

The logarithm of the likelihood function of this matrix is, according to the multinomial law,

$$(8.5) \quad \log L = \log(N!) - \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s (m_{ij}!) - \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s m_{ij} \log p_{ij}.$$

The estimators \hat{p}_{ij} are found by putting

$$(8.6) \quad \frac{\partial \log L}{\partial p_{ij}} = 0$$

subject to the side relations (8.2). Introducing the Lagrange multipliers l_1, l_2, \dots, l_s , we arrive at the equations

$$(8.7) \quad m_{ij} = l_j p_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, s).$$

Summing over j and taking into account (8.3) as well as (8.2), we find

$$l_i = n_i \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

and, consequently,

$$(8.8) \quad \hat{p}_{ij} = \frac{m_{ij}}{n_i} \quad (i, j = 1, 2, \dots, s).$$

The estimator of the probability of transition from state i to state j is the relative frequency of changes issuing in state j among all changes starting from state i . This result was first obtained by V. I. Romanovskij³⁾

The expectation and the sampling variance of \hat{p}_{ij} are, respectively,

$$(8.9) \quad E\hat{p}_{ij} = p_{ij} \quad \text{and} \quad V\hat{p}_{ij} = \frac{1}{n_i} p_{ij}(1-p_{ij}).$$

The estimator \hat{p}_{ij} is thus unbiased and consistent.

The observation matrix (8.4) being given, we can by virtue of (8.8) estimate the transition matrix (8.1). By means of the χ^2 criterion the hypothesis can be tested that an observation matrix (8.4) is the result of the realization of a simple Markov chain with some theoretical transition matrix (8.1). In this case

$$(8.10) \quad \chi^2 = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \frac{(m_{ij} - n_i p_{ij})^2}{n_i p_{ij}},$$

the number of degrees of freedom being $s^2 - 1$.

³⁾ В. И. Романовский, *Дискретные цепи Маркова*, Москва-Ленинград 1949, p. 393.

SUR LE COLORIAGE DES GRAPHS

PAR

J. MYCIELSKI (WROCLAW)

Un *graph fini* est un ensemble fini (situé dans l'espace euclidien à trois dimensions) de points dont certains sont joints par des arcs simples qui n'ont pas de points communs (sauf — peut-être — de points finaux)¹⁾. Un graph composé de trois points joints deux-à-deux s'appelle un *triangle*.

Colorier un graph au moyen de n couleurs — veut dire — peindre chacun de ses points par une de ces couleurs, les points joints par un arc simple étant points de couleurs différentes.

Il est évident qu'un graph qui contient m points joints deux-à-deux ne peut pas être colorié par moins que m couleurs. Je me propose de démontrer dans cette note qu'un théorème inverse serait faux. En effet je vais prouver le théorème suivant:

THÉORÈME. *Pour chaque nombre naturel n il existe un graph fini ne contenant aucun triangle, qui ne peut pas être colorié au moyen de n couleurs.*

Démonstration. Pour $n=1$, deux points joints par un arc simple sont un exemple d'un tel graph.

Désignons par a_1, \dots, a_m les points d'un graph A ne contenant pas de triangle, qui ne peut pas être colorié par n couleurs. Nous allons construire un graph A^* qui ne contient pas de triangle et qui ne peut pas être colorié par $n+1$ couleurs.

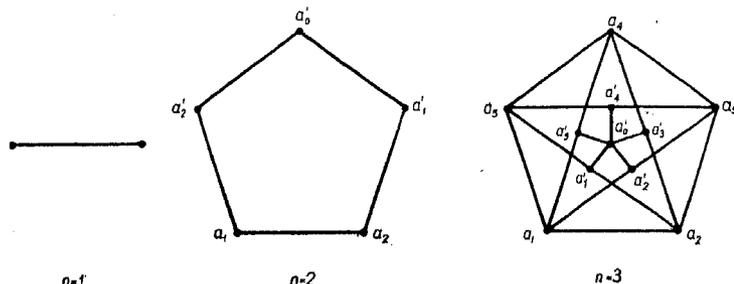
Désignons par a_{k_1}, \dots, a_{k_r} la suite de tous les points du graph A qui sont joints au point a_i .

Choisissons dans l'espace un ensemble de $m+1$ points: a'_0, a'_1, \dots, a'_m qui est disjoint avec le graph A .

Joignons par des arcs simples chacun des points a_{k_1}, \dots, a_{k_r} au point a'_i (pour $i=1, \dots, m$). Joignons encore chacun des points a'_1, \dots, a'_m au point a'_0 .

