. Wir wählen eine unitäre Darstellung $D(x)$ und ein $\varepsilon > 0$ so, daß aus

$$\|D(x) - E\| < \varepsilon \tag{2}$$

$x \epsilon U$ folgt, wobei $\|A\|$ die Norm der Matrix $A = (a_{ik})$, d. h. die Zahl $\sqrt{\sum_{i,k} |a_{ik}|^2}$ bedeutet. Daß eine solche Darstellung immer zu finden ist, folgt aus dem Peter-Weylschen Satze ([14], S. 230)[4]). Sei noch ein $b \epsilon G$ gewählt. Es gibt eine unitäre Matrix V, für welche $VD(b)V^{-1}$ die diagonale Form

$$\Delta = \begin{pmatrix} e^{i\lambda_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & e^{i\lambda_s} \end{pmatrix}$$

hat. Es gilt $D(b^\nu) = D^\nu(b) = V^{-1}\Delta^\nu V$, daher

$$\|D(b^\nu) - E\| = \|V^{-1}(\Delta^\nu - E)V\| = \|\Delta^\nu - E\|. \tag{3}$$

[4]) Vgl. Abschnitt I.

Da

$$\Delta^\nu = \begin{pmatrix} e^{i\lambda_1\nu} & & O \\ & \ddots & \\ O & & e^{i\lambda_s\nu} \end{pmatrix},$$

so schließt man aus (3), daß bei einem passend gewählten $\delta > 0$, das nicht von λ_j abhängt, die simultanen Ungleichungen

$$|e^{i\lambda_j\nu} - 1| < \delta \qquad (j = 1, \ldots, s) \tag{4}$$

(2) für $x = b^\nu$ zur Folge haben. Diese simultanen Ungleichungen können nach einem klassischen Approximationssatz für jedes System λ_j $(1 \leqslant j \leqslant s)$ durch ein ν befriedigt werden, welches eine nur von δ und s abhängige Zahl m nicht übersteigt. Für das gewählte b sind die λ_j wohlbestimmt. Man bildet mit ihnen die Ungleichungen (4) und löst sie mit einem $\nu_0 = \nu(b) \leqslant m$. Dann hat man $\|D(b^{\nu_0}) - E\| < \varepsilon$ und mithin $b^{\nu_0} \epsilon U$. Das Lemma ist bewiesen.

Satz 18 erhalten wir jetzt mühelos. Erfüllt a die Voraussetzung, so finde man nach dem Lemma eine dem vorgegebenen U angepaßte Zahl m und löse die Gleichung $x^{m!} = a$. Ist b eine Lösung, so wähle man ein $\nu_0 \leqslant m$ derart, daß $b^{\nu_0} \epsilon U$. Dann ist die Behauptung des Satzes durch das Element $x_1 = b^{\nu_0}$ mit $m_0 = m!$ und $n = m_0/\nu_0$ befriedigt.

Es bleibt folgendes Problem offen:

P 162. Ist in einer kompakten und zusammenhängenden aber nichtabelschen Gruppe die Gleichung $x^n = a$ für jedes a und n lösbar?

Wenn es dem so ist, so kann die Gruppe nach Satz 18 durch das Potenzieren je eines Elements einer beliebigen Umgebung des Einselements erzeugt werden.

Die positive Lösung des Aliquotenproblems im abelschen Fall erlaubt uns gewisse arithmetische Konsequenzen zu ziehen. Eine von ihnen erhält man, wenn man Satz 18 auf R^*, d. h. auf die zur Gruppe der rationalen Zahlen duale Gruppe anwendet. R^* ist kompakt und zusammenhängend, das letztere wegen Satz 4, da R torsionsfrei ist. Wir wollen die Charaktere von R etwas näher betrachten. Einen Charakter genügt es nur auf Erzeugenden zu definieren und dabei muß auf die Übereinstimmung geachtet werden. Als Erzeugende von R nehmen wir die Zahlen 1 und $1/p^m$, wo p alle Primzahlen und m alle natürlichen Zahlen durchläuft. Dann ist λ durch ein reelles τ $(0 \leqslant \tau < 1)$ und eine Doppelfolge von ganzen Zahlen $k_{p,i}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots;\ 0 \leqslant k_{p,i} < p)$ eindeutig bestimmt, namentlich

$$\chi(1) = \exp(2\pi i\tau), \tag{5}$$

$$\chi(1/p^m) = \exp\left(2\pi i/p^m(\tau + k_{p,0} + k_{p,1}\cdot p + \ldots + k_{p,m-1}\cdot p^{m-1})\right).$$

Wir beweisen

Satz 19. *Ist eine endliche Anzahl s von Doppelfolgen ganzer nichtnegativer Zahlen $k_{p,i}^{(j)} < p$ gegeben ($j = 1, \ldots, s$; p durchläuft die Primzahlfolge; $i = 0, 1, 2, \ldots$), so ist für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n = p_1^{m_1} \ldots p_t^{m_t}$ derart zu finden, daß*

$$\sum_{\nu=1}^{t} \frac{h_\nu}{p_\nu^{m_\nu}} (k_{p_\nu,0}^{(j)} + k_{p_\nu,1}^{(j)} \cdot p_\nu + \ldots + k_{p_\nu,m_\nu-1}^{(j)} \cdot p_\nu^{m_\nu-1}) \tag{6}$$

für $j = 1, \ldots, s$ weniger als um ε von einer ganzen Zahl abweicht, wobei

$$\sum_{\nu=1}^{t} \frac{h_\nu}{p_\nu^{m_\nu}} = \frac{1}{n}, \quad |h_\nu| < p_\nu^{m_\nu}, \quad h_\nu \text{ ganz}, \quad (h_\nu, p_\nu) = 1. \tag{7}$$

