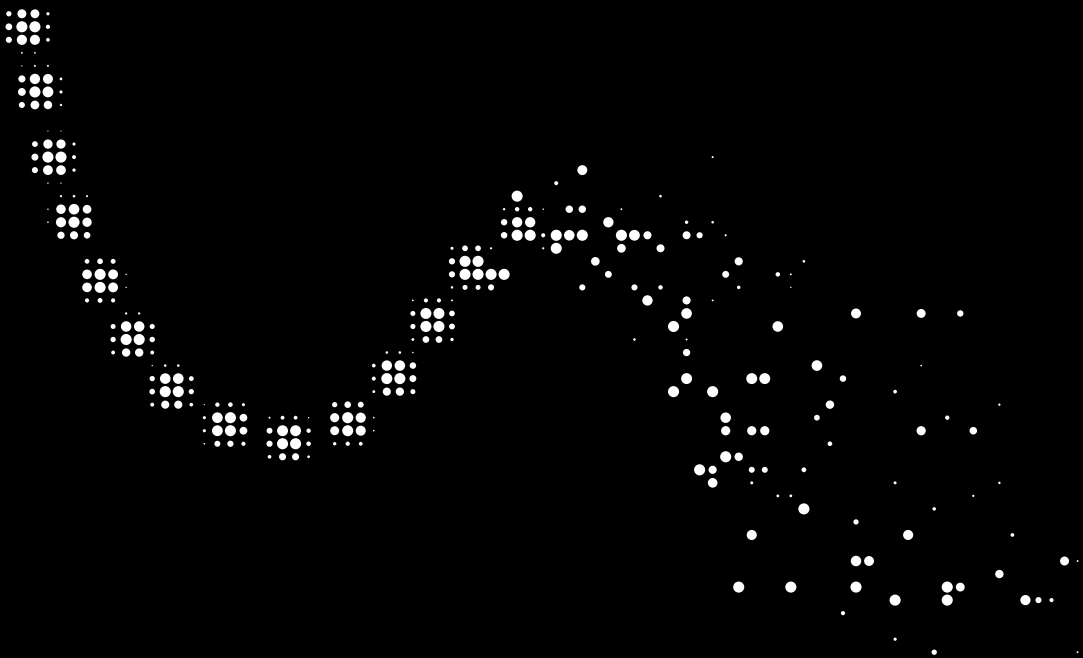


Waldemar Rakowski

Przekształcenia falkowe

Aspekty obliczeniowe
w praktyce inżynierskiej



Waldemar Rakowski

PRZEKSZTAŁCENIA FALKOWE

Aspekty obliczeniowe w praktyce inżynierskiej



Oficina Wydawnicza Politechniki Białostockiej

Białystok 2018

Recenzenci:

prof. dr hab. inż. Jerzy Szabatin

prof. dr hab. inż. Jan Zarzycki

Redaktor wydawnictwa:

Elżbieta Dorota Alicka

Projekt okładki:

Agencja Wydawnicza EkoPress

Redakcja techniczna, skład:

Waldemar Rakowski

© Copyright by Politechnika Białostocka, Białystok 2018

ISBN 978-83-65596-79-6

ISBN 978-83-65596-80-2 (eBook)

DOI: 10.24427/978-83-65596-80-2



Publikacja jest udostępniona na licencji

Creative Commons Uznanie autorstwa-Użycie niekomercyjne-Bez utworów zależnych
4.0 (CC BY-NC-ND 4.0)

Pełna treść licencji dostępna na stronie

creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode.pl

Publikacja jest dostępna w Internecie na stronie Oficyny Wydawniczej PB

Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej

ul. Wiejska 45C, 15-351 Białystok

tel.: 85 746 91 37, 85 746 91 34

e-mail: oficyna.wydawnicza@pb.edu.pl

www.pb.edu.pl

Podziękowania

Pragnę wyrazić serdeczne podziękowanie recenzentom książki, Panu prof. dr. hab. inż. Jerzemu Szabatinowi i Panu prof. dr. hab. inż. Janowi Zarzyckiemu, za bardzo istotne rady merytoryczne dotyczące zagadnień przedstawionych w książce, dzięki którym wyeliminowanych zostało szereg nieścisłości w ujęciu materiału, oraz za niezwykle cenne uwagi redakcyjne, których uwzględnienie z pewnością uczyniło tekst bardziej przyjaznym czytającemu.

Waldemar Rakowski

Spis treści

Wykaz oznaczeń	9
1 Wprowadzenie	11
2 Podstawy matematyczne	21
2.1 Bazy i rozpięcia	25
2.1.1 Bazy	26
2.1.2 Rozpięcia	28
2.1.3 Przykłady baz i rozpięć w przestrzeniach skończone- niewymiarowych	30
2.2 Czas i częstotliwość	35
2.2.1 Przekształcenie Fouriera sygnałów czasu ciągłego	35
2.2.2 Zasada nieoznaczoności	37
2.2.3 Splot funkcji	39
2.2.4 Splot dyskretny	41
2.2.5 Przekształcenie Fouriera sygnałów czasu dyskretnego	45
2.2.6 Dyskretna przekształcenia Fouriera	48
2.2.7 Okienkowa transformata Fouriera	55
2.2.8 Okienkowa transformata Fouriera z okienkowaniem funkcją Gaussa	59
2.3 Funkcje o nośniku zwartym	61

3	Analiza wieloskalowa sygnałów	65
3.1	Nieformalne wprowadzenie do analizy wieloskalowej . . .	65
3.1.1	Aproksymacja sygnału w przestrzeniach funkcji skalującej	68
3.1.2	Falka Haara	70
3.1.3	Reprezentacje falkowe sygnałów	74
3.1.4	Rekonstrukcja sygnału	76
3.2	Formalne wprowadzenie do analizy wieloskalowej	78
3.3	Funkcja skalująca i stowarzyszony z nią filtr	84
3.4	Szybkie ortogonalne przekształcenie falkowe	87
3.4.1	Banki filtrów implementujące szybkie ortogonalne przekształcenie falkowe	92
3.5	Szybkie biortogonalne przekształcenie falkowe	96
3.5.1	Bank filtrów iterowanych służący do obliczania funkcji skalującej	104
4	Falki	115
4.1	Ogólne właściwości falek	115
4.2	Falki ortogonalne o zwartym nośniku	124
4.3	Falki biortogonalne o zwartym nośniku	132
4.3.1	Filtry LeGalla i pochodne	135
4.3.2	Filtry biortogonalne minimalnie różniące się długością	140
4.3.3	Zagadnienie wyboru filtrów dekompozycji i rekonstrukcji	144
4.4	Falki jako pochodne funkcji Gaussa	147
4.5	Falki w postaci funkcji sklepanych	152
4.5.1	Bazowe funkcje sklepane	152
4.5.2	Falki w postaci kubicznych funkcji sklepanych	154

5 Ciągła transformata falkowa	159
5.1 Diadyczne przekształcenie falkowe	160
5.1.1 Szybkie diadyczne przekształcenie falkowe	161
5.1.2 Detekcja zboczy sygnałów	166
5.2 Ciągła transformata falkowa w skalach parzystych	174
5.2.1 Interpolacja sygnału funkcjami sklejanymi rzędu trzeciego	174
5.2.2 Dylatacje całkowitoliczbowe falek kubicznych	181
5.2.3 Ciągła transformata falkowa w przestrzeni kubicz- nych funkcji sklejanym	187
5.2.4 Przykłady obliczeniowe ciągłej transformaty falko- wej w skalach parzystych	190
5.3 Obliczanie ciągłej transformaty falkowej za pomocą FFT	193
 Bibliografia	 199
 Indeks	 203
 Streszczenie	 205
 Summary	 207

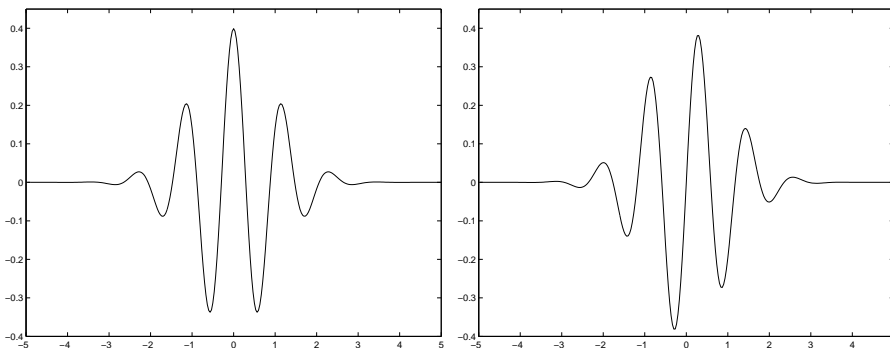
Wykaz oznaczeń

- \mathbb{Z} - zbiór liczb całkowitych
- \mathbb{R} - zbiór liczb rzeczywistych
- \mathbb{C} - zbiór liczb zespolonych
- $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ - przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem
- $l^2(\mathbb{Z})$ - przestrzeń ciągów liczbowych sumowalnych z kwadratem
- $\| \cdot \|$ - norma w przestrzeni $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ lub w przestrzeni $l^2(\mathbb{Z})$
- $|\cdot|$ - wartość bezwzględna
- $V \oplus W$ - suma prosta przestrzeni V i W
- i - jednostka urojona $i = \sqrt{-1}$
- z^* - wartość sprzężona do $z \in \mathbb{C}$
- $f(t)$ - sygnał czasu ciągłego, $t \in \mathbb{R}$
- $\bar{f}(t)$ - sygnał rewersyjny względem sygnału $f(t)$, $\bar{f}(t) = f(-t)$
- \hat{t} - odcięta środka ciężkości gęstości energii sygnału
- σ_t^2 - wariancja gęstości energii sygnału $|f(t)|^2$
- $\hat{\omega}$ - odcięta środka ciężkości widma gęstości energii sygnału
- σ_ω^2 - wariancja widma gęstości energii sygnału $|F(\omega)|^2$
- $f[n]$ - sygnał czasu dyskretnego, $n \in \mathbb{Z}$
- $\bar{f}[n]$ - sygnał rewersyjny względem sygnału $f[n]$, $\bar{f}[n] = f[-n]$
- $h[n]$ - odpowiedź impulsowa filtru cyfrowego
- $\bar{h}[n]$ - odpowiedź impulsowa filtru cyfrowego rewersyjnego względem filtru $h[n]$; $\bar{h}[n] = h[-n]$
- $h_j[n]$ - odpowiedź impulsowa filtru z „dziurami”

- $f_u(t)$ - translacja funkcji (sygnału sygnału czasu ciągłego)
 $f_{u,s}(t)$ - przeskalowana i przesunięta wersja funkcji (sygnału sygnału czasu ciągłego)
 $\langle f(t), g(t) \rangle$ - iloczyn skalarny funkcji (sygnałów czasu ciągłego)
 $\langle f[n], g[n] \rangle$ - iloczyn skalarny ciągów liczbowych (sygnałów czasu dyskretnego)
 $f * g(u)$ - splot funkcji (sygnałów czasu ciągłego)
 $f * g[k]$ - splot ciągów liczbowych (sygnałów czasu dyskretnego)
 $f \circledast g[n]$ - splot kołowy ciągów liczbowych (sygnałów czasu dyskretnego)
 $\psi(t)$ - falka, $t \in \mathbb{R}$
 $\psi_{n,j}(t)$ - falka po dyskretyzacji skali i przesunięcia
 $\phi(t)$ - funkcja skalująca, $t \in \mathbb{R}$
 $\phi_{n,j}(t)$ - funkcja skalująca po dyskretyzacji skali i przesunięcia
 $\delta(t)$ - dystrybucja delta Diraca
 $\delta[n]$ - delta Kroneckera
 ω - pulsacja
 $\mathcal{F}\{f(t)\}$ - przekształcenie Fouriera funkcji $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$
 $F(\omega)$ - transformata Fouriera funkcji $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$
 $F(e^{i\omega})$ - transformata Fouriera ciągu liczbowego $f[n]$, $n \in \mathbb{Z}$
 $H(e^{i\omega})$ - transmitancja filtru cyfrowego o odpowiedzi impulsowej $h[n]$
 $\mathcal{Z}\{p[n]\}$ - przekształcenie Z ciągu liczbowego $p[n]$, $n \in \mathbb{Z}$
 $P(z)$ - transformata Z ciągu liczbowego $p[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{C}$
 DTF - dyskretna transformata Fouriera ciągu liczbowego (sygnału czasu dyskretnego)
 $IDFT$ - odwrotna dyskretna transformata Fouriera
 FFT - szybki algorytm obliczania dyskretnej transformaty Fouriera
 $Wf(u, s)$ - ciągła transformata falkowa sygnału $f(t)$ i falki $\psi_{u,s}(t)$

1 Wprowadzenie

Termin *falka* (ang. *wavelet*, fr. *ondelette*), w rozumieniu dzisiejszym, pojawił się na początku lat osiemdziesiątych XX wieku w pracach francuskiego inżyniera geofizyka Jeana Morleta (1931 - 2007), który zajmował się analizą sygnałów sejsmicznych w koncernie petrochemicznym Elf Aquitaine (Francja). Narzędziem matematycznym wykorzystywanym przez Jeana Morleta do analizy sygnałów sejsmicznych było okienkowe przekształcenie Fouriera. Jego oryginalnym pomysłem było skalowanie szerokości okna wraz ze zmianą częstotliwości. Wykorzystywał okno w postaci funkcji Gaussa, które skalował w taki sposób, aby w oknie mieściła się taka sama liczba okresów kosinusoidy (sinusoidy), niezależnie od częstotliwości, co ilustruje rysunek 1.1. W ten sposób zdefiniował pierwszą falkę



Rysunek 1.1: Falki Morleta: kosinusoida (z lewej) i sinusoida (z prawej)

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{i\omega_0 t}, \quad (1.1)$$

gdzie $\omega_0 = \pi \sqrt{\frac{2}{\ln 2}} = 5,3364$. Okno w postaci krzywej Gaussa jest obwiednią zmodulowanej kosinusoidy, która jest częścią rzeczywistą i sinusoidy, która jest częścią urojoną falki. Czasem wykorzystywana jest tylko część rzeczywista falki, tj. zmodulowana kosinusoida, albo część urojona falki, tj. zmodulowana sinusoida, i wtedy falka jest rzeczywista. Szerokość okna jest taka, że druga co do wielkości amplituda kosinusoidy jest w przybliżeniu równa połowie największej amplitudy. Stała ω_0 została dobrana tak, aby falka spełniała fundamentalny warunek

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0, \quad (1.2)$$

wyrażający oscylacyjny charakter falki. Falka ta bywa nazywana *falką Morleta* [27] i w postaci (1.1) jest określana jako *falka matka*. Transformata Fouriera falki Morleta ma postać