¹⁾ Il est évident qu'un graph fini constitue un modèle d'une relation symétrique et antiréflexive définie dans un ensemble fini. Ainsi cet article pourrait être écrit en termes d'algèbre de relations, comme p. ex le travail de K. Zarankiewicz, *Sur les relations symétriques dans l'ensemble fini*, *Colloquium Mathematicum* 1 (1947), p. 10-14.

Le graph ainsi obtenu, aux points $a_1, \dots, a_m, a'_0, \dots, a'_m$, sera désigné par A^* (voir la figure).



A^* ne contient pas de triangle:

A ne contenant pas de triangle la suite $a_{k_{11}}, \dots, a_{k_{kr}}$ ne contient aucune paire de points joints entre eux. De là aucun des points a'_1, \dots, a'_m n'est pas angle d'un triangle.

A^* ne peut pas être colorié par $n+1$ couleurs:

Affirmons le contraire. Le graph A ne pouvant pas être colorié par n couleurs, quelle que soit la manière avec laquelle il est colorié par $n+1$ couleurs, il contient une suite de points $a_{s_1}, \dots, a_{s_{n+1}}$ coloriés par toutes les $n+1$ couleurs et dont chacun est joint à des points coloriés par toutes les couleurs usitées, différentes de la sienne.

Il est évident que le point a'_0 doit être colorié de la même couleur que le point a_{s_i} , puisqu'il est colorié par l'une des $n+1$ couleurs usitées.

Or le point a'_0 est joint à tous les points $a'_{s_1}, \dots, a'_{s_{n+1}}$, ce qui mène à une contradiction puisque ceux-ci sont coloriés par toutes les $n+1$ couleurs.

Le théorème est ainsi démontré. La construction faite dans la démonstration donne un graph composé de $3 \cdot 2^{n-1} - 1$ points. Or, le problème suivant s'impose:

P 130. Existe-t-il un graph composé d'un nombre de points plus petit que $3 \cdot 2^{n-1} - 1$, qui ne contient aucun triangle et qui ne peut pas être colorié par n couleurs?

Appelons *circuit* une suite a_1, a_2, \dots, a_k de points d'un graph lorsque les points a_1 et a_2 , a_2 et a_3 , \dots , a_k et a_1 sont joints.

Le problème suivant est une généralisation du problème résolu dans ce travail:

P 131. Existe-t-il pour chaque couple de nombres naturels n et $m \geq 3$ un graph fini qui ne peut être colorié par n couleurs et qui ne contient, pour $k=3, 4, \dots, m$, aucun circuit à k points.

UNE SIMPLE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE CANTOR-BERNSTEIN

PAR

M. REICHBACH (WROCLAW)

Le théorème en question peut être formulé comme suit:

f étant une fonction définie dans un ensemble M , biunivoque, telle que $f(M) \subset M$, il existe, pour tout ensemble $E \subset M - f(M)$, une fonction f^* biunivoque telle que $f^*(M) = E + f(M)$.

Il sera démontré que la fonction

$$(1) \quad f^*(x) = \begin{cases} x & \text{pour } x \in S, \\ f(x) & \text{pour } x \in M - S \end{cases}$$

où

$$(2) \quad S = E + f(E) + f[f(E)] + \dots$$

satisfait aux conditions de la thèse.

Démonstration. D'après l'hypothèse sur E et sur $f(M)$, on a $f(E) \subset M$, $f[f(E)] \subset M$ et ainsi de suite. On a donc, d'après (2), $S \subset M$, c'est-à-dire

$$(3) \quad M = S + (M - S).$$

Il s'ensuit également de (2) que $f(S) = f(E) + f[f(E)] + \dots$, d'où $E + f(S) = S$, ce qui entraîne d'une part

$$(4) \quad S + f(M - S) = E + f(S) + f(M - S) = E + f[S + (M - S)] = E + f(M),$$

où le dernier signe d'égalité résulte de (3), et d'autre part

$$(5) \quad f(M) - S = f(M) - [E + f(S)] = f(M) - E - f(S) = f(M) - f(S) = f(M - S),$$

où l'avant-dernier signe d'égalité résulte de l'hypothèse sur E et le dernier — de la biunivocité de f .

D'après (1), la fonction f^* est biunivoque dans les ensembles disjoints S et $M - S$, puisque f l'est dans $M - S$ par hypothèse. Les ensembles $f^*(S)$ et $f^*(M - S)$ sont aussi disjoints, car, d'après (1), le premier coïncide avec S et le second avec $f(M - S)$, donc avec $f(M) - S$ en vertu de (5). Il en résulte d'après (3) que la fonction f^* est biunivoque dans l'ensemble M tout entier. Enfin, l'application successive de (3), (1) et (4) donne

$$f^*(M) = f^*(S) + f^*(M - S) = S + f(M - S) = E + f(M),$$

c. q. f. d.