Beweis. Wir setzen die Gruppe G gleich der direkten Summe von s Exemplaren von R^*. Die Elemente von G werden wir demgemäß als Systeme $\chi_1, \ldots, \chi_s$ von Charakteren von R auffassen. Die Umgebung U welches Nullelements bestehe aus denjenigen Systemen, für welche

$$|\chi_j(1) - 1| < \eta \quad (j = 1, \ldots, s) \tag{8}$$

gilt. Als $a \in G$ nehmen wir ein beliebiges System $\chi_j^{(0)}$ ($j = 1, \ldots, s$) von Charakteren von R, die durch reelle τ_j und Doppelfolgen $k_{p,i}^{(j)}$ wie in (5) gegeben seien. G ist offenbar zusammenhängend, es folgt also aus Satz 18, daß für ein geeignetes $n = p_1^{m_1} \ldots p_t^{m_t}$ ein System $\chi_1, \ldots, \chi_s$ existiert, der die Bedingungen (8) und

$$\chi_j^n(r) = \chi_j^{(0)}(r) \quad \text{für jedes } r \in R \tag{9}$$

erfüllt. Insbesondere ist für alle j

$$\chi_j(1) = \exp\left(\frac{2\pi i}{n} (\tau_j + u_j)\right) \tag{10}$$

mit ganzen u_j ($0 \leqslant u_j < n$). Wird also χ_j gemäß (5) gekennzeichnet, so muß anstatt τ die Zahl $(\tau_j + u_j)/n$ auftreten. Die Doppelfolgen für diese χ_j bezeichnen wir mit $l_{p,i}^{(j)}$. Werden die Zahlen h_ν durch (7) definiert, so ist

$$\chi_j\left(\frac{1}{n}\right) = \exp\left(2\pi i \left[\frac{\tau_j + u_j}{n} + \sum_{\nu=1}^{t} \frac{h_\nu}{p_\nu^{m_\nu}} \left((l_{p_\nu,0}^{(j)} + l_{p_\nu,1}^{(j)} \cdot p_\nu + \ldots + l_{p_\nu,m_\nu-1}^{(j)} \cdot p_\nu^{m_\nu-1})\right)\right]\right).$$

Nach (9) muß

$$\chi_j^n\left(\frac{1}{n}\right) = \chi^{(0)}\left(\frac{1}{n}\right) \tag{11}$$

$$= \exp\left(2\pi i \left[\frac{\tau_j}{n} + \sum_{\nu=1}^{t} \frac{h_\nu}{p_\nu^{m_\nu}} (k_{p_\nu,0}^{(j)} + k_{p_\nu,1}^{(j)} \cdot p_\nu + \ldots + k_{p_\nu,m_\nu-1}^{(j)} \cdot p_\nu^{m_\nu-1})\right]\right)$$

für $j = 1, \ldots, s$ sein. Aus (10) folgt, daß

$$\chi_j^n\left(\frac{1}{n}\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{n} (\tau_j + u_j)\right)$$

ist, also von der Doppelfolge $l_{p,i}^{(j)}$ unabhängig. Der Vergleich mit (11) ergibt die Kongruenzen

$$\frac{u_j}{n} \equiv \sum_{\nu=1}^{t} \frac{h_\nu}{p_\nu^{m_\nu}} (k_{p_\nu,0}^{(j)} + k_{p_\nu,1}^{(j)} \cdot p_\nu + \ldots + k_{p_\nu,m_\nu-1}^{(j)} \cdot p_\nu^{m_\nu-1}) \pmod 1. \tag{12}$$

Sind nicht alle $\chi_j^{(0)}$ triviale Charaktere, so muß n bei unbeschränkter Verkleinerung der Umgebung U unbeschränkt wachsen, damit (8) und (9) gelten. Dann ist τ_j/n klein, und nach (10) und (8) kommt u_j/n nahe an eine ganze Zahl. Darum muß sich die rechte Seite von (12), der Ausdruck (6) also, bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ durch geeignete Wahl von n für jedes j zu einer Zahl machen lassen, die weniger als um ε von einer ganzen Zahl abweicht. Das ist aber die Behauptung von Satz 19.