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(\omega-\omega_0)^2}. \quad (1.3)$$

Przeskalowana falka

$$\psi_s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{(t/s)^2}{2}} e^{i\omega_0(t/s)} \quad (1.4)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{(t/s)^2}{2}} e^{i(\omega_0/s)t}, \quad (1.5)$$

gdzie $s > 0$, odpowiada atomowi Gabora z okienkowej transformaty Fouriera o częstotliwości $\omega = \omega_0/s$. Zmieniając parametr skali s , zmienia się częstotliwość atomu i jednocześnie szerokość okna w dziedzinie czasu. Skalowanie okna i częstotliwości powoduje, że kształt falki nie zmienia się i własność tę podkreślili autorzy fundamentalnego artykułu na temat falek [7], używając w tytule określenia *falki o stałym kształcie* (ang. *wavelets*

of constant shape). W ten sposób zmodyfikowane okienkowe przekształcenie Fouriera sygnału $f(\tau)$ staje się *ciągłym przekształceniem falkowym* (ang. *continuous wavelet transform* - CWT), zdefiniowanym następująco

$$Wf(t, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{\tau - t}{s} \right) d\tau \quad (1.6)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \psi_{t,s}^*(\tau) d\tau, \quad (1.7)$$

gdzie $*$ oznacza wartość sprzężoną i

$$\psi_{t,s}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left(\frac{\tau - t}{s} \right) \quad (1.8)$$

przeskalowaną i przesuniętą falkę matkę, $t \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$ i $s > 0$. Transformata Fouriera przeskalowanej i przesuniętej falki

$$\Psi_{t,s}(\omega) = \sqrt{s} \Psi(s\omega) e^{-i\omega t}. \quad (1.9)$$

*Ciągła transformata falkowa*¹ sygnału jest, podobnie jak okienkowa transformata Fouriera, funkcją dwóch zmiennych. Jednakże częstotliwość, która występuje w okienkowej transformacie Fouriera, jest zastąpiona w transformacie falkowej współczynnikiem skalowania falki. Tak więc dziedziną ciągłej transformaty falkowej (dziedziną falkową) jest półpłaszczyzna $t - s$, $t \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$ i $s > 0$. Wartość liczbowa transformaty falkowej dla określonych wartości zmiennych t i s jest nazywana *współczynnikiem falkowym*.

¹W pracy [7] sformułowano przekształcenie falkowe w nieco innej postaci niż (1.6), a mianowicie $(Ch)(u, v) = \frac{1}{\sqrt{c_g}} e^{u/2} \int g^*(e^u t - v) h(t) dt$, gdzie c_g - stała charakteryzująca falkę, $g(e^u t - v)$ - przeskalowana i przesunięta falka, $h(t)$ - sygnał transformowany. Współczynnik skali jest wartością funkcji wykładniczej, której argumentem jest parametr $-u$. W konsekwencji transformata jest funkcją dwóch zmiennych, z których ta związana ze skalą przyjmuje wartości z całej osi liczbowej, podczas gdy współczynnik skalowania s w (1.6) przyjmuje wartości z półosi dodatniej.

Autorzy artykułu [7] określili dla funkcji o skończonej energii tzw. *warunek dopuszczalności* bycia falką

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty, \quad (1.10)$$

gdzie $\Psi(\omega)$ - transformata Fouriera falki. Warunkiem koniecznym zbieżności tej całki jest zerowanie się transformaty Fouriera falki dla pulsacji $\omega = 0$, tj. $\Psi(0) = 0$, co jest równoważne warunkowi (1.2). Spełnienie warunku dopuszczalności zapewnia istnienie transformaty odwrotnej, czyli możliwość rekonstrukcji sygnału za pomocą wzoru

$$f(\tau) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W f(t, s) \psi_{t,s}(\tau) \frac{ds dt}{s^2}. \quad (1.11)$$

Kolejnym ważnym krokiem w rozwoju falek było skonstruowanie w roku 1985 przez francuskiego matematyka Yvesa Meyera nowej rodziny falek, których transformaty Fouriera mają zwarte nośniki i są opisane wielomianami. Zwartość nośnika transformaty Fouriera wyklucza zwartość nośnika falki, ale zanikanie falek jest szybkie, gdyż w przypadku najprostszej falki obwiednią jest funkcja $1/|t|^3$. Meyer pokazał, że każda z jego falek, poprzez skalowanie diadyczne i translacje całkowitoliczbowe, umożliwia utworzenie bazy ortogonalnej $\{2^{-j/2}\psi(2^{-j}t - n)\}_{j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}}$ przestrzeni $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, tj. że sygnał $f(t) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ można przedstawić w postaci *szeregu falkowego* [13]

$$f(t) = \sum_j \sum_n \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{n,j}(t), \quad (1.12)$$

gdzie

$$\psi_{n,j}(t) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}t - n), \quad j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}. \quad (1.13)$$

Filtry cyfrowe stowarzyszone z falkami Meyera są filtrami o nieskończonej odpowiedzi impulsowej, a transformaty Z ich odpowiedzi impulsowych nie są funkcjami wymiernymi, co uniemożliwia rekurencyjne obliczanie splotu odpowiedzi impulsowej filtru z sygnałem. Tym niemniej

falki Meyera mają duże znaczenie teoretyczne, gdyż użyte zostały do zastąpienia podwójnej całki we wzorze na rekonstrukcję sygnału z reprezentacji falkowej (1.11) podwójną sumą (wzór (1.12)), która to dyskretyzacja dziedziny falkowej ma zasadnicze znaczenie dla obliczeń numerycznych i zastosowań przekształceń falkowych.

Fundamentalny wkład w rozwój falek i ich zastosowań wniósł francuski informatyk Stephane Mallat. W artykule [11] podał, opracowane wspólnie z Y. Meyerem, aksjomaty tzw. *analizy wieloskalowej* (ang. *multiresolution analysis*) sygnału, określił związek analizy wieloskalowej z przekształceniami falkowymi i podał implementacje przekształceń falkowych z użyciem banków filtrów cyfrowych oraz szybkie algorytmy obliczania transformat falkowych. Ponadto pokazał zastosowanie przekształceń falkowych do kompresji obrazów, jak dotąd jednego najważniejszych zastosowań falek.

Bardzo znaczący wkład w rozwój metod falkowych wniosła Belgijka Ingrid Daubechies. Wykorzystując teorię filtrów lustrzanych kwadraturowych skonstruowała rodzinę falek o zwartym nośniku, umożliwiającą tworzenie baz ortogonalnych przestrzeni $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ [4]. Falki ortogonalne Daubechies są niesymetryczne i przesuwają fazę sygnału, co jest niepożądane w zastosowaniach. W artykule [3] Daubechies wspólnie z A. Cohenem i J.-C. Feauveau podała sposób konstrukcji par baz wzajemnie ortogonalnych (jedna baza do dekompozycji, druga do rekonstrukcji sygnału), tzw. *baz biortogonalnych*, z falek symetrycznych o zwartym nośniku.

Lista badaczy, którzy wnieśli znaczący wkład w rozwój metod falkowych przetwarzania sygnałów jest długa. Powyżej wymienionych zostało tylko kilka nazwisk, które zdaniem autora powinny być znane wszystkim interesującym się falkami i ich zastosowaniami.

Jednym z kluczowych haseł tej książki jest ciągła transformata fal-

kowa. Jak było powiedziane wcześniej, jest to funkcja dwóch zmiennych niezależnych: czasu (lub przestrzeni) i skali. Wartość tej funkcji jest nazywana współczynnikiem falkowym. Wzór (1.6) definiujący ciągłą transformatę falkową określa współczynnik falkowy $Wf(t, s)$ za pomocą iloczynu skalarnego sygnału $f(\tau)$ i przeskalowanej do skali s i przesuniętej o t falki $\psi_{t,s}(\tau)$

$$Wf(t, s) = \langle f(\tau), \psi_{t,s}(\tau) \rangle. \quad (1.14)$$

Można interpretować współczynnik falkowy jako wartość uśrednioną sygnału $f(\tau)$ w otoczeniu chwili $\tau = t$ z falką $\psi_s(\tau)$ jako funkcją wagową, a uśrednianie dokonuje się na przedziale czasu o długości proporcjonalnej do współczynnika skali s . Jeżeli falka ma zwarty nośnik, to przedział ten jest równy iloczynowi długości nośnika falki matki i współczynnika skali s . Uwzględniając oscylacyjny charakter falki wyrażony warunkiem (1.2), współczynnik falkowy można traktować jako miarę zmienności sygnału w otoczeniu chwili $\tau = t$.

Współczynnik falkowy $Wf(t, s)$ można również interpretować jako miarę podobieństwa sygnału $f(\tau)$ w otoczeniu chwili $\tau = t$ do falki $\psi_s(\tau)$.

Ważną z punktu widzenia zastosowań interpretację współczynnika falkowego można otrzymać, wyrażając go jako splot sygnałów. W tym celu zdefiniujemy funkcję rewersyjną $\bar{g}(\tau)$ w stosunku do funkcji $g(\tau)$

$$\bar{g}(\tau) = g^*(-\tau). \quad (1.15)$$

Wówczas

$$Wf(t, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^*\left(\frac{\tau-t}{s}\right) d\tau \quad (1.16)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \psi_s^*(\tau-t) d\tau \quad (1.17)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \bar{\psi}_s(t-\tau) d\tau, \quad (1.18)$$

czyli

$$Wf(t, s) = f * \bar{\psi}_s(t), \quad (1.19)$$

gdzie $\bar{\psi}_s(\tau) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^*\left(\frac{-\tau}{s}\right)$. Ostatnia równość pokazuje, że funkcję $\bar{\psi}_s(\tau)$ można traktować jako odpowiedź impulsową filtru liniowego nazywanego dalej filtrem falkowym. W przetwarzaniu sygnałów filtry często analizuje się za pomocą ich transmitancji, tj. transformaty Fouriera odpowiedzi impulsowej filtru. Poniższe przekształcenia prowadzą do wyznaczenia transmitancji filtru falkowego $\bar{\psi}_s(\tau)$.

Niech $\Psi(\omega)$ oznacza transformatę Fouriera falki $\psi(\tau)$. Zapiszmy wzór na transformatę Fouriera filtru $\bar{\psi}(\tau)$

$$\bar{\Psi}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\psi}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (1.20)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(-\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (1.21)$$

Wzór na wartość sprzężoną transformaty Fouriera funkcji $\bar{\psi}(\tau)$ ma postać

$$\bar{\Psi}^*(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(-\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (1.22)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (1.23)$$

$$= \Psi(\omega), \quad (1.24)$$

czyli że

$$\bar{\Psi}(\omega) = \Psi^*(\omega), \quad (1.25)$$

co oznacza, że moduł transmitancji filtru falkowego jest równy modułowi transformaty Fouriera falki, a faza transmitancji filtru falkowego ma znak przeciwny do fazy transformaty Fouriera falki. Analogiczna uwaga dotyczy przeskalowanej falki i odpowiadającego jej filtru falkowego

$$\bar{\Psi}_s(\omega) = \sqrt{s} \Psi^*(s\omega). \quad (1.26)$$

Ostatnia równość wynika z następującej własności transformaty Fouriera: jeśli $G(\omega) = \mathcal{F}[g(\tau)]$, to $\mathcal{F}[g(\tau/s)] = |s| G(s\omega)$, gdzie $\mathcal{F}[g(\tau)]$ oznacza transformatę Fouriera funkcji $g(\tau)$.

Warunek (1.2) skutkuje zerowaniem się transformaty Fouriera falki dla $\omega = 0$, tj. $\Psi(0) = 0$, co oznacza, że falka nie może być filtrem dolno-przepustowym. Jeżeli pasmo przepustowe falki matki $\psi(t)$ zawiera się w przedziale $[\omega_1, \omega_2]$, $\omega_1 > 0$, to pasmo przepustowe falki przeskalowanej $\psi_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi(t/s)$ zawiera się w przedziale $[\omega_1/s, \omega_2/s]$. Dla $s > 1$ falka przeskalowana jest rozszerzona w stosunku do falki matki, transformata Fouriera falki przeskalowanej jest zwężona w stosunku do transformaty Fouriera falki matki, a pasmo przepuszczania falki przeskalowanej jest przesunięte w stronę niższych częstotliwości i zwężone w stosunku do pasma przepuszczania falki matki.

Fundamentalnym zagadnieniem z punktu widzenia możliwości wykorzystania przekształceń falkowych do przetwarzania sygnałów jest dyskretyzacja transformat falkowych. W literaturze termin *dyskretna transformata falkowa* rozumiany jest różnie. W [5] pojęcie to oznacza zbiór (skończony lub przeliczalny) współczynników falkowych obliczonych dla sygnału $f(\tau)$ i wybranej falki matki $\psi(\tau)$, w wybranych punktach płaszczyzny czas-skala, tj.

$$\{Wf(t_n, s_j)\}_{j,n \in \mathbb{Z}}, \quad (1.27)$$

$$Wf(t_n, s_j) = \langle f(\tau), \psi_{t_n, s_j}(\tau) \rangle, \quad (1.28)$$

$$\psi_{t_n, s_j}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{s_j}} \psi\left(\frac{\tau - t_n}{s_j}\right). \quad (1.29)$$

Regułą jest wybór punktów (t_n, s_j) tworzących na płaszczyźnie czas-skala regularną kratę

$$s_j = a^j, \quad t_n = nbs_j, \quad a > 1, \quad b > 0, \quad j, n \in \mathbb{Z}. \quad (1.30)$$

Przeskalowana ze współczynnikiem $s_j = a^j$ i przesunięta o $t_n = nbs_j$ falka jest nazywana *falką dyskretną* [5] i oznaczana

$$\psi_{n,j}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{a^j}} \psi\left(\frac{\tau - nba^j}{a^j}\right) = a^{-j/2} \psi(a^{-j}\tau - nb). \quad (1.31)$$

Cechą charakterystyczną falek dyskretnych jest to, że są one przesuwane w czasie proporcjonalnie do wartości współczynnika skali.