Eine andere arithmetische Konsequenz aus Satz 19 erhält man, indem man ihn die auf Gruppe $Z_{p^\infty}^*$ anwendet, wo Z_{p^∞} die quasi-zyklische p-Gruppe bedeutet, d. h. diejenige, die aus allen Einheitswurzeln vom Grade p^t ($t = 0, 1, 2, \ldots$) mit der festen Primzahl p gebildet ist. Die Charaktere von $Z_{p^\infty}^*$, also die Elemente von $Z_{p^\infty}^*$ sind leicht zu ermitteln; $Z_{p^\infty}^*$ erweist sich dabei als isomorph der Gruppe der ganzen p-adischen Zahlen. Das Ergebnis lautet:

Sind $m_t^{(j)}$ ($t = 0, 1, 2, \ldots$; $j = 1, \ldots, s$) Folgen von ganzen Zahlen mit $0 \leqslant m_t^{(j)} < p^t$, $m_{t+1}^{(j)} \equiv m_t^{(j)} \pmod{p^t}$, so ist für jedes $\varepsilon > 0$, jedes t und jedes System ganzer Zahlen k_j mit $0 \leqslant k_j < p^t$ solch ein natürliches ν und solche ganzen l_j ($0 \leqslant l_j < p^\nu$) zu finden, daß sämtliche Zahlen

$$\frac{1}{p^{t+\nu}} (k_j + l_j p^t) m_{t+\nu}^{(j)} \quad (j = 1, \ldots, s)$$

weniger als um ε von einer ganzen Zahl abweichen.

Diesen Satz hat auch auf direktem Wege Herr A. Schinzel bewiesen.

Anstatt von a/n kann man in einer kompakten und zusammenhängenden abelschen Gruppe auch ausgewählte aliquote Teile $a/2^n$ untersuchen und fragen, ob sie sich ebenso im Nullpunkt häufen müssen. Die Antwort ist negativ und wird von der Gruppe R^* geliefert. Es gilt nämlich der

Satz 20. *In der Gruppe R^* existiert eine Umgebung U des Nullelements und ein Element a derart, daß $a/2^n$ für jedes natürliche n außerhalb U liegt.*

Beweis. U soll aus den Charakteren χ von R bestehen, für welche $|\chi(1)-1| < \sqrt{2}$ gilt. Als a nehmen wir den Charakter χ_0 mit

$$\tau = \frac{1}{2}, \quad k_{2,i} = \begin{cases} 0 & \text{für gerade } i, \ k_{p,i} = 0 \text{ für } p > 2, \\ 1 & \text{für ungerade } i, \ i = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{13}$$

Die Rolle von $a/2^m$ übernimmt also der Charakter χ, für welchen identisch

$$\chi^{2^m}(r) = \chi_0(r) \qquad (r \in R) \tag{14}$$

gilt (ein solcher Charakter existiert und ist eindeutig bestimmt, weil R^* vollständig und torsionsfrei ist). Da nach (13) und (14) $\chi^{2^m}(1) = e^{\pi i} = -1$ ist, so muß

$$\chi(1) = \exp\left(\frac{2\pi i}{2^m}\left(\frac{1}{2}+u\right)\right) \qquad (u \text{ ganz}, \ 0 \leqslant u < 2^m) \tag{15}$$

sein. Wollen wir also χ nach der allgemeinen Art (5) bestimmen, so muß anstatt τ die Zahl $(\frac{1}{2}+u)/2^m$ gesetzt werden. Die zur Definition gehörende Doppelfolge bezeichnen wir für dieses χ mit $l_{p,i}$. Dann ist für ein natürliches m

$$\chi\left(\frac{1}{2^m}\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{2^m}\left(\frac{\frac{1}{2}+u}{2^m} + l_{2,0} + l_{2,1}\cdot 2 + \ldots + l_{2,m-1}\cdot 2^{m-1}\right)\right).$$

Nach (13)-(15) hat man für ein gerades m

$$\chi^{2^m}\left(\frac{1}{2^m}\right) = \exp\left(2\pi i\,\frac{\frac{1}{2}+u}{2^m}\right) = \chi_0\left(\frac{1}{2^m}\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{2^m}\left(\frac{1}{2}+2+8+\ldots+2^{m-1}\right)\right),$$

also

$$\frac{u}{2^m} \equiv \frac{2+8+\ldots+2^{m-1}}{2^m} \,(\mathrm{mod}\,1) \qquad \text{oder} \qquad \frac{u}{2^m} \equiv \frac{2}{3\cdot 2^m}(4^{m/2}-1)\,(\mathrm{mod}\,1).$$

Es gilt daher nach (15)

$$\chi(1) = \exp\left(2\pi i\left[\frac{1}{2^{m+1}} + \frac{2}{3\cdot 2^m}(4^{m/2}-1)\right]\right).$$

Sollte $\chi \in U$ sein, so müßte der in eckigen Klammern stehende Ausdruck mod 1 entweder kleiner als $1/4$ oder größer als $3/4$ sein, das ist aber niemals der Fall. Bei ungeradem m verläuft die Überlegung völlig analog.