Kluczowym zagadnieniem dyskretyzacji transformaty falkowej jest wybór wartości parametrów a , b . W zastosowaniach technicznych przetwarzany sygnał ma skończony krok dyskretyzacji i skończoną długość, tj. skończoną liczbę próbek. Stąd liczba współczynników dyskretnej transformaty falkowej będzie skończona. Z punktu widzenia nakładów obliczeniowych wskazanym jest, żeby współczynników falkowych było jak najmniej. Jednakże powinno być ich tyle, żeby były w nich zachowane własności sygnału. Warunek ten będzie spełniony, jeżeli na podstawie współczynników falkowych możliwa będzie rekonstrukcja sygnału. Oznacza to, że dla wybranej *falki analizy* $\psi(t)$ i wybranych parametrów a , b istnieje *falka syntezy* $\tilde{\psi}(t)$ taka, że

$$f(t) = \sum_j \sum_n \langle f, \psi_{n,j} \rangle \tilde{\psi}_{n,j}(t). \quad (1.32)$$

Tak sformułowane zagadnienie prowadzi do konstrukcji tzw. *rozpięć* przestrzeni funkcji o skończonej energii generowanych z jednej funkcji - falki matki poprzez jej skalowanie i przesuwanie. Szczególnym przypadkiem rozpięć są bazy, w tym bazy ortogonalne tworzone z falki matki ortogonalnej, w których falka matka spełnia zarówno rolę falki analizy, jak i falki syntezy, a parametry przyjmują wartości $a = 2$, $b = 1$. Dla falki ortonormalnej ($\|\psi(t)\| = 1$) powyższy wzór na rekonstrukcję sygnału ma postać

$$f(t) = \sum_j \sum_n \langle f, \psi_{n,j} \rangle \psi_{n,j}(t), \quad (1.33)$$

gdzie

$$\psi_{n,j}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t - n2^j}{2^j}\right). \quad (1.34)$$

I. Daubechies skonstruowała rodzinę falek ortonormalnych o zwartym nośniku. Cechą charakterystyczną reprezentacji sygnału za pomocą tych falek jest to, że w przypadku dyskretyzacji przetwarzanego sygnału o skończonym czasie trwania liczba współczynników falkowych jest równa liczbie próbek sygnału, czyli że reprezentacja nie jest nadmiarowa.

Słowa kluczowe tej pracy to *przestrzeń sygnałów o skończonej energii* i *falki*. Można dopatrzeć się pewnej paraleli pomiędzy tymi dwoma terminami i dwoma innymi: muzyką i gwiazdami, o których mówi wiersz Ludwika Jerzego Kerna:

Czym jest muzyka? Nie wiem.

Może po prostu niebem

Z nutami zamiast gwiazd.

Trawestując ten wiersz, na pytanie dotyczące związku falek z przestrzenią sygnałów o skończonej energii można odpowiedzieć:

Czym jest **przestrzeń sygnałów o skończonej energii**?

Nie wiem.

Może po prostu niebem

Z **falkami** zamiast gwiazd.

2 Podstawy matematyczne

Naturalną reprezentacją matematyczną (modelem) sygnału, czyli wielkości fizycznej zmieniającej się w czasie lub w przestrzeni, jest funkcja rzeczywista lub zespolona jednej zmiennej. Z reguły jest to funkcja ciągła, a nawet różniczkowalna, gdyż wielkości fizyczne nie mogą zmieniać się w czasie nieskończenie krótkim. Matematyk, który mówi lub myśli o pewnej funkcji, zawsze widzi ją jako jedną z wielu funkcji, tj. jako element pewnej przestrzeni. Przestrzenią, do której należą funkcje reprezentujące sygnały, jest przestrzeń Hilberta [28]. Odsyłając Czytelnika zainteresowanego ścisłym przedstawieniem przestrzeni Hilberta do podręczników z zakresu analizy funkcjonalnej, wymienimy tutaj trzy fundamentalne pojęcia związane z przestrzeniami Hilberta: iloczyn skalarny dwóch elementów, norma elementu i metryka.

Iloczyn skalarny jest funkcją, która dwóm elementom przestrzeni Hilberta f i h przyporządkowuje skalar oznaczany symbolem

$$\langle f, h \rangle . \quad (2.1)$$

Normę w przestrzeni Hilberta generuje iloczyn skalarny zgodnie z definicją

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} . \quad (2.2)$$

Metryka, będąca miarą odległości dwóch elementów, zdefiniowana jest następująco

$$d(f, h) = \|f - h\| . \quad (2.3)$$

W kontekście metod przetwarzania sygnałów, w szczególności metod falkowych, bardzo ważne są dwa przykłady przestrzeni Hilberta: *przestrzeń funkcji całkownych z kwadratem* oznaczana $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ i *przestrzeń ciągów sumowalnych z kwadratem* oznaczana $\mathbf{I}^2(\mathbb{Z})$. Obydwie przestrzenie są przestrzeniami nieskończenie wymiarowymi, a funkcje i wyrazy ciągów mogą przyjmować wartości rzeczywiste albo zespolone.

Iloczyn skalarny w przestrzeni $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ zdefiniowany jest następująco

$$\langle f, h \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) h^*(t) dt, \quad (2.4)$$

gdzie $*$ oznacza wartość sprzężoną, a całka rozumiana jest w sensie Lebesgue'a. Iloczyn skalarny jest liczbą i dlatego w oznaczeniu symbolicznym iloczynu po lewej stronie znaku równości nie umieszczono zmiennej t , gdyż symbol t z prawej strony znaku równości jest zmienną podcałkową i może być zamieniony na inny symbol.

Norma funkcji w przestrzeni $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt} < \infty. \quad (2.5)$$

Metrykę w przestrzeni $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ określa wzór

$$d(f, h) = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - h(t)|^2 dt}. \quad (2.6)$$

W odniesieniu do funkcji, które reprezentują sygnały, całkę z kwadratu sygnału interpretuje się jako energię sygnału. Z tego powodu przestrzeń funkcji $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ nazywana jest również przestrzenią funkcji o skończonej energii [12], [31].

Iloczyn skalarny ciągów w przestrzeni $\mathbf{I}^2(\mathbb{Z})$ zdefiniowany jest następująco

$$\langle f, h \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n] h^*[n]. \quad (2.7)$$

Normą ciągu w przestrzeni $\mathbf{I}^2(\mathbb{Z})$ jest

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{-\infty}^{+\infty} |f[n]|^2} < \infty. \quad (2.8)$$

Metrykę w przestrzeni $\mathbf{I}^2(\mathbb{Z})$ określa wzór

$$d(f, h) = \sqrt{\sum_{-\infty}^{+\infty} |f[n] - h[n]|^2}. \quad (2.9)$$

W literaturze dotyczącej przetwarzania sygnałów wcześniej używano terminów *sygnał analogowy* i *sygnał cyfrowy*. We współczesnej literaturze używa się częściej terminologii *sygnał czasu ciągłego* (ang. *continuous-time signal*) i *sygnał czasu dyskretnego* (ang. *discrete-time signal*). Ten pierwszy sygnał nie musi reprezentować wyłącznie wielkości fizycznej zależnej od czasu zmieniającego się w sposób ciągły, ale może być zależny od zmiennej przestrzennej. Matematycznie sygnał czasu ciągłego reprezentuje funkcja $f(t)$. W zależności od kontekstu $f(t)$ oznacza funkcję, czyli odwzorowanie przestrzeni liczb rzeczywistych w przestrzeń liczbową albo wartość funkcji (rzeczywistą lub zespoloną) w punkcie t . Analogicznie modelem matematycznym sygnału czasu dyskretnego jest ciąg liczbowy, a $f[n]$ oznacza ciąg liczbowy albo jego n -ty element.

W celu poznania pewnych własności sygnału użyteczne mogą być inne niż wspomniane wyżej reprezentacje sygnału. Tę inną reprezentację sygnału uzyskuje się za pomocą pewnego przeszczałcenia matematycznego, którego wynikiem jest *transformata sygnału*. Przykładem może być zagadnienie lokalizowania punktów sygnału, wokół których zmienia się gwałtownie wartość sygnału. Wiadomo, że w otoczeniu takich punktów moduł pochodnej przyjmuje duże wartości. Istnieje przekształcenie nazywane diadyczną transformata falkową, przyporządkowujące sygnałowi ciąg funkcji, w których na ogół dużo łatwiej zlokalizować miejsca gwałtownych zmian sygnału niż bezpośrednio w sygnale. Ten ciąg funkcji

otrzymany za pomocą wspomnianego przekształcenia jest nową reprezentacją sygnału. Często wymaga się, żeby przekształcenie sygnału było odwracalne. Przykładem może być kompresja falkowa sygnału. Przekształcenie falkowe daje nową reprezentację sygnału w postaci ciągu liczbowego stanowiącego wagi w rozwinięciu sygnału w szereg falkowy. Zakodowanie tych współczynników może wymagać dużo mniejszej liczby bitów niż zakodowanie oryginalnego sygnału. W tym przypadku potrzebne jest przekształcenie odwrotne, umożliwiające otrzymanie z reprezentacji falkowej sygnału oryginalnego lub jego aproksymacji.

W opisanych przykładach przekształceń sygnału można wyróżnić dwa etapy przekształcenia:

- dekompozycja (analiza) sygnału, czyli obliczenie nowej reprezentacji
- rekonstrukcja (synteza) sygnału (na podstawie nowej reprezentacji)

W drugiej połowie lat osiemdziesiątych dwudziestego wieku powstały nowe reprezentacje sygnałów, tzw. *reprezentacje falkowe*. Wykorzystują one funkcje nazwane *falkami*. Falkom towarzyszą ciągi liczbowe interpretowane jako odpowiedzi impulsowe filtrów cyfrowych. Przedstawienie koncepcji i algorytmów przekształceń falkowych zostanie poprzedzone krótkim i nieformalnym omówieniem podstawowych pojęć stanowiących aparat matematyczny wykorzystywany w tych przekształceniach¹.

¹Znakomitą monografią i jednocześnie podręcznikiem akademickim, w którym wyczerpująco przedstawiono wiele z omówionych dalej pojęć, jest książka prof. Jerzego Szabatina pt. *Podstawy teorii sygnałów* [28].

2.1 Bazy i rozpięcia

Zakłada się, że dany jest zbiór $\{e_n(t)\}_{n \in \Gamma}$ (skończony lub nieskończony) funkcji jednej zmiennej rzeczywistej $t \in \mathbb{R}$ i przyjmujących wartości rzeczywiste lub zespolone. Zbiór indeksów Γ może być zbiorem skończonym lub nieskończonym liczb całkowitych; dla określonego zbioru funkcji może być zbiorem liczb naturalnych. Zakłada się, że funkcje $e_n(t)$ są elementami (wektorami) przestrzeni Hilberta, w której dla każdych dwóch funkcji $f(t)$ i $g(t)$ może być obliczony iloczyn skalarny tych funkcji według wzoru (2.4).

Iloczyn skalarny umożliwia pewne scharakteryzowanie dwóch funkcji względem siebie. Mianowicie jeżeli $\langle f, g \rangle = 0$, to o funkcjach $f(t)$ i $g(t)$ mówi się, że są względem siebie ortogonalne (analogia do wektorów prostopadłych względem siebie, na przykład na płaszczyźnie). Iloczyn skalarny funkcji jest jednym z fundamentalnych pojęć związanych z przetwarzaniem sygnałów traktowanych jako funkcje.

Poszukiwanie nowej reprezentacji sygnału $f(t)$ polega na wybraniu zbioru funkcji $\{e_n(t)\}_{n \in \Gamma}$ i obliczeniu zbioru współczynników $\{c[n]\}_{n \in \Gamma}$ zdefiniowanych następująco

$$c[n] = \langle f, e_n \rangle. \quad (2.10)$$

Zbiór współczynników $\{c[n]\}_{n \in \Gamma}$ jest nową reprezentacją sygnału $f(t)$.

W zależności od własności matematycznych zbioru funkcji $\{e_n(t)\}_{n \in \Gamma}$ funkcje te i zbiór współczynników $\{c[n]\}_{n \in \Gamma}$ mogą służyć do rekonstrukcji sygnału albo nie. W tym drugim przypadku potrzebny jest dodatkowy zbiór funkcji, tzw. dualnych do funkcji $e_n(t)$, żeby zrekonstruować sygnał. Zbiór funkcji $\{e_n(t)\}_{n \in \Gamma}$ może tworzyć *bazę* przestrzeni Hilberta lub *rozpięcie* przestrzeni Hilberta. Poniżej krótko scharakteryzowano obydwa te pojęcia matematyczne.

2.1.1 Bazy

Baza przestrzeni jest zbiorem funkcji (wektorów) $\{e_n(t)\}_{n \in \Gamma}$ takich, że każda funkcja $f(t)$ z rozpatrywanej przestrzeni może być przedstawiona w jeden i tylko w jeden sposób za pomocą kombinacji liniowej tych funkcji, tj.

$$f(t) = \sum_{n \in \Gamma} c[n] e_n(t). \quad (2.11)$$

Funkcje tworzące bazę są *liniowo niezależne*, tj. żadnej z nich nie można wyrazić za pomocą kombinacji liniowej pozostałych funkcji bazy, i tworzą one tzw. *układ zupełny*, tj. pozwalają utworzyć każdą funkcję z danej przestrzeni.

Wyróżnia się tzw. *bazy ortonormalne*, tj. takie, w których funkcje są ortogonalne względem siebie i unormowane, tj. $\langle e_n, e_m \rangle = 1$, gdy $n = m$ i $\langle e_n, e_m \rangle = 0$, gdy $n \neq m$ oraz $\|e_n\| = 1$. Bazy ortonormalne są bardzo „atrakcyjne” obliczeniowo. Funkcje bazy służą zarówno do analizy, jak i do syntezy sygnału. Współczynniki rozwinięcia funkcji w bazie ortonormalnej (etap analizy) są obliczane według wzoru

$$c[n] = \langle f, e_n \rangle. \quad (2.12)$$

Obliczenie wartości sygnału (synteza) (po ewentualnym przetworzeniu współczynników $c[n]$) odbywa się według wzoru

$$f(t) = \sum_{n \in \Gamma} c[n] e_n(t). \quad (2.13)$$

Cechą charakterystyczną rozwinięcia funkcji w bazie ortonormalnej jest tzw. *równość Parsevala*²

$$\sum_{n \in \Gamma} |c[n]|^2 = \|f\|^2. \quad (2.14)$$

²Równość Parsevala nazywana jest także *wzorem Planchelera* [12].

Jeżeli $f(t)$ reprezentuje sygnał, to prawa strona powyższego równania jest równa kwadratowi energii sygnału. W takim przypadku lewa strona równania jest interpretowana jako kwadrat energii ciągu reprezentującego sygnał. Gdy $\Gamma = \mathbb{Z}$, to przestrzeń $\mathbf{L}^2(\mathbb{Z})$, przez analogię z przestrzenią $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, nazywana jest również przestrzenią ciągów o skończonej energii [12], [31].

Istnieje cała rodzina falek o zwartym nośniku (patrz punkt 2.3), które generują bazy ortonormalne przestrzeni $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Jednakże poza tzw. falką Haara wszystkie inne falki ortogonalne o zwartym nośniku nie są symetryczne (ani antysymetryczne). W konsekwencji reprezentacje falkowe sygnałów otrzymane z użyciem falek ortogonalnych o zwartym nośniku mają przesunięcia fazowe, które w określonych zastosowaniach mogą być wadą. W zastosowaniach warunek ortogonalności bazy nie musi być najbardziej pożądaną cechą bazy.

Nadrzędnym wymogiem zbioru funkcji służących do obliczania nowych reprezentacji sygnału jest *stabilność numeryczna* analizy i syntezy sygnału. Oznacza to określoną relację pomiędzy normą sygnału i energią współczynników stanowiących nową reprezentację sygnału.

Stabilna dekompozycja wymaga, żeby z bliskości funkcji wynikała bliskość współczynników będącymi rzutami tych funkcji na funkcje $\{e_n(t)\}_{n \in \Gamma}$, tj. powinna istnieć taka stała $0 < B < \infty$, że

$$\sum_{n \in \Gamma} | \langle f, e_n \rangle - \langle g, e_n \rangle |^2 \leq B \|f - g\|^2. \quad (2.15)$$

W szczególności jeżeli $g(t) = 0$, to $\langle g, e_n \rangle = 0$ i

$$\sum_{n \in \Gamma} | \langle f, e_n \rangle |^2 \leq B \|f\|^2. \quad (2.16)$$

Stabilna rekonstrukcja wymaga, żeby z bliskości współczynników wyni-

kała bliskość funkcji, tj. powinna istnieć taka stała $0 < A < \infty$, że

$$A \|f - g\|^2 \leq \sum_{n \in \Gamma} | \langle f, e_n \rangle - \langle g, e_n \rangle |^2. \quad (2.17)$$

W szczególności jeżeli $g(t) = 0$, to $\langle g, e_n \rangle = 0$ i

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{n \in \Gamma} | \langle f, e_n \rangle |^2. \quad (2.18)$$

Łącząc warunki (2.16) i (2.18), otrzymujemy warunek

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{n \in \Gamma} | \langle f, e_n \rangle |^2 \leq B \|f\|^2, \quad (2.19)$$

definiujący tzw. rozpięcie, które jest uogólnieniem bazy.

2.1.2 Rozpięcia

Rozpięciem (ang. *frame*) jest zbiór funkcji $\{e_n(t)\}_{n \in \Gamma}$, dla których istnieje para stałych $0 < A < B < \infty$, nazywanych *kresami rozpięcia*, takich że dla każdej funkcji $f(t)$ z rozpatrywanej przestrzeni spełniony jest warunek (2.19). Jeśli $A = B$, to rozpięcie nazywa się *rozpięciem ciasnym*. Funkcje tworzące rozpięcie nie muszą być ani ortogonalne względem siebie, ani liniowo niezależne. Jeżeli funkcje tworzące rozpięcie są liniowo niezależne (ale nie są ortogonalne), to taki układ funkcji nazywa się *bazą Riesz*a. Bazy Riesz'a odgrywają ważną rolę w przekształceniach falkowych sygnału.

Rekonstrukcja sygnału zdekomponowanego w bazie Riesz'a nie jest możliwa za pomocą tych samych funkcji, których użyto do dekompozycji (z powodu braku ortogonalności tych funkcji). Istnieje możliwość skonstruowania dla danej bazy Riesz'a tzw. bazy dualnej, której funkcje będą ortogonalne do funkcji bazy wyjściowej. Niech $\{e_n(t)\}_{n \in \Gamma}$ będzie bazą

Riesza, a $\{\tilde{e}_n(t)\}_{n \in \Gamma}$ jej bazą dualną spełniającą *warunek biortogonalności* baz, tj.

$$\langle e_n, \tilde{e}_n \rangle = 1 \quad i \quad \langle e_n, \tilde{e}_m \rangle = 0 \quad dla \quad n \neq m. \quad (2.20)$$

Wówczas obowiązują zależności

$$f(t) = \sum_{n \in \Gamma} \langle f, e_n \rangle \tilde{e}_n(t) \quad (2.21)$$

$$= \sum_{n \in \Gamma} \langle f, \tilde{e}_n \rangle e_n(t), \quad (2.22)$$

które pokazują, że dekompozycja może być wykonana w jednej bazie, a rekonstrukcja powinna być wykonana w drugiej bazie. Cechą charakterystyczną baz biortogonalnych jest równość

$$\sum_{n \in \Gamma} \langle f, e_n \rangle \langle f, \tilde{e}_n \rangle^* = \|f\|^2. \quad (2.23)$$

Wybór bazy dekompozycji i bazy rekonstrukcji może zależeć od zastosowania. Przesłanką w wyborze bazy dekompozycji i bazy rekonstrukcji może być regularność funkcji tworzących bazy. Bazami Riesza są bazy tworzone z funkcji sklejanych, o których jest mowa w dalszych częściach książki.

W zastosowaniach użyteczne są reprezentacje sygnałów w układzie funkcji, które nie są liniowo niezależne. Taki zbiór funkcji z punktu widzenia bazy jest „nadmiarowy”, ale reprezentacja sygnału w takim układzie funkcji może być bardzo użyteczna w analizowaniu pewnych własności sygnału, na przykład jego osobliwości [12]. Stabilność reprezentacji sygnału w takim układzie funkcji charakteryzują stałe A i B z warunku (2.19). Dowodzi się, że dla rozpięć ciasnych, tj. takich, że $A = B$, wektory dualne oblicza się ze wzoru [12]

$$\tilde{e}_n(t) = \frac{1}{A} e_n(t). \quad (2.24)$$

Ważne są rozpięcia spełniające warunek rozpięcia ciasnego tylko w przybliżeniu, na przykład gdy $B/A - 1 \ll 1$. Wówczas wykorzystanie wektorów rozpięcia do rekonstrukcji sygnału może dać zadowalające wyniki. Równie efektywną aproksymację sygnału mogą dawać rozpięcia spełniające warunek $0 < A \leq B < 2$. Dla takich rozpięć wzór na rekonstrukcję sygnału ma postać [5] [31]

$$f(t) = \frac{2}{A+B} \sum_n \langle f, e_n \rangle e_n(t). \quad (2.25)$$

Analogiczne pojęcia i zależności do przedstawionych wyżej dla sygnałów czasu ciągłego należących do przestrzeni $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ dotyczą sygnałów czasu dyskretnego należących do przestrzeni $\mathbf{l}^2(\mathbb{Z})$.

2.1.3 Przykłady baz i rozpięć w przestrzeniach skończeniowymiarowych

W celu zilustrowaniu różnic pomiędzy bazą ortogonalną, bazą biortogonalną i rozpięciem poniżej pokazane są przykłady tych konstrukcji matematycznych w odniesieniu do przestrzeni \mathbb{R}^2 i \mathbb{R}^N .

Baza ortonormalna przestrzeni \mathbb{R}^2

Wektory

$$e_1 = [1, 0]^T, \quad e_2 = [0, 1]^T$$

są wzajemnie prostopadłe (ortogonalne), znormalizowane, liniowo niezależne i tworzą bazę ortonormalną przestrzeni \mathbb{R}^2 .

Baza ortogonalna ciągów liczbowych okresowych

Niech ciąg liczbowy $f[n]$ będzie ciągiem N -okresowym, tj. takim, że

$$f[n] = f[n + N], \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2.26)$$

gdzie N to najmniejsza dodatnia liczba całkowita, dla której powyższa równość jest spełniona, nazywana okresem ciągu. Pokażemy, że zbiór wektorów $\{e_k\}_{0 \leq k < N}$, których elementy są zdefiniowane następująco

$$e_k[n] = e^{ik(2\pi/N)n}, \quad 0 \leq n < N, \quad (2.27)$$

jest zbiorem wektorów ortogonalnych w sensie iloczynu skalarnego przestrzeni N -wymiarowej zdefiniowanego następująco

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] g^*[n], \quad (2.28)$$

gdzie f i g - dowolne wektory rozpatywanej przestrzeni. Iloczyn skalarny wektorów e_k i e_p jest równy

$$\langle e_k, e_p \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(k-p)(2\pi/N)n}, \quad 0 \leq k, p < N. \quad (2.29)$$

Dla $k = p$

$$\langle e_p, e_p \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} e^{i0} = N. \quad (2.30)$$

Dla $k \neq p$

$$\langle e_k, e_p \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \left[e^{i(k-p)(2\pi/N)} \right]^n, \quad -N < k - p < N. \quad (2.31)$$

Podstawiając

$$a = e^{i(k-p)(2\pi/N)}, \quad (2.32)$$

łatwo zauważyć, że $a \neq 1$ (ze względu na warunek $-N < k - p < N$) i do obliczenia (2.31) można zastosować wzór na sumę skończonej liczby wyrazów szeregu geometrycznego

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1 - a^N}{1 - a}. \quad (2.33)$$

Ponieważ

$$a^N = \left[e^{i(k-p)(2\pi/N)} \right]^N = e^{i(k-p)2\pi} = 1,$$

więc mamy

$$\langle e_k, e_p \rangle = \begin{cases} N & \text{jeśli } k = p \\ 0 & \text{jeśli } k \neq p \end{cases}$$

co dowodzi, że zbiór wektorów $\{e_k\}_{0 \leq k < N}$ jest zbiorem ortogonalnym. Jest to warunek wystarczający na to, żeby zbiór był bazą ortogonalną przestrzeni N -wymiarowej. Oznacza to, że każdy ciąg liczbowy $f[n]$ o okresie N może być przedstawiony w postaci

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \langle f, e_k \rangle e_k[n]. \quad (2.34)$$

Współczynniki wagowe

$$F[k] = \langle f, e_k \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e_k^*[n] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-ik(2\pi/N)n}, \quad 0 \leq k < N \quad (2.35)$$

tworzą *dykretną transformatę Fouriera* ciągu okresowego $f[n]$. Transformata ta jest ważnym narzędziem matematycznym przetwarzania sygnałów czasu dyskretnego i jest szerzej omówiona w punkcie 2.2.6.

Bazy biortogonalne przestrzeni \mathbb{R}^2

Niech dane będą wektory:

$$e_1 = [1, 0]^T, \quad e_2 = [1, 1]^T.$$

Łatwo sprawdzić, że nie są one ortogonalne, ale są liniowo niezależne i tworzą bazę przestrzeni \mathbb{R}^2 . Rozpatrzmy drugi zbiór wektorów

$$\tilde{e}_1 = [1, -1]^T, \quad \tilde{e}_2 = [0, 1]^T.$$

Wektory te też nie są ortogonalne, ale są liniowo niezależne i tworzą inną bazę przestrzeni \mathbb{R}^2 . Z bezpośredniego rachunku wynika, że

$$\langle e_1, \tilde{e}_1 \rangle = 1 \quad (2.36)$$

$$\langle e_2, \tilde{e}_1 \rangle = \langle e_1, \tilde{e}_2 \rangle = 0 \quad (2.37)$$

$$\langle e_2, \tilde{e}_2 \rangle = 1. \quad (2.38)$$

Zatem bazy te są wzajemnie ortogonalne, czyli biortogonalne. Współczynniki rzutów wektora $f = [f_1, f_2]^T$ na wektory baz wynoszą odpowiednio

$$c[1] = \langle f, e_1 \rangle = f_1, \quad (2.39)$$

$$c[2] = \langle f, e_2 \rangle = f_1 + f_2 \quad (2.40)$$

$$\tilde{c}[1] = \langle f, \tilde{e}_1 \rangle = f_1 - f_2 \quad (2.41)$$

$$\tilde{c}[2] = \langle f, \tilde{e}_2 \rangle = f_2. \quad (2.42)$$

Łatwo sprawdzić, że

$$c[1] \tilde{e}_1 + c[2] \tilde{e}_2 = f \quad (2.43)$$

$$\tilde{c}[1] e_1 + \tilde{c}[2] e_2 = f \quad (2.44)$$

oraz że

$$c[1] \tilde{c}[1] + c[2] \tilde{c}[2] = \|f\|^2. \quad (2.45)$$

Rozpięcie przestrzeni \mathbb{R}^2

Cechą charakterystyczną rozpięcia jest jego „nadmiarowość”, co jest równoznaczne z brakiem liniowej niezależności. Niech dany będzie następujący zbiór wektorów w przestrzeni \mathbb{R}^2 :

$$g_1 = [1, 0]^T, \quad g_2 = [-1/2, \sqrt{3}/2]^T, \quad g_3 = [-1/2, -\sqrt{3}/2]^T.$$

Wektory te są unormowane, ale nie są względem siebie prostopadłe i nie tworzą bazy ortogonalnej. Łatwo sprawdzić, że nie są one liniowo niezależne, gdyż na przykład wektor pierwszy można wyrazić jako kombinację liniową wektorów drugiego i trzeciego $g_1 = (-1)g_2 + (-1)g_3$. Współczynniki rzutów dowolnego wektora $f = [f_1, f_2]^T$ na poszczególne wektory rozpięcia są odpowiednio równe

$$c[1] = \langle f, g_1 \rangle = f_1 \quad (2.46)$$

$$c[2] = \langle f, g_2 \rangle = -f_1/2 + \sqrt{3}/2 f_2 \quad (2.47)$$

$$c[3] = \langle f, g_3 \rangle = -f_1/2 - \sqrt{3}/2 f_2. \quad (2.48)$$

Energia współczynników $c[n]$ jest równa

$$(c[1])^2 + (c[2])^2 + (c[3])^2 = \frac{3}{2} (f_1^2 + f_2^2) \quad (2.49)$$

$$= \frac{3}{2} \|f\|^2. \quad (2.50)$$

Stałe A i B z warunku (2.19) są sobie równe, więc rozpięcie jest rozpięciem ciasnym. Współczynnik $\frac{3}{2}$ jest miarą nadmiarowości rozpięcia w przestrzeni \mathbb{R}^2 . Ponieważ rozpięcie jest rozpięciem ciasnym, zatem zgodnie z (2.24) wektory dualne mają postać

$$\tilde{g}_1 = [2/3, 0]^T, \quad \tilde{g}_2 = [-1/3, \sqrt{3}/3]^T, \quad \tilde{g}_3 = [-1/3, -\sqrt{3}/3]^T.$$

Współczynniki rzutów dowolnego wektora $f = [f_1, f_2]^T$ na poszczególne wektory dualne to

$$\tilde{c}[1] = \langle f, \tilde{g}_1 \rangle = 2/3 f_1 \quad (2.51)$$

$$\tilde{c}[2] = \langle f, \tilde{g}_2 \rangle = -1/3 f_1 + \sqrt{3}/3 f_2 \quad (2.52)$$

$$\tilde{c}[3] = \langle f, \tilde{g}_3 \rangle = -1/3 f_1 - \sqrt{3}/3 f_2. \quad (2.53)$$

Energia współczynników $\tilde{c}[n]$

$$(\tilde{c}[1])^2 + (\tilde{c}[2])^2 + (\tilde{c}[3])^2 = \frac{2}{3} (f_1^2 + f_2^2) \quad (2.54)$$

$$= \frac{2}{3} \|f\|^2 \quad (2.55)$$

Łatwo sprawdzić, że

$$f = c[1] \tilde{e}_1 + c[2] \tilde{e}_2 + c[3] \tilde{e}_3 \quad (2.56)$$

lub

$$f = \tilde{c}[1] e_1 + \tilde{c}[2] e_2 + \tilde{c}[3] e_3. \quad (2.57)$$

2.2 Czas i częstotliwość

Czas i częstotliwość stanowią dwie główne dziedziny reprezentacji sygnałów. Poniżej przytoczono najważniejsze przekształcenia sygnałów z dziedziny czasu do dziedziny częstotliwości i na odwrót. Spośród całej rodziny przekształceń Fouriera omówimy przekształcenia dotyczące funkcji nieokresowych, ciągów liczbowych nieokresowych i ciągów liczbowych okresowych.