Obiges Beispiel betrifft eine singuläre Erscheinung, weil in einer kompakten zusammenhängenden und separablen Gruppe G die aliquoten Teile $a/2^n$ sich „in der Regel" nicht nur im Nullpunkt häufen, sondern auch in ganz G dicht liegen. Bedeutet μ das Haarsche Maß in G, so gilt nämlich der

Satz 21. *Für μ-fast jedes $a \in G$ ist die Vereinigungsmenge V_a der Lösungen aller Gleichungen $2^n x = a$ $(n = 1, 2, \ldots)$ in G dicht.*

Beweis. Die Transformation $Tx = 2x$ ist in jeder kompakten zusammenhängenden abelschen Gruppe maßtreu, d. h. für jede Borelsche Menge $Z \subset G$ gilt [15]

$$\mu(T^{-1}(Z)) = \mu(Z). \tag{16}$$

Ist nun $\{U_i\}$ eine abzählbare Basis aus offenen Mengen in G, so setzen wir

$$M_i = \bigcup_{n=0}^{\infty} 2^n U_i. \tag{17}$$

Man hat

$$2M_i \subset M_i. \tag{18}$$

In der Tat: ist $x = 2y$ für ein $y \in M_i$, so ist für ein bestimmtes n $y \in 2^n U_i$ und daher $x \in 2^{n+1} U_i \supset M_i$. Aus (18) und (16) folgt

$$\mu(T^{-1}(M_i) \setminus M_i) = 0,$$

die Mengen M_i sind also fast invariant (vgl. S. 162) gegenüber der Transformation T. Da diese unzerlegbar ist (Satz 8), erhält man $\mu(M_i) = 1$ und daher

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i\right) = 1. \tag{19}$$

Auf Grund von (17) bedeutet $a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$, daß für jedes i und ein geeignetes $n = n_i$ eine Lösung der Gleichung $2^{n_i} x = a$ zu U_i gehört. Deshalb liegt V_a dicht in G. Mithin ist (19) mit unserer Behauptung äquivalent.

Aus dem Satz 21 folgt trivialerweise, daß in einer seinen Voraussetzungen genügenden Gruppe die aliquoten Teile a/n für fast jedes a eine dichte Menge bilden. Nun liegt die Frage nahe, ob das für *jedes* a gilt. Die negative Antwort wird auch hier von der Gruppe R^* geliefert. Unter ihren Elementen treten nämlich auch solche Charaktere von R auf, welche von der Form $e^{i\lambda r}$ (λ reell, fest; $r \in R$) sind. Die aliquoten Teile eines derartigen Elements von R^* haben die evidente Struktur $e^{i\lambda r/n} \cdot (n = 1, 2, \ldots)$.

Sie bilden demnach eine nach dem trivialen Charakter von R, also nach dem Nullelement von R^* strebende Folge.

Beim Kreis und beim Torus beliebiger Dimension liegt die Lösung des Aliquotenproblems auf der Hand: diese Gruppen haben die Eigenschaft

(W) für eine beliebige offene Menge U und für jedes $a \neq 0$ gehört bei jedem hinreichend großen n ein geeignet gewählter Quotient a/n zu U.

So ist es deswegen für jede zusammenhängende und lokal-zusammenhängende kompakte und separable Gruppe (denn eine solche Gruppe ist stets einem Torus isomorph ([14], S. 267)). Daß es ohne den lokalen Zusammenhang nicht immer der Fall ist, sieht man an torsionslosen Gruppen, wo es keine Wahl von Quotienten gibt und (W) unsinnig wird. Selbst wenn wir die Bedingung (W) abschwächen, indem wir statt beliebiger offener Mengen nur Umgebungen des Nullelements als U zulassen, wird sie für torsionsfreie Gruppen noch versagen; sonst müßte die Folge a/n für jedes x schlechthin nach dem Nullelement konvergieren, und das widerspricht dem Satz 20.

VI. DIE PHANTOMTOPOLOGIE AUF DER REELLEN ACHSE

In diesem Abschnitt wenden wir uns einer kompakten Topologie in der Gruppe L der reellen Zahlen zu. Wir werden die Existenz solcher Topologien nachweisen und daraus Schlüsse ziehen, die den etwas befremdenden Titel des Abschnitts vielleicht rechtfertigen.

Satz 22. *In die Gruppe L kann man eine Topologie einführen, die sie zur kompakten zusammenhängenden und separablen Gruppe macht*[5]).

Das „man kann" soll hier als bloße Existenz-Aussage gedeutet werden.

Beweis. L ist bekanntlich eine direkte Summe von $2^{\aleph_0}$ Gruppen, die der Gruppe R isomorph sind. So ist auch R^*. In der Tat: es ist eine vollständige torsionsfreie Gruppe und daher eine direkte Summe von Gruppen vom Typus R ([13], S. 149). Deren ist $2^{\aleph_0}$, denn so ist die Mächtigkeit von R^*. Deshalb sind die Gruppen L und R^* algebraisch isomorph. Dieser Isomorphismus induziert eine kompakte Topologie in L; dabei wird L zusammenhängend und separabel, weil R^* diese beiden Eigenschaften hat.

[5]) *Zusatz bei der Korrektur.* Diesen Satz hat als erster P. R. Halmos entdeckt (in [7]), was wir beim Herstellen des Manuskripts übersahen. Gelegentlich sei bemerkt, daß in [7] eine zu starke Behauptung benutzt wird, daß nämlich eine lokal-kompakte abelsche Gruppe *dann* und nur dann vollständig ist, wenn sie keinen diskreten Charakter hat, was aber zum Satz 15 im Widerspruch steht.