2.2.1 Przekształcenie Fouriera sygnałów czasu ciągłego

Transformata Fouriera funkcji nieokresowych będzie wykorzystywana w niniejszym opracowaniu głównie w wyprowadzeniach i dowodzeniu wzorów i właściwości falek. Dlatego ten rodzaj przekształcenia Fouriera będzie opisany skrótowo. Z punktu widzenia zastosowań w przetwarzaniu sygnałów znacznie ważniejszą rolę odgrywają przekształcenia Fouriera dotyczące ciągów liczbowych i te przekształcenia zostaną wyjaśnione bardziej szczegółowo.

Transformatą Fouriera funkcji $f(t) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ jest funkcja

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (2.58)$$

gdzie $\omega \in \mathbb{R}$ jest *pulsacją* [rad/s], $\omega = 2\pi f$, f częstotliwością [Hz]. $F(\omega)$ istnieje, należy do przestrzeni $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ i jest ograniczona, gdy funkcja $f(t)$ jest bezwzględnie całkowna, tj. gdy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty, \quad (2.59)$$

czyli gdy należy do przestrzeni $\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$. Przynależność do przestrzeni $\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ jest warunkiem wystarczającym, ale nie jest warunkiem koniecznym istnienia transformaty Fouriera o podanych wyżej własnościach.

Odwrotną transformatą Fouriera jest

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (2.60)$$

Iloczyn skalarny sygnałów w dziedzinie czasu $f(t)$ i $g(t)$ może być obliczony za pomocą iloczynu skalarnego ich transformat Fouriera $F(\omega)$ i $G(\omega)$ zgodnie z równością Parsewala [28]

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle F(\omega), G(\omega) \rangle, \quad (2.61)$$

z której wynika wzór Plancherela dotyczący energii sygnału

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.62)$$

Cechą charakterystyczną funkcji i jej transformaty Fouriera jest to, że jednocześnie obydwie nie mogą mieć nośników zawartych w skończonych przedziałach liczbowych. Oznacza to, że jeżeli funkcja ma zwarty nośnik, to jej transformata Fouriera ma nośnik nieograniczony i na odwrót. Przykładem może służyć funkcja „bramkowa” w dziedzinie czasu, zdefiniowana następująco

$$\beta(t) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } t \in [-1/2, +1/2] \\ 0 & \text{jeśli } t \notin [-1/2, +1/2] \end{cases}.$$

Nośnikiem tej funkcji jest przedział $[-1/2, +1/2]$, transformata Fouriera $B(\omega) = \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}$. Nośnikiem transformaty Fouriera jest cała oś liczbowa. Transformata zanika jak $\frac{1}{\omega}$ i określa się to zanikanie jako wolne (w porównaniu do zanikania wykładniczego). Jeżeli transformata Fouriera jest funkcja bramkowa

$$B(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \omega \in [-1/2, +1/2] \\ 0 & \text{jeśli } \omega \notin [-1/2, +1/2] \end{cases},$$

transformatą odwrotną jest funkcja $\frac{1}{2\pi} \frac{\sin(t/2)}{t/2}$ i jej nośnikiem jest cała oś liczbowa.

2.2.2 Zasada nieoznaczoności

Założyliśmy, że rozpatrywane sygnały mają skończoną energię, tj. że

$$\|g(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt < \infty. \quad (2.63)$$

Funkcja podcałkowa po prawej stronie powyższego wzoru, tj.

$$|g(t)|^2, \quad (2.64)$$

nazywana jest *gęstością energii* sygnału $g(t)$. Taki sygnał, a ściślej jego energię, można dodatkowo scharakteryzować za pomocą dwóch parametrów:

odciętej środka ciężkości gęstości energii sygnału

$$\hat{t} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t |g(t)|^2 dt}{\|g(t)\|^2} \quad (2.65)$$

i *wariancji gęstości energii* sygnału

$$\sigma_t^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_0)^2 |g(t)|^2 dt}{\|g(t)\|^2}. \quad (2.66)$$

Pierwiastek z wariancji gęstości energii sygnału, tj. σ_t , jest nazywany *szerokością średniokwadratową* sygnału [28].

Szerokość średniokwadratowa jest miarą stopnia skupienia (rozproszenia) energii sygnału wokół odciętej środka ciężkości. Przedział $[\hat{t} - \sigma_t, \hat{t} + \sigma_t]$ jest przedziałem o największej koncentracji energii sygnału i dla funkcji o nieograniczonym nośniku jest analogiem nośnika funkcji o zwartym nośniku [5].

Energię sygnału w dziedzinie częstotliwości można obliczyć za pomocą wzoru Plancherela (2.62), z którego wynikają dwa parametry sygnału w dziedzinie częstotliwości:

odcięta środka ciężkości widma gęstości energii sygnału

$$\hat{\omega} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega |G(\omega)|^2 d\omega}{\|G(\omega)\|^2} \quad (2.67)$$

i *wariancja widma gęstości energii* sygnału

$$\sigma_\omega^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \hat{\omega})^2 |G(\omega)|^2 d\omega}{\|G(\omega)\|^2}. \quad (2.68)$$

Pierwiastek z wariancji widma gęstości energii, tj. σ_ω , jest nazywany *szerokością średniokwadratową widma* sygnału.

Skupienie energii sygnału wokół środka ciężkości gęstości energii i środka ciężkości widma gęstości energii ma swoje ograniczenie nazywane *zasadą nieoznaczoności*³, wyrażającą się następującą nierównością [28]

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2}. \quad (2.69)$$

Równość zachodzi tylko dla sygnału w postaci funkcji Gaussa.

Jednym z głównych sposobów analizy własności sygnału $f(t)$ jest jego lokalne uśrednianie za pomocą innego sygnału $g(t)$, które wyraża iloczyn

³Nazwa została zapożyczona z zasady nieoznaczoności Heisenberga w fizyce kwantowej [28].

skalarny w dziedzinie czasu $\langle f(t), g(t) \rangle$ lub w dziedzinie częstotliwości $\langle F(\omega), G(\omega) \rangle$. Niech \hat{t} , σ_t , $\hat{\omega}$, σ_ω będą parametrami charakteryzującymi sygnał $g(t)$. Parametr σ_t informuje nas, że impulsy w sygnale $f(t)$ położone w otoczeniu chwili \hat{t} i w odległości od siebie bliskiej σ_t nie zostaną rozróżnione przez wspomniany wyżej iloczyn skalarny, co wynika z właściwości całki oznaczonej. Analogiczna uwaga dotyczy dwóch częstotliwości w sygnale $f(t)$ bliskich częstotliwości $\hat{\omega}$ i o różnicy bliskiej σ_ω , tj. nie zostaną one rozróżnione przez iloczyn skalarny $\langle F(\omega), G(\omega) \rangle$. Parametry σ_t i σ_ω są miarami rozdzielczości w dziedzinie czasu i w dziedzinie częstotliwości sygnału analizującego $g(t)$.

Prostokąt na płaszczyźnie czas-pulsacja o bokach σ_t i σ_ω , którego środkiem jest punkt $(\hat{t}, \hat{\omega})$, jest nazywany kostką Heisenberga danego sygnału. Sygnał przeskalowany $g_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} g(t/s)$, $s > 0$ ma kostkę Heisenberga o bokach $s\sigma_t$ i σ_f/s . Skalowanie sygnału zmienia wymiary kostki Heisenberga, ale powierzchnia kostki pozostaje niezmienniona i jest równa $\sigma_t \sigma_\omega$.

2.2.3 Splot funkcji

Zarówno w przestrzeni funkcji, jak i w przestrzeni ich transformat Fouriera ważną operacją matematyczną jest *splot funkcji*. Splot przyporządkowuje dwóm funkcjom $f(t)$ i $h(t)$ trzecią funkcję $g(t)$, zdefiniowaną następująco⁴

$$g(t) = f * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) h(\tau) d\tau. \quad (2.70)$$

⁴W literaturze dotyczącej przetwarzania sygnałów używane jest również oznaczenie symboliczne splotu funkcji w postaci $g(t) = f(t) * h(t)$, patrz na przykład [28], [15].

Istnieje związek między spłotem i iloczynem skalarnym funkcji. Niech $\bar{h}(t)$ oznacza lustrzane odbicie funkcji $h(t)$ względem prostej $t = 0$, tj.

$$\bar{h}(t) = h(-t). \quad (2.71)$$

Funkcja $\bar{h}(t)$ jest nazywana funkcją rewersyjną względem funkcji $h(t)$. Oznaczmy przez $h_\tau(t)$ translację funkcji $h(t)$, tj.

$$h_\tau(t) = h(t - \tau). \quad (2.72)$$

Wówczas

$$f * h(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) h(\tau - t) dt \quad (2.73)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \bar{h}(t - \tau) dt \quad (2.74)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \bar{h}_\tau(t) dt \quad (2.75)$$

$$= \langle f(t), \bar{h}_\tau(t) \rangle. \quad (2.76)$$

Dowodzi się następujących własności spłotu:

- przemienność spłotu $f * h(t) = h * f(t)$
- rozdzielność spłotu względem dodawania $f * (h + g)(t) = f * h(t) + f * g(t)$
- łączność spłotu $f * (h * g)(t) = (f * h) * g(t)$.

Elementem identycznościowym spłotu jest *dystrybucja delta Diraca* $\delta(t)$, zdefiniowana następująco [28]

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \neq 0 \\ \infty & \text{dla } t = 0 \end{cases} \quad (2.77)$$

oraz

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (2.78)$$

Użyteczną właściwością delty Diraca jest tzw. *właściwość filtracji*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(\tau - t) d\tau = f(t). \quad (2.79)$$

Powyższa właściwość jest również nazywana *właściwością przesiewania* (ang. *sifting property*) [15].

Transformata Fouriera delty Diraca

$$\Delta(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = 1. \quad (2.80)$$

Transformatą Fouriera splotu funkcji jest iloczyn transformat. Niech $F(\omega)$ będzie transformatą Fouriera funkcji $f(t)$, a $H(\omega)$ transformatą funkcji $h(t)$. Wówczas funkcja

$$g(t) = f * h(t) \quad (2.81)$$

ma transformatę Fouriera

$$G(\omega) = F(\omega) H(\omega). \quad (2.82)$$

2.2.4 Splot dyskretny

Fundamentalną operacją przetwarzania sygnałów czasu dyskretnego jest filtracja sygnałów, której modelem matematycznym w dziedzinie czasu jest splot ciągów liczbowych.

Wyrazy ciągu $\{g[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$, który jest splotem dwóch ciągów, $\{f[k]\}_{k \in \mathbb{Z}}$

i $\{h[j]\}_{j \in \mathbb{Z}}$, oblicza się ze wzoru⁵

$$g[n] = f * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k] h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[n-k] h[k], \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2.83)$$

gdzie \mathbb{Z} - zbiór liczb całkowitych.

Elementem identycznościowym splotu dyskretnego jest *impuls jednostkowy* $\delta[n]$, nazywany deltą Kroneckera, zdefiniowany następująco

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } n = 0 \\ 0 & \text{jeśli } n \neq 0 \end{cases}.$$

Jeżeli $f[n] = 0$ dla $n < 0$ i $n \geq L$ i $h[n] = 0$ dla $n < 0$ i $n \geq M$, to $g[n] = 0$ dla $n < 0$ i $n \geq L + M - 1$.

Ciąg $g[n]$, $0 \leq n < L + M - 1$, można obliczyć za pomocą algorytmu od „strony wejścia” albo za pomocą algorytmu od „strony wyjścia”.

W algorytmie od „strony wejścia” oblicza się iloczyn $f[k] h[j]$ i zgodnie ze wzorem (2.83) dodaje do próbki wyjściowej $g[n]$ o numerze $n = k + j$. Ilustruje to poniższa funkcja w MATLABie.

```
function g = splot_we(f,h)
% splot ciągów f i h o długości M i L
% algorytm "od strony wejścia"
M=length(f);
L=length(h);
N=M+L-1;
g = zeros(1,N);
for i=0:1:M-1
```

⁵W literaturze dotyczącej cyfrowego przetwarzania sygnałów używane jest także oznaczenie symboliczne splotu ciągów liczbowych w postaci $g[n] = f[n] * h[n]$, patrz na przykład [10], [15].

```

for j=0:1:L-1
    g(1+i+j)=g(1+i+j)+f(1+i)*h(1+j);
end
end

```

W algorytmie od „strony wyjścia” określa się, które iloczyny $f[k] h[n-k]$ wnoszą wkład do n -tej próbki wyjściowej $g[n]$, $0 \leq n < L + M - 1$. Ilustruje to poniższa funkcja w MATLABie.

```

function g = splot_wy(f,h)
% splot sygnałów f i h o długości M i L
% algorytm "od strony wyjścia"
M = length(f);
L = length(h);
N = M+L-1;
g = zeros(1,N);
if M>=L
    for n=0:1:L-1
        for k=0:1:n
            g(1+n)=g(1+n)+h(1+k)*f(1+n-k);
        end
    end
    for n=L:1:M-1
        for k=0:1:L-1
            g(1+n)=g(1+n)+h(1+k)*f(1+n-k);
        end
    end
    for n=M:1:N-1
        for k=n-(M-1):1:L-1
            g(n+1)=g(n+1)+h(1+k)*f(1+n-k);
        end
    end
end

```

```
        end
    end
else
    for n=0:1:M-1
        for k=0:1:n
            g(1+n)=g(1+n)+f(1+k)*h(1+n-k);
        end
    end
    for n=M:1:L-1
        for k=0:1:M-1
            g(1+n)=g(1+n)+f(1+k)*h(1+n-k);
        end
    end
    for n=L:1:N-1
        for k=n-(L-1):1:M-1
            g(n+1)=g(n+1)+f(1+k)*h(1+n-k);
        end
    end
end
end
```

Dowodzi się następujących własności spłotu dyskretnego:

- przemienność spłotu $f * h[n] = h * f[n]$
- rozdzielność spłotu względem dodawania $f * (h + g)[n] = f * h[n] + f * g[n]$
- łączność spłotu $f * (h * g)[n] = (f * h) * g[n]$.

2.2.5 Przekształcenie Fouriera sygnałów czasu dyskretnego

Transformatą Fouriera sygnału czasu dyskretnego, a więc ciągu liczbowego $x[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, jest funkcja okresowa

$$X(e^{i\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-i\omega n}, \quad (2.84)$$

o okresie 2π . Transformatą odwrotną jest

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\omega}) e^{i\omega n} d\omega. \quad (2.85)$$

Sygnał czasu dyskretnego $x[n]$ może być próbkowany z krokiem N , w wyniku czego powstaje nowy sygnał $x_p[n]$, zdefiniowany następująco

$$x_p[n] = \begin{cases} x[n] & \text{jeśli } n \text{ jest całkowitą wielokrotnością } N, \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases} \quad (2.86)$$

Wyprowadzimy zależność transformaty Fouriera sygnału $x_p[n]$ od transformaty Fouriera sygnału $x[n]$ dla $N = 2$. Łatwo zauważyć, że

$$x_p[n] = \frac{1}{2} (x[n] + (-1)^n x[n]) \quad (2.87)$$

$$= \frac{1}{2} x[n] + \frac{1}{2} e^{-in\pi} x[n]. \quad (2.88)$$

Transformaty Fouriera obydwu stron powyższego równania są następujące

$$\sum_n x_p[n] e^{-in\omega} = \frac{1}{2} \sum_n x[n] e^{-in\omega} + \frac{1}{2} \sum_n e^{-in\pi} x[n] e^{-in\omega} \quad (2.89)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_n x[n] e^{-in\omega} + \frac{1}{2} \sum_n x[n] e^{-in(\omega+\pi)}, \quad (2.90)$$

więc

$$X_p(e^{i\omega}) = \frac{1}{2} (X(e^{i\omega}) + X(e^{i(\omega+\pi)})). \quad (2.91)$$

W metodach cyfrowego przetwarzania sygnałów wykorzystywana jest operacja nazywana *decymacją* sygnału czasu dyskretnego. Decymacja z krokiem N polega na utworzeniu na podstawie sygnału $x[n]$ nowego sygnału $y[n]$ zdefiniowanego następująco

$$y[n] = x[Nn]. \quad (2.92)$$

Transformaty Fouriera obydwu stron powyższego równania są następujące

$$\sum_n y[n] e^{-in\omega} = \sum_n x[Nn] e^{-in\omega}. \quad (2.93)$$

Sygnał $x[Nn]$ jest równy sygnałowi spróbkowanemu z krokiem N , określonymu wzorem (2.86)

$$\sum_n y[n] e^{-in\omega} = \sum_n x_p[Nn] e^{-in\omega}. \quad (2.94)$$

Wprowadzając nową zmienną $k = Nn$ lub równoważnie $n = k/N$, otrzymujemy

$$Y(e^{i\omega}) = \sum_{k=\text{całkowitej wielokrotności } N} x_p[k] e^{-ik\omega/N}. \quad (2.95)$$

Sumowanie można rozciągnąć na wszystkie indeksy k , ponieważ $x_p[k] = 0$, jeśli k nie jest całkowitą wielokrotnością N

$$Y(e^{i\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_p[k] e^{-ik\omega/N}, \quad (2.96)$$

czyli

$$Y(e^{i\omega}) = X_p(e^{i\omega/N}), \quad (2.97)$$

lub

$$Y(e^{iN\omega}) = X_p(e^{i\omega}). \quad (2.98)$$

W przekształceniach falkowych występuje decymacja z krokiem 2 i wówczas na podstawie (2.91) mamy bezpośredni związek pomiędzy transformataą Fouriera sygnału $x[n]$ i sygnału $y[n] = x[2n]$

$$Y(e^{i2\omega}) = \frac{1}{2} \left(X(e^{i\omega}) + X(e^{i(\omega+\pi)}) \right). \quad (2.99)$$

Interpolacją zerami nazywa się tworzenie sygnału $y[n]$ na podstawie sygnału $x[n]$ w następujący sposób

$$y[n] = \begin{cases} x[k] & \text{jeśli } n = kN \\ 0 & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases} \quad (2.100)$$

czyli jest to wstawianie $N - 1$ zer pomiędzy każdą parę sąsiednich próbek sygnału $x[n]$. Związek pomiędzy transformataą Fouriera sygnału interpolowanego zerami $y[n]$ i sygnału $x[n]$ pokazują poniższe przekształcenia

$$Y(e^{i\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] e^{-in\omega} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-ikN\omega} = X(e^{iN\omega}). \quad (2.101)$$

W przekształceniach falkowych wykorzystuje się interpolację zerami dla $N = 2$, czyli wstawia się jedno zero pomiędzy każdą sąsiednią parę próbek. Wówczas

$$y[n] = \begin{cases} x[k] & \text{jeśli } n = 2k \\ 0 & \text{jeśli } n = 2k + 1 \end{cases} \quad (2.102)$$

i

$$Y(e^{i\omega}) = X(e^{i2\omega}). \quad (2.103)$$

Istnieje związek pomiędzy transformataą Fouriera sygnału czasu ciągłego i transformataą Fouriera sygnału czasu dyskretnego uzyskanego w wyniku próbkowania z krokiem $T > 0$ sygnału czasu ciągłego. Związek ten wyraża poniższe twierdzenie.

Twierdzenie. Transformatą Fouriera sygnału czasu dyskretnego $f_d[n]$ otrzymanego w wyniku próbkowania z krokiem T sygnału czasu ciągłego $f(t)$ jest

$$F_d(e^{i\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(\omega + \frac{2k\pi}{T}\right). \quad (2.104)$$

Dowód twierdzenia jest podany na przykład w monografii [12].

2.2.6 Dyskretne przekształcenia Fouriera

Dyskretne przekształcenia Fouriera (ang. *Discrete Fourier Transform*, *Inverse Discrete Fourier Transform*) dotyczą sygnałów czasu dyskretnego $f[n]$ o skończonym czasie trwania $0 \leq n < N$ lub sygnałów okresowych o okresie N .

Dyskretną transformatą Fouriera (DFT) sygnału $f[n]$ jest ciąg okresowy o okresie N

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-ik(2\pi/N)n}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.105)$$

W przypadku sygnału okresowego współczynniki transformaty wystarczy obliczyć dla jednego okresu, przy czym zakres indeksów n nie musi być ciągiem $0, 1, \dots, N-1$, ale może być dowolnym ciągiem kolejnych liczb obejmującym pełny okres, na przykład jeśli N jest liczbą parzystą, to $-N/2, -N/2+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N/2-1$.

Jeżeli sygnał $f[n]$ jest sygnałem rzeczywistym, to nie wszystkie współczynniki transformaty są niezależne. Współczynnik $F[N-k]$ można za-

pisać następująco

$$F[N - k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-i(N-k)(2\pi/N)n} \quad (2.106)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{ik(2\pi/N)n} \quad (2.107)$$

$$= F^*[k]. \quad (2.108)$$

Oznacza to, że mając współczynniki $F[k]$ dla $0 \leq k \leq N/2$, współczynniki o indeksach $N/2 < k < N$ można obliczyć z zależności $F[N - k] = F^*[k]$, podstawiając $k = 1, 2, \dots, N/2 - 1$.

Odwrotną dyskretną transformatę Fouriera (IDFT) wyraża wzór

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[k] e^{in(2\pi/N)k}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (2.109)$$

Wzory (2.105) i (2.109) należy traktować jako definicje DFT i IDFT, a nie jako wzory do obliczania transformat, gdyż zastosowanie ich wymaga wykonania N^2 mnożeń i dodawań liczb zespolonych i jest bardzo nieefektywne obliczeniowo. Istnieje rodzina algorytmów określanych mianem *Fast Fourier Transform* (FFT), których złożoność obliczeniowa jest rzędu $O(N \log_2 N)$ i są one powszechnie wykorzystywane do obliczania DFT i IDFT [33] [10] [21].

Przykładem algorytmu z rodziny FFT jest radix-2, obliczający transformaty N -punktowe dla N będących potęgą dwójki. Wymaga on wykonania $N/2 \log_2 N$ mnożeń na liczbach zespolonych. Rozpatrzmy 1024-punktową dyskretną transformatę Fouriera. Wówczas $N/2 \log_2 N/N^2 = 0,0049$, co oznacza, że radix-2 wymaga 0,49% działań niezbędnych do obliczenia transformat ze wzorów (2.105) albo (2.109).

Splot kołowy

Splot dyskretny zdefiniowany wzorem (2.83)⁶ dotyczy ciągów liczbowych (sygnałów) określonych dla $n \in \mathbb{Z}$. Dla sygnałów o skończonym czasie trwania, tj. określonych na przykład dla $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, $N < \infty$, definiuje się tzw. splot kołowy. Naturalna droga do zdefiniowania splotu kołowego dla sygnałów o skończonym czasie trwania prowadzi poprzez zdefiniowanie najpierw splotu kołowego dla sygnałów okresowych.

Niech dane będą dwa sygnały o skończonym czasie trwania: $f[n]$, $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ i $h[n]$, $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Na podstawie tych sygnałów można utworzyć sygnały okresowe o okresie N , zdefiniowane następująco

$$\check{f}[n] = f[n \bmod N], \quad \check{h}[n] = h[n \bmod N], \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.110)$$

Splot kołowy sygnałów okresowych $\check{f}[n]$ i $\check{h}[n]$ jest sygnałem okresowym $\check{g}[n]$ o okresie N , zdefiniowanym następująco:

$$\check{g}[n] = \check{f} \circledast \check{h}[n] \quad (2.111)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \check{f}[k] \check{h}[n - k] \quad (2.112)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \check{h}[k] \check{f}[n - k] \quad (2.113)$$

dla $n \in \mathbb{Z}$. Indeks k w powyższych wzorach zawiera się w przedziale liczb całkowitych $[0, N - 1]$, natomiast indeks $n - k$ wychodzi poza ten przedział. Sygnał okresowy przyjmuje wszystkie możliwe wartości w jednym okresie, na przykład w okresie odpowiadającym indeksom $[0, N - 1]$. Zatem próbki sygnału o indeksach $m + rN$, $m = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, $r \in \mathbb{Z}$ są równe odpowiednio próbkom sygnału o indeksach $m = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

⁶Splot ten nazywany jest również splotem liniowym.

Odwzorowanie indeksów z dowolnego okresu na okres odpowiadający indeksom $m = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ odbywa się za pomocą operacji modulo N , tj. $m = (m + rN) \bmod N$.

Uwzględniając powyższe oraz sposób konstrukcji sygnałów okresowych $\check{f}[n]$ i $\check{h}[n]$ $n \in \mathbb{Z}$, definicja *splotu kołowego sygnałów o skończonym czasie trwania* przyjmuje postać

$$g[n] = f \circledast h[n] \quad (2.114)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} f[k] h[(n - k) \bmod N] \quad (2.115)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} h[k] f[(n - k) \bmod N] \quad (2.116)$$

dla $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

Splot kołowy sygnałów $f[n]$ i $h[n]$, $0 \leq n < N$ można obliczyć za pomocą dyskretnych przekształceń Fouriera. W tym celu obliczymy dyskretną transformatę Fouriera sygnału $f[n]$

$$F[k] = \sum_{p=0}^{N-1} f[p] e^{-ik(2\pi/N)p}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (2.117)$$

i dyskretną transformatę Fouriera sygnału $h[m]$

$$H[k] = \sum_{m=0}^{N-1} h[m] e^{-ik(2\pi/N)m}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (2.118)$$

Odwrotną dyskretną transformatę Fouriera iloczynu tych transformat

stanowi wzór

$$g[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[k] H[k] e^{in(2\pi/N)k} \quad (2.119)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{p=0}^{N-1} f[p] e^{-ik(2\pi/N)p} \right) \left(\sum_{m=0}^{N-1} h[m] e^{-ik(2\pi/N)m} \right) e^{in(2\pi/N)k}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} f[p] h[m] \sum_{k=0}^{N-1} e^{i(n-p-m)(2\pi/N)k} \quad (2.120)$$

dla $n = 0, 1, \dots, N-1$. W celu uproszczenia powyższych trzech sum zbadajmy sumę

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{i(n-p-m)(2\pi/N)k} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[e^{i(n-p-m)(2\pi/N)} \right]^k. \quad (2.121)$$

Jeżeli $n-p-m$ jest równe całkowitej wielokrotności N , tj. $(n-p-m) \bmod N = 0$, to uwzględniając okresowość funkcji e^{it} , otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left[e^{i(n-p-m)(2\pi/N)} \right]^k = \sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi k} = N. \quad (2.122)$$

Jeżeli $(n-p-m) \bmod N \neq 0$, to powtarzając obliczenia z punktu 2.1.3, dochodzimy do wniosku, że

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left[e^{i(n-p-m)(2\pi/N)} \right]^k = 0, \quad (2.123)$$

czyli że

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{i(n-p-m)(2\pi/N)k} = \begin{cases} N & \text{jeśli } (n-p-m) \bmod N = 0 \\ 0 & \text{jeśli } (n-p-m) \bmod N \neq 0. \end{cases}$$

Z potrójnej sumy (2.120) pozostają tylko składniki, których indeksy spełniają warunek $(n-p-m) \bmod N = 0$. Obliczając z tego warunku

$m = (n - p) \bmod N$ i zastępując w (2.120) indeks m wyrażeniem $(n - p) \bmod N$, ostatecznie otrzymujemy

$$g[n] = \sum_{p=0}^{N-1} f[p] h[(n - p) \bmod N], \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (2.124)$$

co dowodzi postawionej wcześniej tezy, że spłot kołowy dwóch sygnałów okresowych można obliczyć za pomocą dyskretnych przekształceń Fouriera.

W celu obliczenia spłotu kołowego za pomocą dyskretnych przekształceń Fouriera należy obliczyć: dyskretne transformaty Fouriera $F[k] = DFT\{f[n]\}$, $0 \leq k < N$, $H[k] = DFT\{h[n]\}$, $0 \leq k < N$ i dyskretną transformatę Fouriera sygnału $g[n]$ według wzoru

$$G[k] = F[k] H[k], \quad 0 \leq k < N. \quad (2.125)$$

Odwrotna dyskretna transformata Fouriera $IDFT\{G[k]\}$ jest poszukiwanym rozwiązaniem.