Die Nicht-Effektivität in obigem Beweise ist sehr hoch, denn sie steckt sowohl in der Darstellung der Gruppen L und R^* als direkte Summen, wie auch in der Auswahl eines Isomorphismus zwischen ihnen. Wir wollen bemerken, daß unsere „kompakte Gerade" auch eine Kompaktifizierung der gewöhnlichen Geraden darstellt; genauer: *bei der aus R^* in L induzierten Topologie enthält L ein stetiges isomorphes Bild der gewöhnlichen Geraden als eine dichte Untergruppe.*

Offenbar genügt es zu wissen, daß R^* ein solches Bild der Geraden als eine dichte Untergruppe enthält. Unter den Charakteren von R gibt es solche, die zu (stetigen) Charakteren der üblicherweise topologisierten Gruppe L erweitert werden können. Sie sind von der Form $e^{i\lambda r}$ (λ reell, fest; $r \in R$). Fassen wir die Funktion $e^{i\lambda\cdot}$ als Element von R^* auf, so wird durch $\lambda \to e^{i\lambda\cdot}$ ein Isomorphismus zwischen der Geraden und einer Untergruppe von R^* erklärt. Daß er stetig ist, folgt daraus, daß bei gegebenen $r_1, \ldots, r_n \in R$ und $\varepsilon > 0$ für hinreichend kleine λ die Ungleichungen $|e^{i\lambda r_j} - 1| < \varepsilon$ $(j = 1, \ldots, n)$ gelten. Es bleibt zu zeigen, daß die Elemente $e^{i\lambda\cdot}$ in R^* dicht liegen. Es seien $\chi_0 \in R^*$ und eine Umgebung von χ_0 gegeben, die aus denjenigen χ besteht, für welche $|\chi(r_j) - \chi_0(r_j)| < \varepsilon$ $(j = 1, \ldots, n)$ ist.

Sei $\chi_0(r_j) = e^{i\alpha_j}$. Wir müssen die Existenz einer Zahl λ nachweisen, die $|e^{i\lambda r_j} - e^{i\alpha_j}| < \varepsilon$ $(j = 1, \ldots, n)$ erfüllt. Ist $a_1 r_1 + \ldots + a_n r_n = 0$ (a_j ganz), so ist $a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n \equiv 0 \pmod{2\pi}$, denn man hat

$$1 = \chi_0(a_1 r_1 + \ldots + a_n r_n) = \prod_{j=1}^{n} [\chi_0(r_j)]^{a_j} = e^{i(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n)}.$$

Das verlangte λ existiert also auf Grund des Kroneckerschen Approximationssatzes.

Jede kompakte Topologie in L nennen wir eine *Phantomtopologie.* Aus Satz 22 folgt, daß in L ein endliches invariantes σ-additives Maß (ein Phantommaß) μ existiert, das auf einem σ-Mengenkörper definiert ist, nämlich das Haarsche Maß auf dem Körper der Borelschen Mengen in der Phantomtopologie. Jede beschränkte Menge reeller Zahlen hat das innere Maß μ gleich Null; das folgt aus der Endlichkeit und Invarianz von μ. Jedes endliche Intervall der reellen Achse ist μ-nicht-meßbar, weil sein äußeres Maß μ positiv ist.

Nach einem Satz von Kakutani ([5], S. 14) ist jede lokal-kompakte Gruppe mit dem ersten Abzählbarkeitsaxiom invariant metrisierbar; ist die Gruppe kompakt, so bleibt die Entfernung zweier Punkte unterhalb einer gewissen Schranke. Nach Satz 22 existiert also eine solche Metrik in der Gruppe der reellen Zahlen. Durch sie wird die Phantomtopologie erzeugt.

Noch merkwürdigere Schlüsse erhält man aus Satz 22 unter Berücksichtigung des Abschnitts II (S. 166). Ist d ein Element von L, das eine in der Phantomtopologie dichte Untergruppe erzeugt (fast jedes Element hat diese Eigenschaft!) so muß, da die Gruppe metrisch ist, die Folge nd $(n = 1, 2, \ldots)$ eine nach einem beliebig vorgegebenen Element konvergente Teilfolge enthalten. Die Summe zweier konvergenter Teilfolgen strebt nach der Summe ihrer Grenzwerte, weil die Addition stetig ist. Wem die Phantomtopologie allzu schemenhaft vorkommt, der kann diesem Resultat einen Wortlaut geben, in welchem sie nicht zum Vorschein gelangt:

Satz 23. *Es gibt eine Klasse C von Folgen natürlicher Zahlen und ein auf dieser Klasse bestimmtes Funktional*

$$\text{(1)} \qquad {}^{*}\lim_{i} n_i = a$$

mit folgenden Eigenschaften: 1° *für jede reelle Zahl a existiert eine Folge n_i, die* (1) *erfüllt*; 2° *wenn* (1) *gilt, dann ist*

$${}^{*}\lim_{i} n_{k_i} = a$$

für jede Teilfolge von n_i; 3° *gilt* (1) *nicht, so gibt es eine derartige Teilfolge von n_i, daß keine ihrer Teilfolgen die Zahl a zu* $^{*}\lim$ *hat*; 4° *für*

$${}^{*}\lim_{i} n_i = a \quad \textit{und} \quad {}^{*}\lim_{i} m_i = \beta$$

hat man

$${}^{*}\lim_{i} (m_i \pm n_i) = a \pm \beta;$$

5° *jede Folge natürlicher Zahlen enthält eine zu C gehörende Teilfolge.*

Es scheint hoffnungslos phantomkonvergente Folgen effektiv anzugeben; nur sehr schwache Aussagen in dieser Richtung lassen sich in Einzelfällen herausbekommen, z. B.: die Folge 2^n ist entweder divergent oder nach Null konvergent. In der Tat: ist

$${}^{*}\lim_{n} 2^n = a,$$

so ist

$${}^{*}\lim_{n} 2^{n+1} = 2a,$$

also $2a = a$, weswegen $a = 0$.