Poniżej zamieszczono funkcję w języku MATLAB realizującą opisany wyżej sposób obliczania spłotu kołowego dwóch sygnałów z wykorzystaniem algorytmu FFT obliczania dyskretnych transformat Fouriera.

```
function [g]=spłot_FFT(f,h)
% spłot sygnałów o długości L i M za pomocą FFT
L=length(f);
M=length(h);
N=L+M-1;
a=zeros(1,N);
for n=1:1:M
    a(n)=f(n);
end
b=zeros(1,N);
```

```

for n=1:1:L
    b(n)=h(n);
end
A=fft(a);
B=fft(b);
G=zeros(1,N);
for n=1:1:N
    G(n)=A(n)*B(n);
end
g=zeros(1,N);
g=ifft(G);

```

Splot kołowy może służyć do obliczenia splotu liniowego. Niech dane będą dwa sygnały o skończonym czasie trwania: $f[n]$, $0 \leq n < L$ i $h[n]$, $0 \leq n < M$. Splot liniowy tych sygnałów $f * h[n]$ jest sygnałem określonym dla $0 \leq n < N$, gdzie $N = L + M - 1$. Utwórzmy sygnały o długości N próbek według wzorów:

$$\check{f}[n] = \begin{cases} f[n] & \text{jeśli } 0 \leq n < L \\ 0 & \text{jeśli } L \leq n < N \end{cases}$$

$$\check{h}[n] = \begin{cases} h[n] & \text{jeśli } 0 \leq n < M \\ 0 & \text{jeśli } M \leq n < N \end{cases}$$

Wówczas

$$f * h[n] = \check{f} \circledast \check{h}[n], \quad n = 0, 1, 2, \dots, N - 1, \quad (2.126)$$

co oznacza, że splot liniowy sygnałów o skończonej długości może być obliczony za pomocą dyskretnych przekształceń Fouriera.

2.2.7 Okienkowa transformata Fouriera

Przekształcenie Fouriera definiuje reprezentację sygnału $g(t)$ w dziedzinie częstotliwości f lub pulsacji ω , przy czym $\omega = 2\pi f$. Dwie równoważne reprezentacje (w dziedzinie czasu i w dziedzinie częstotliwości) mogą się mocno różnić „kształtem”. Delta Diraca jest w dziedzinie czasu impulsem o nieskończenie krótkim czasie trwania, natomiast jej transformata Fouriera jest funkcją stałą równą 1 dla każdej częstotliwości. Nośnik delty Diraca w dziedzinie czasu jest nieskończenie krótki, natomiast nośnik w dziedzinie częstotliwości jest nieskończenie długi. Funkcja Gaussa ma tę samą postać w dziedzinie czasu, jak i w dziedzinie częstotliwości. Transformata Fouriera funkcji Gaussa $g(t) = e^{-\pi t^2}$ jest równa $G(f) = e^{-\pi f^2}$. Inżynierowie wolą używać częstotliwości zamiast pulsacji, natomiast matematycy na odwrót. To, że funkcja Gaussa ma dokładnie tę samą postać w dziedzinie czasu i w dziedzinie częstotliwości, można przytaczać jako argument za „wyższością” częstotliwości nad pulsacją. Oczywiście kształt funkcji Gaussa jest zachowany w dziedzinie pulsacji, gdyż $g(t) = e^{-t^2/2}$ ma transformatę Fouriera $G(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}$. Inną ważną własnością funkcji Gaussa jest jej bardzo szybkie zanikanie. I tak, na przykład $g(t) = e^{-\pi t^2}$ przyjmuje wartości $g(0) = 1$, $g(1) = 0,0432$, $g(2) = 3,4873 \cdot 10^{-6}$, $g(3) = 5,2555 \cdot 10^{-13}$. Stąd można przyjąć, że długość nośnika, teoretycznie nieskończona zarówno w dziedzinie czasu, jak i w dziedzinie częstotliwości, w praktyce jest skończona.

Niezależnie od tego, jaki sygnał jest poddawany przekształceniu Fouriera, to w jego wyniku, czyli w transformacie Fouriera, nie będzie informacji o lokalnych w czasie własnościach częstotliwościowych sygnału. Jeżeli na przykład w pewnym przedziale czasu $[t_1, t_2]$ w przetwarzanym sygnale dominuje lub istnieje wyłącznie sygnał $\cos(2\pi f_1 t)$, a w innym przedziale czasu $[t_3, t_4]$, $t_3 > t_2$ sygnał $\cos(2\pi f_2 t)$, $f_1 \neq f_2$, to w transfor-

macie Fouriera będzie informacja, że w sygnale są częstotliwości f_1 i f_2 , ale nie będzie informacji, w jakich przedziałach czasu te częstotliwości występują.

Informację o lokalnych w czasie własnościach częstotliwościowych sygnału zachowuje tzw. *okienkowe przekształcenie Fouriera* (ang. *Windowed Fourier Transform*). Jest ono związane z tzw. *okienkowaniem sygnału*. Okienkowanie polega na pomnożeniu sygnału przez funkcję nazywaną *funkcją okna*, która poza skończonym nośnikiem (zwartym) jest równa zero. Okienkowanie sygnału bywa stosowane w obliczaniu dyskretnej transformaty Fouriera w celu zmniejszenie tzw. przecieku widmowego sygnału i wtedy nośnik okna jest równy długości sygnału [26]. W okienkowym przekształceniu Fouriera nośnik okna jest dużo krótszy od długości transformowanego sygnału.

Koncepcja okienkowej transformaty Fouriera dla przypadku sygnałów czasu dyskretnego zostanie przedstawiona na przykładzie zaczerpniętym z [23]. Niech oknem będzie ciąg liczbowy o długości N , będący spróbkowanym sinusem w przedziale równym połowie okresu sinusa, tj.

$$w[n] = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{N}(n + 0,5)\right) & \text{jeśli } 0 \leq n < N \\ 0 & \text{jeśli } n < 0 \text{ lub } n \geq N. \end{cases} \quad (2.127)$$

Zakładamy, że obliczeniu okienkowej transformaty Fouriera podlegają próbki sygnału $f[n]$ $n \geq 0$ w liczbie równej wielokrotności połowy długości okna ($N/2$). Rozpatrzmy przesunięte o wielokrotność $N/2$ wersje okna $w[n - mN/2]$ i odpowiadające im okienkowane wersje sygnału $f[n]$

$$f_m[n] = w[n - mN/2] f[n], \quad n \geq 0, \quad m \geq 0. \quad (2.128)$$

Okienkowane wersje sygnału $f_m[n]$ i $f_{m+1}[n]$ zachodzą na siebie w 50%. Z okienkowanego sygnału $f_m[n]$ tworzymy ciąg $\{g_m[l]\}_{0 \leq l < N}$

$$g_m[l] = f_m[mN/2 + l], \quad 0 \leq l < N. \quad (2.129)$$

Formalnie ciąg $\{g_m[l]\}_{0 \leq l < N}$ można traktować jako jeden okres ciągu okresowego. Ciąg $g_m[l]$ jest poddawany N - punktowej dyskretnej transformacji Fouriera i w wyniku powstaje okienkowa transformata Fouriera sygnału $f[n]$, której współczynniki są równe

$$Sf[m, k] = \sum_{l=0}^{N-1} w[l] f[mL/2 + l] e^{-ik\frac{2\pi}{N}l}, \quad m \geq 0, \quad 0 \leq k < N. \quad (2.130)$$

W praktyce do obliczania DFT każdego ciągu $g_m[l]$ używa się algorytmu FFT. Wersja radix-2 algorytmu FFT wymaga sygnału zawierającego N_1 próbek, gdzie N_1 jest potęgą liczby 2 i N_1 musi być nie mniejsze niż N . Jeśli $N_1 > N$, to ciąg $\{g_m[l]\}_{0 \leq l < N}$ należy dopełnić na końcu $N_1 - N$ zerami. Jeżeli okienkową transformatę Fouriera oblicza się dla $0 \leq m < M$, to jej złożoność obliczeniowa jest $O(MN \log_2 N)$.

Można postawić pytanie dotyczące rozdzielczości okienkowej transformaty Fouriera w dziedzinie czasu, tj. dlaczego okno jest przesuwane o połowę jego długości. Odpowiedź może być następująca. Każda dobra reprezentacja sygnału powinna zachowywać jego własności. Za kryterium zachowania własności sygnału w nowej reprezentacji można uznać możliwość obliczenia na podstawie tej nowej reprezentacji sygnału oryginalnego, tj. możliwość wykonania doskonałej rekonstrukcji sygnału. Matematyk określi tę własność przekształcenia krótko: musi istnieć transformata odwrotna.

Pokażemy, że okno w postaci ciągu (2.127) i przesunięcia w dziedzinie czasu o połowę długości tego okna dają reprezentację umożliwiającą doskonałą rekonstrukcję sygnału. W tym celu zbadajmy ciąg $y[n]$ zdefi-

niowany następująco

$$y[n] = \sum_m f_m[n] w[n - mN/2] \quad (2.131)$$

$$= \sum_m f[n] (w[n - mN/2])^2 \quad (2.132)$$

$$= f[n] \sum_m p[n - mN/2], \quad (2.133)$$

gdzie $p[n - mN/2] = (w[n - mN/2])^2$. Z ostatniego równania widać, że warunkiem doskonałej rekonstrukcji sygnału jest równość

$$\sum_m p[n - mN/2] = 1. \quad (2.134)$$

Dla każdego n w powyższej sumie są tylko co najwyżej dwa różne od zera składniki, gdyż tylko dwa okna przesunięte względem siebie o $N/2$ zachodzą w połowie na siebie. Zgodnie z (2.127)

$$p[n - mN/2] = \sin^2 \left(\frac{\pi}{N}(n - mN/2 + 0, 5) \right), \quad (2.135)$$

$$p[n - (m + 1)N/2] = \sin^2 \left(\frac{\pi}{N}(n - (m + 1)N/2 + 0, 5) \right) \quad (2.136)$$

$$= \cos^2 \left(\frac{\pi}{N}(n - mN/2 + 0, 5) \right), \quad (2.137)$$

więc

$$\sum_m p[n - mN/2] = 1. \quad (2.138)$$

Dla początkowych $N/2$ i końcowych $N/2$ próbek sygnału $f[n]$, gdzie jest tylko jedno okno, należałoby podać inny wzór na doskonałą rekonstrukcję sygnału. Jednakże w cyfrowym przetwarzaniu sygnałów często początkowe i końcowe próbki nie mają znaczenia (są pomijane).

Kwadrat modułu okienkowej transformaty Fouriera sygnału $f[n]$

$$| Sf[m, k] |^2 \quad (2.139)$$

jest nazywany *spektrogramem* sygnału $f[n]$. Spektrogram obliczony z wykorzystaniem algorytmu FFT jest układem dyskretnych punktów na płaszczyźnie czas-częstotliwość (pulsacja). Indeks m odpowiada chwili czasowej $t_m = m\Delta NT$, gdzie ΔN - liczba niepokrywających się próbek dwóch sąsiednich okien, T - okres próbkowania. Indeks k odpowiada pulsacji $\omega_k = k\frac{2\pi}{N}/T$. Pulsacje ω_k dla $0 \leq k \leq N/2$ odpowiadają dodatnim częstotliwościom, pulsacje ω_k dla $N/2 < k < N$ odpowiadają ujemnym częstotliwościom. W przypadku sygnału rzeczywistego wystarczy zapamiętać tylko współczynniki o indeksach $0 \leq k \leq N/2$ (patrz punkt 2.2.6).

Cechą charakterystyczną dekompozycji sygnału za pomocą okienkowej transformaty Fouriera jest pokrycie płaszczyzny czas-częstotliwość kostkami Heisenberga „atomów” $g(t - mt_0) e^{ik2\pi f_0 t}$, których wszystkie kostki mają te same wymiary.

2.2.8 Okienkowa transformata Fouriera z okienkowaniem funkcją Gaussa

Okienkowa transformata Fouriera sygnału czasu ciągłego $f(t)$ jest zdefiniowana następująco

$$Sf(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(\tau - t) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (2.140)$$

gdzie $g(\tau)$ jest funkcją okna. Z definicji wynika, że transformata ta jest funkcją dwóch zmiennych ciągłych: czasu t i pulsacji ω . Wygodnie jest zdefiniować zmodulowaną funkcję okna

$$g_{t,\omega}(\tau) = e^{i\omega\tau} g(\tau - t) \quad (2.141)$$

i zapisywać okienkową transformatę Fouriera w postaci iloczynu skalarnego sygnału $f(\tau)$ i zmodulowanej funkcji okna $g_{t,\omega}(\tau)$

$$Sf(t, \omega) = \langle f, g_{t,\omega} \rangle. \quad (2.142)$$

Względy numeryczne wymagają dyskretyzacji okienkowej transformaty Fouriera, tj. wyznaczenia punktów na płaszczyźnie czas-częstotliwość (t_m, ω_k) , w których ma być obliczona transformata $Sf[m, k] = Sf(t_m, \omega_k)$.

Niech $t_0 > 0$ będzie krokiem, z jakim wykonana będzie dyskretyzacja osi czasu, a $\omega_0 > 0$ krokiem, z jakim będzie wykonana dyskretyzacja osi pulsacji. Wprowadzając następujące oznaczenie zdyskretyzowanej, zmodulowanej funkcji okna

$$g_{m,k}(t) = g(t - mt_0) e^{ik\omega_0 t}, \quad (2.143)$$

zdyskretyzowaną okienkową transformatę Fouriera można zapisać następująco

$$Sf[m, k] = \langle f, g_{m,k} \rangle, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.144)$$

Zagadnienie wyboru wartości t_0 i ω_0 zostało rozwiązane dla *rozpięć*, o których była mowa w punkcie 2.1.2. Zbiór $\{g_{m,k}\}$, $(m, k) \in \mathbb{Z}^2$ stanowi rozpięcie, jeśli istnieją dwie stałe $0 < A \leq B < \infty$, takie że

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \leq \sum_{m,k} |\langle f, g_{m,k} \rangle|^2 \leq B \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \quad (2.145)$$

dla każdego sygnału $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Wówczas sygnał $f(t)$ można zrekonstruować według wzoru

$$f(t) = \sum_{m,k} Sf[m, k] \tilde{g}_{m,k}(t), \quad (2.146)$$

gdzie $\{\tilde{g}_{m,k}\}$ to wektory rozpięcia dualnego. Z praktycznego punktu widzenia szczególnie interesujące są rozpięcia ciasne, gdy $A = B$, w przypadku których powyższy wzór przyjmuje postać

$$f(t) = A^{-1} \sum_{m,k} \langle f, g_{m,k} \rangle g_{m,k}(t). \quad (2.147)$$

Jak zostało wcześniej wspomniane, największą koncentrację energii zarówno w dziedzinie czasu, jak i w dziedzinie częstotliwości ma funkcja Gaussa i jest ona często wykorzystywana jako funkcja okna

$$g(t) = \pi^{-1/4} e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (2.148)$$

W pracy [5] podano, że układ wektorów

$$g_{m,k}(t) = \pi^{-1/4} e^{-\frac{(t-mt_0)^2}{2}} e^{ik\omega_0 t}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.149)$$

dla $t_0 = 1$ i $\omega_0 = \pi/2$ tworzy rozpięcie ze stałymi $A = 3,854$ i $B = 4,147$. Stałe A i B spełniają warunek $B/A - 1 = 0,076 \ll 1$, więc rozpięcie może być uznane za rozpięcie ciasne i rekonstrukcja sygnału może być wykonana według wzoru (2.147).