Welches sind die reellen stetigen Funktionen in der Phantomtopologie? Die Antwort hängt wesentlich davon ab, ob man die reelle Achse, aus der die Funktion ihre Werte schöpft, auch phantomartig oder üblicherweise topologisiert. Im ersten Fall ist z. B. die Funktion $y = rx$ mit rationalem r stetig, weil die Multiplikation mit einer ganzen Zahl phantomstetig ist, und so auch die Division, als die eindeutig bestimmte Reziproke. Im zweiten Fall ist dieselbe Funktion unstetig, ja nicht einmal meßbar, denn das ist die Eigenschaft jeder monotonen Funktion: die Urbildmengen von Intervallen sind dann Intervalle, also nicht phantom-meßbare Mengen.

Die Multiplikation mit einer *reellen* Zahl ist von der Phantomtopologie aus in dieselbe hinein im allgemeinen unstetig (leider, sonst wäre diese Topologie vorteilhafter, als die übliche!). Das geht daraus hervor, daß andernfalls die kompakt gemachte reelle Achse nicht nur eine kompakte Gruppe, sondern auch einen kompakten Körper bilden würde. Nun weiß man, daß es keine zusammenhängenden kompakten Körper gibt, weil ein zusammenhängender lokal-kompakter Körper entweder dem gewöhnlichen Körper der reellen Zahlen oder dem Körper der komplexen Zahlen oder dem Quaternionenschiefkörper isomorph ist ([14], S. 175).

Daß der Phantomtopologie eine prinzipielle Nicht-Effektivität anhaftet, folgt aus dem

Satz 24. *Bei jeder kompakten Topologie in der Gruppe der reellen Zahlen existiert eine offene Menge, die nicht Lebesgue-meßbar ist.*

Wir zeigen mehr: kein nicht-trivialer phantom-stetiger Charakter ist L-meßbar. Sonst müßte er die Form $e^{i\lambda x}$ $(\lambda \neq 0)$ haben. Die Menge $\{x\colon \chi(x) = 1\}$ würde eine phantom-abgeschlossene und mithin eine phantom-kompakte Gruppe bilden. Nun, sie ist abzählbar und man weiß, und kann es leicht beweisen, daß es keine abzählbaren kompakten Gruppen gibt.

Durch Benutzung der Phantomgeraden kann man in manchen Fällen eine außergewöhnliche kompakte Topologie in bekannten kompakten Gruppen einführen (vgl. dazu auch Endbemerkung im Abschnitt III). Man hat z. B. den

Satz 25. *Die Gruppe K der reellen Zahlen mit Addition* mod 1 *läßt sich kompaktweise und mehrdimensional topologisieren.*

Beweis. Man beweist mühelos, daß folgender algebraischer Isomorphismus gilt:

$$\text{(2)} \qquad K \sim K_T \dotplus L,$$

wo K_T die aus den Elementen endlicher Ordnung bestehende Untergruppe von K und L die additive Gruppe der reellen Zahlen bedeutet. Auch

$$\text{(3)} \qquad L \sim L \dotplus L$$

ist leicht (durch Zerlegung von L) zu erhalten. Aus (2) und (3) folgt $K \sim K \dotplus L$.

Wird hier L phantomartig und K auf der rechten Seite üblicherweise, d. h. als Kreidsdrehungsgruppe, topologisiert, so bekommen wir linkerseits eine mehrdimensionale (namentlich 2-dimensionale, was man leicht beweisen kann) Topologie in K.

Obiger Beweis ist nicht effektiv, schon deshalb nicht, weil die Phantomgerade verwendet wurde. Eine ähnliche Nicht-Effektivität scheint bei jeder Umtopologisierung kompakter Gruppen vorkommen zu müssen, weil man, wie im Beweis von Satz 24, zu Charakteren gelangt, die in einer Topologie stetig und in der anderen nicht-meßbar (in bezug auf das entsprechende Haarsche Maß) sind.

VII. TORSIONSFREIE FASTPERIODISCHE FUNKTIONEN

Eine abelsche lokal-kompakte Gruppe G kann in einen Torus K^n eingebettet werden. Das ist auf Grund der Dualitätstheorie sehr einfach: sind χ_α, wo α eine Menge A_0 von Indizes durchläuft, alle Charaktere von G, so ist

$$(1) \qquad \varphi(x) = \{\chi_\alpha(x)\} \qquad (\alpha \in A_0)$$

eine Abbildung von G in K^{A_0}, die offenbar stetig ist, aber auch algebraisch isomorph, weil aus (IV) (Einleitung) die Eineindeutigkeit folgt. Setzt man $H = \overline{\varphi(G)}$, so ist H eine abgeschlossene Untergruppe von K^{A_0} und kann als eine Kompaktifizierung von G betrachtet werden. Ist G kompakt, so ist $H = \varphi(G)$ und φ ein Homöomorphismus.

Wir wählen nun aus A_0 eine Untermenge A. Lassen wir α in (1) nur diese Untermenge durchlaufen, so mag die so entstehende Abbildung φ_A heißen. Dann setze man $\varphi_A(G) = H_A$. Die Charaktere $\chi_\alpha (\alpha \in A)$ erzeugen eine Gruppe Λ_A, die wir als diskret ansehen wollen.

Satz 26. *Es gilt* $H_A \simeq \Lambda_A^*$.

Beweis. Ist $\chi \in \Lambda_A$, so ist

$$(2) \qquad \chi = \chi_{\alpha_1}^{k_1}\dots\chi_{\alpha_s}^{k_s} \qquad (k_j \text{ ganz}, \ \alpha_j \in A).$$

Die Charaktere von K^A sind von der Form

$$(3) \qquad \omega(z) = z_{\beta_1}^{l_1}\dots z_{\beta_t}^{l_t} \qquad (l_j \text{ ganz}, \ \beta_j \in A),$$

wo z_{β_j} die „Koordinaten" des Punktes $z = \{z_\alpha\}_{\alpha \in A} \in K^A$ sind. Da jeder Charakter einer abgeschlossenen Untergruppe zum Charakter der ganzen Gruppe erweitert werden kann, so haben die Charaktere von H_A auch die Gestalt (3), bloß daß der Punkt z zu H_A gehören muß.

Nun bestimmen wir die homomorphe Abbildung ψ von Λ_A in H_A^*, indem wir jedes $\chi \in \Lambda_A$ in der Form (2) schreiben und ihm als $\psi(\chi)$ ein $\omega \in H_A^*$ mit $\beta_j = \alpha_j$ und $l_j = k_j$ zuordnen. Da $s \geqslant 1$, $\alpha_j \in A$ und k_j beliebig sein können, so sind dabei die Elemente von H_A^* erschöpft. Man muß zeigen, daß ψ durch unsere Definition wirklich eindeutig bestimmt wurde, d. h. aus

$$(4) \qquad \chi_{\alpha_1}^{k_1}\dots\chi_{\alpha_s}^{k_s} \equiv 1$$

die Identität

$$(5) \qquad z_{\alpha_1}^{k_1}\dots z_{\alpha_s}^{k_s} \equiv 1 \qquad (z \in H)$$

folgt, und daß ψ ein Isomorphismus ist, d. h. aus (5) die Identität (4) folgt.

Das erste ergibt sich daraus, daß (4) wegen (1) und (2) die Identität (5) auf $\varphi_A(G)$ zur Folge hat und $\varphi_A(G)$ in H_A dicht ist. Das zweite erhält man analog: gilt (4) nicht, so ist die linke Seite von (5) bereits auf $\varphi(G)$ nicht identisch 1.

Somit haben wir einen Isomorphismus von Λ_A und H_A^* festgestellt. Dann sind aber die dualen Gruppen Λ_A^* und H_A auch isomorph (im algebraischen und topologischen Sinne), und Satz 26 ist bewiesen.

Nehmen wir nun als G die reelle Gerade L an. Es sei $f(x)$ eine fastperiodische Funktion von Bohr und λ_n ihre Fourierexponenten: $f(x) \sim \sum a_n e^{i\lambda_n x}$. Die Menge aller λ_n heiße A. Man weiß, daß die Gruppe der verschobenen Funktionen $\varphi_s(x) = f(x+s)$ zur kompakten Gruppe Γ wird, wenn man sie nach der Norm

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |\varphi(x)|$$

vervollständigt. Sei Λ die von A erzeugte Untergruppe in L. Wird mittels der Charaktere $e^{i\lambda_n x}$ die Gruppe H_A wie im Satz 26 gebildet, so sind Γ und H_A isomorph ([9]). Mithin sind diesem Satz zufolge auch Γ und Λ^* isomorph.

Ist nun Λ eine vollständige Gruppe (was z. B. dann vorkommt, wenn man für λ_n genau alle rationalen Zahlen wählt), so ist Λ^* torsionsfrei, und auch umgekehrt (vgl. Satz 16). Dann ist auch Γ torsionsfrei, und wir nennen f eine *torsionsfreie fast-periodische Funktion*. Solche Funktionen weisen eine interessante Eigenschaft auf, die wir in folgendem Satz zum Ausdruck bringen:

Satz 27. *Strebt für eine torsionsfreie fastperiodische Funktion* $f(x)$ *die Folge* $\varphi_{\tau_n}(x) = f(x+\tau_n)$ *gleichmäßig nach* $f(x)$, *so ist auch für jedes ganze und feste* k *die Folge* $\varphi_{\tau_n/k}$ *gleichmäßig nach* f *konvergent.*

Beweis. Wäre die Behauptung falsch, so würde die Folge $\varphi_{\tau_n/k}$ eine Teilfolge enthalten, die gleichmäßig nach einer Funktion $g(x) \neq f(x)$ strebt. Diese Funktion, als ein Gruppenelement in Γ betrachtet und in diesem Sinne mit k multipliziert, würde die nicht verschobene Funktion

$\varphi_0(x) = f(x)$, also das Nullelement der Gruppe Γ ergeben. Mithin würde g ein Element k-ter Ordnung darstellen, im Widerspruch damit, daß Γ torsionsfrei ist.

ZITIERTE LITERATUR

[1] J. Braconnier, *Sur les groupes topologiques localement compacts*, Journ. de Math. Pures et Appl. 27 (1948), S. 1-85.

[2] D. van Dantzig, *Über topologisch-homogene Kontinua*, Fund. Math. 15 (1930), S. 102-125.

[3] B. Eckmann, *Über monothetische Gruppen*, Comm. Math. Helv. 16 (1943), S. 249-263.

[4] B. Gelbaum, G. K. Kalisch and J. M. H. Olmsted, *On the embedding of topological semigroups and integral domains*, Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), S. 807-821.

[5] М. И. Граев, *Теория топологических групп I*, Успехи Мат. Наук 5 (1950), S. 3-56.

[6] P. R. Halmos, *Measure Theory*, New York 1950.

[7] — *Comment on the real line*, Bull. Amer. Math. Soc. 50 (1944), S. 877-878.

[8] — and H. Samelson, *On monothetic groups*, Proc. Nat. Ac. Sci. USA 28 (1942), S. 254-258.

[9] S. Hartman, *Über die Verteilung der Fastperioden von fastperiodischen Funktionen auf Gruppen*, Stud. Math. 15 (1955), S. 56-61.

[10] — E. Marczewski et C. Ryll-Nardzewski, *Théorèmes ergodiques et leurs applications*, Coll. Math. 2 (1951), S. 109-123.

[11] E. v. Kampen, *Locally bicompact Abelian groups*, Ann. of Math. 36 (1935), S. 436-448.

[12] J. Kaplansky, *Infinite Abelian groups*, Ann Arbor 1954.

[13] А. Г. Курош, *Теория групп*, Москва 1953 (zweite Ausgabe).

[14] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, Москва 1954 (zweite Ausgabe).

[15] A. Shields, *Sur la mesure d'une somme vectorielle*, Fund. Math. 42 (1955), S. 57-60.

[16] H. Weyl, *Über die Verteilung von Zahlen mod Eins*, Math. Ann. 77 (1916), S. 313-352.

MATHEMATISCHES INSTITUT DER POLNISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

SUR UNE PROPRIÉTÉ D'UNE CLASSE DE MESURES ABSTRAITES

PAR

J. POPRUŻENKO (ŁÓDŹ)

Soit $\mathfrak{n}$ un nombre cardinal indénombrable. Désignons par $I(\mathfrak{n})$ l'hypothèse suivante:

$I(\mathfrak{n})$ *Il n'existe aucun aleph inaccessible* [1]) $\leqslant \mathfrak{n}$.

S. Ulam ([5], p. 223) a démontré que si l'hypothèse $I(2^{\aleph_0})$ est vraie, tout ensemble de mesure extérieure (lebesguienne) positive contient une infinité non dénombrable de sous-ensembles disjoints de mesure extérieure positive.

W. Sierpiński ([2], p. 125) en a déduit le théorème suivant:

Si l'hypothèse $I(2^{\aleph_0})$ est vraie, tout ensemble linéaire indénombrable E contient une infinité non dénombrable d'ensembles disjoints, dont chacun a une mesure extérieure (lebesguienne) égale à celle de l'ensemble E.

Le but de la présente note est de généraliser ce théorème: je vais démontrer que *tout* ensemble indénombrable jouit d'une pareille propriété relativement à une vaste classe de mesures abstraites.

Soient E un ensemble de puissance $\mathfrak{n}$, $\varphi(X)$ une mesure extérieure définie sur E, disparaissant ponctuellement et telle que $\varphi(E_1) < +\infty$ pour un certain sous-ensemble E_1 de E de puissance $\mathfrak{n}$. On sait qu'une telle fonction d'ensemble définit, à l'aide de l'équation bien connue de Carathéodory, le σ-corps d'ensembles mesurables φ, sur lequel elle est σ-additive, et que tout ensemble de mesure extérieure 0 est mesurable φ (voir p. ex. [1], p. 424-430).

Désignons par $\mathfrak{m}_\varphi$ le premier aleph tel qu'il existe une famille de puissance $\mathfrak{m}_\varphi$ d'ensembles de mesure $\varphi = 0$, dont la somme est un ensemble de mesure extérieure $\varphi > 0$. On voit que $\mathfrak{m}_\varphi$ est un aleph régulier satisfaisant, dans les conditions posées, à l'inégalité $\aleph_1 \leqslant \mathfrak{m}_\varphi \leqslant \mathfrak{n}$.

---

[1]) Un aleph $\aleph_\alpha$ est dit *inaccessible* s'il est régulier (c'est-à-dire, s'il n'est pas la somme de moins de $\aleph_\alpha$ nombres cardinaux, dont chacun est $<\aleph_\alpha$), et si son indice α est un nombre ordinal de 2ème espèce.