2.3 Funkcje o nośniku zwartym

Jak wspomniano we wprowadzeniu, ważną klasą falek są *falki o nośnikach zwartych* (ang. *compactly supported wavelets*). W niniejszej pracy rozpatrywane są falki, które przyjmują wartości rzeczywiste, tj. należące do \mathbb{R} , i których dziedziną jest prosta \mathbb{R} . Poniżej wyjaśniono pojęcie nośnika zwartego funkcji.

Nośnikiem funkcji jest zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartość różną od zera. Oznaczając nośnik literą Q , definicję nośnika symbolicznie można zapisać następująco

$$Q = \{t \in \mathbb{R} \mid \psi(t) \neq 0\}. \quad (2.150)$$

Zilustrujemy powyższą definicję poniższym przykładem. Niech funkcja $f(t)$ będzie zdefiniowana następująco

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{jeśli } |t| < \pi \\ 0 & \text{jeśli } |t| \geq \pi. \end{cases}$$

Nośnikiem funkcji $f(t)$ jest suma dwóch przedziałów otwartych $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$.

W celu wyjaśnienia pojęcia *nośnik zwarty* wprowadzimy dwa dodatkowe pojęcia: otoczenia punktu i punktu skupienia zbioru.

Otoczeniem punktu t na osi liczbowej \mathbb{R} jest przedział $(t - \delta, t + \delta)$, $\delta > 0$.

Punktem skupienia zbioru jest punkt, w którego każdym otoczeniu jest punkt tego zbioru.

Łatwo zauważyć, że nośnik funkcji $f(t)$ ma trzy punkty skupienia, które do tego zbioru nie należą. Są to punkty: $t = -\pi$, $t = 0$ i $t = \pi$.

Nośnik nazywamy *nośnikiem domkniętym*, jeśli zawiera wszystkie punkty skupienia nośnika.

Nośnikiem domkniętym funkcji $f(t)$ jest zbiór punktów $(-\pi, 0) \cup (0, \pi) \cup \{-\pi, 0, \pi\}$, tj. przedział domknięty $[-\pi, \pi]$.

Nośnik domknięty i ograniczony jest *nośnikiem zwartym*.

Nośnik domknięty funkcji $f(t)$ jest ograniczony, bo spełnia warunek ograniczenia $-\pi \leq t \leq \pi$, jest zatem nośnikiem zwartym.

Termin nośnik można zastąpić terminem zbiór w przestrzeni liczb rzeczywistych \mathbb{R} . Przedział domknięty $[a, b]$ na osi liczbowej \mathbb{R} , taki że $-\infty < a < b < \infty$, jest zbiorem zwartym.

W powyższym przedstawieniu pojęcia zwartości zbioru ograniczono się do najprostrzej przestrzeni, jaką jest prosta \mathbb{R} . Czytelnika zainteresowanego bardziej szczegółowym omówieniem pojęcia zwartości zbioru w dowolnej przestrzeni topologicznej odsyłamy do podręczników topologii, na przykład do podręcznika [22].

Falki ortogonalne o zwartym nośniku opisane w punkcie 4.2 i falki biortogonalne o zwartym nośniku opisane w punkcie 4.3 przyjmują poza skończonym przedziałem $[a, b]$ wartości równe zero. W punktach brzegowych $t = a$ i $t = b$ również przyjmują wartość zero. W przedziale

otwartym (a, b) przyjmują wartość zero w skończonej liczbie punktów. Nie istnieją wzory analityczne pozwalające obliczać wartości tego rodzaju falek, ale istnieje algorytm iteracyjny nazwany kaskadowym, pozwalający obliczać wartość falki z dowolną dokładnością.

3 Analiza wieloskalowa sygnałów

Analiza wieloskalowa¹ jest podstawą przekształceń falkowych sygnałów. Stanowi elegancki system aksjomatyczny, opracowany w roku 1986 przez Stefana Mallata i Yves Meyera, prowadzący bezpośrednio do efektywnych metod przetwarzania sygnałów niestacjonarnych. Ponieważ książka ta jest adresowana w pierwszej kolejności do inżynierów, a w drugiej do matematyków, więc przedstawienie istoty analizy wieloskalowej rozpoczniemy od intuicyjnego ujęcia na przykładzie tzw. analizy wieloskalowej Haara.

3.1 Nieformalne wprowadzenie do analizy wieloskalowej

W metodach falkowych przetwarzania sygnałów występują dwa ściśle ze sobą związane pojęcia: *skala* i *rozdzielczość*. Rozumienie pojęcia skali jest podobne do potocznego, związanego chociażby z mapą. W dużej skali nie widać szczegółów, bo jest mała rozdzielczość; w małej skali widać szczegóły, bo jest duża rozdzielczość. Matematycznie skala będzie reprezentowana przez zmienną $s > 0$, przy czym szczególnie interesujące będą skale diadyczne, tj. takie, że $s = 2^j$, $j \in \mathbb{Z}$. Odwrotność skali, w szczególności

¹W literaturze oprócz terminu *analiza wieloskalowa* używany jest termin *analiza wielorozdzielcza* [2] (ang. *multiresolution analysis*).

diadczej, tj. $\frac{1}{s} = 2^{-j}$, $j \in \mathbb{Z}$, będzie nazywana rozdzielczością. Skalę (a tym samym rozdzielczość) można powiązać z częstotliwością i za pomocą analizy falkowej przeprowadzić analizę częstotliwościową sygnału z uwzględnieniem własności lokalnych sygnału w dziedzinie czasu. To upodabnia falkową analizę wieloskalową do okienkowej analizy Fouriera, ale w przeciwieństwie do reprezentacji, jaką jest okienkowa transformata Fouriera, falkowa reprezentacja wieloskalowa nie musi być reprezentacją redundancyjną. Wieloskalowa reprezentacja falkowa sygnału czasu dyskretnego o długości N próbek może składać się z N współczynników falkowych umożliwiających rekonstrukcję sygnału.

Rozważmy przestrzeń funkcji stałych na przedziałach $[n, n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}$, oznaczając ją symbolem V_0 . Łatwo jest skonstruować bazę tej przestrzeni, gdyż wystarczy zdefiniować funkcję

$$\phi_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } t \in [0, 1) \\ 0 & \text{jeśli } t \notin [0, 1) \end{cases} \quad (3.1)$$

i przyjmując jako bazę zbiór translacji całkowitoliczbowych funkcji $\phi_0(t)$, tj.

$$\{\phi_0(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}. \quad (3.2)$$

Funkcję $\phi_0(t)$ charakteryzuje jednostkowa norma

$$\|\phi_0(t)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_0(t)|^2 dt} = \sqrt{\int_0^1 |\phi_0(t)|^2 dt} = 1 \quad (3.3)$$

oraz równość

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_0(t) dt = \int_0^1 \phi_0(t) dt = 1. \quad (3.4)$$

Takie same własności ma każda translacja $\phi_0(t - n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Nośnikiem funkcji $\phi_0(t)$ jest przedział $[0, 1)$, zaś nośnikiem translacji $\phi_0(t - n)$ jest przedział $[n, n + 1)$. Nośniki funkcji tworzących bazę są rozłączne, więc

iloczyn skalarny dwóch translacji $\langle \phi_0(t-n), \phi_0(t-m) \rangle$ jest równy 1, gdy $n = m$ i 0, gdy $n \neq m$, zatem baza jest bazą ortonormalną.

Skalując argument t i biorąc odpowiednie translacje przeskalowanej funkcji $\phi_0(t)$, można tworzyć inne przestrzenie funkcji „schodkowych”. Interesujący jest ciąg skal diadycznych $s = 2^j$, $j \in \mathbb{Z}$.

Oznaczmy przez $\phi_1(t)$ przeskalowaną ze współczynnikiem skalowania $2^1 = 2$ i pomnożoną przez współczynnik $1/\sqrt{2}$ funkcję $\phi_0(t)$, tj.

$$\phi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0(t/2) = \sqrt{2^{-1}} \phi_0(2^{-1}t). \quad (3.5)$$

Nośnikiem funkcji $\phi_1(t)$ jest przedział $[0, 2)$, a dzięki współczynnikowi $\sqrt{2^{-1}}$ funkcja jest znormalizowana. Zbiór funkcji

$$\{\phi_1(t-2n)\}_{n \in \mathbb{Z}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0\left(\frac{t-2n}{2}\right) \right\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{\sqrt{2^{-1}} \phi_0(2^{-1}t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \quad (3.6)$$

jest bazą ortonormalną przestrzeni V_1 funkcji stałych na przedziałach $[2n, 2n+2)$, $n \in \mathbb{Z}$. Każdą funkcję stałą na przedziałach $[2n, 2n+2)$, $n \in \mathbb{Z}$ można wyrazić w bazie przestrzeni V_0 (funkcji stałych na przedziałach $[n, n+1)$, z czego wynika, że V_0 zawiera przestrzeń V_1 , co symbolicznie zapisujemy jako $V_1 \subset V_0$. Analogicznie można pokazać, że zbiór funkcji

$$\{\phi_{-1}(t-2^{-1}n)\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{\sqrt{2} \phi_0(2t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \quad (3.7)$$

jest bazą ortonormalną przestrzeni funkcji stałych na przedziałach $[n/2, n/2+1/2)$, $n \in \mathbb{Z}$. Przestrzeń V_{-1} zawiera przestrzeń V_0 , czyli $V_1 \subset V_0 \subset V_{-1}$.

Ogólnie przestrzeń funkcji „schodkowych” V_j (stałych na przedziałach $[2^j n, 2^j n + 2^j)$, $n \in \mathbb{Z}$) ma bazę ortonormalną $\{\sqrt{2^{-j}} \phi_0(2^{-j}t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Dowodzi się, że przestrzeń będąca sumą wszystkich przestrzeni V_j , $j \in \mathbb{Z}$, oznaczana symbolicznie

$$\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j,$$

jest zbiorem gęstym w przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$, tzn. że każdą funkcję o skończonej energii można z dowolną dokładnością przybliżyć funkcją schodkową [31]. Użyta wyżej funkcja $\phi_0(t)$ należy do tzw. *funkcji skalujących* i jest nazywana *funkcją skalującą Haara*.

3.1.1 Aproksymacja sygnału w przestrzeniach funkcji skalującej

Założmy, że możemy mierzyć pewien sygnał czasu ciągłego $f(t)$ i że interesuje nas przybliżenie tego sygnału w postaci funkcji schodkowej z przestrzeni V_0 . Wystarczy zarejestrować wartości sygnału począwszy od pewnej chwili czasowej, umownie przyjętej za chwilę $t = 0$, i mierzyć sygnał z odstępem czasu Δt . Powstały w ten sposób ciąg liczbowy $f[n] = f(n\Delta t)$, $n \geq 0$ stanowi wagi przy funkcjach bazy przestrzeni V_0 . Funkcją przybliżającą sygnał $f(t)$ jest funkcja

$$f_0(t) = \sum_{n \geq 0} a_0[n] \phi_0(t - n), \quad (3.8)$$

gdzie $a_0[n] = f[n]$, $n \geq 0$. Taka prosta postać funkcji $f_0(t)$ wynika ze specyficznych własności funkcji tworzących bazę, a mianowicie rozłącznych nośników i stałej, równej 1, wartości w przedziale liczbowym stanowiącym nośnik funkcji.

Naturalne jest pytanie: czy można przybliżyć sygnał $f(t)$ za pomocą funkcji schodkowej z przestrzeni V_1 , w której nośniki funkcji bazy są dwa razy szersze niż nośniki funkcji bazy przestrzeni V_0 ? Oczywiście tak, ale przybliżenie sygnału $f(t)$ funkcją schodkową z przestrzeni V_1 będzie pozbawione pewnych szczegółów (detali) sygnału w stosunku do przybliżenia z przestrzeni V_0 . Przybliżenie sygnału z przestrzeni V_1 ma postać

$$f_1(t) = \sum_{n \geq 0} a_1[n] \phi_1(t - 2n). \quad (3.9)$$

Współczynniki $a_1[n]$ można obliczyć w prosty sposób na podstawie współczynników $a_0[n]$. Naturalnym jest przyjęcie, że w przedziale $[2n, 2n+2)$, który jest nośnikiem funkcji $\phi_1(t-2n)$ funkcja $f_1(t)$ powinna być równa średniej wartości funkcji $f_0(t)$ w tym przedziale. Stąd równanie

$$a_1[0] \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \int_0^2 (a_0[0] \phi_0(t) + a_0[1] \phi_0(t-1)) dt, \quad (3.10)$$

z którego wynika, że

$$a_1[0] = \frac{1}{\sqrt{2}} a_0[0] + \frac{1}{\sqrt{2}} a_0[1]. \quad (3.11)$$

Analogicznie oblicza się $a_1[1]$

$$a_1[1] = \frac{1}{\sqrt{2}} a_0[2] + \frac{1}{\sqrt{2}} a_0[3]. \quad (3.12)$$

Ogólnie

$$a_1[n] = \frac{1}{\sqrt{2}} a_0[2n] + \frac{1}{\sqrt{2}} a_0[2n+1]. \quad (3.13)$$

Zdefiniujmy ciąg $h[n]$ o wyrazach $h[0] = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $h[1] = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i pozostałych równych 0. Powyższy wzór na $a_1[n]$ możemy zapisać następująco

$$a_1[n] = \sum_{i=0}^1 a_0[2n+i] h[i]. \quad (3.14)$$

Zdefiniujmy jeszcze ciąg rewersyjny względem ciągu $h[n]$, tj. $\bar{h}[n] = h[-n]$. Ciąg ten jest odpowiedzią impulsową filtru uśredniającego nazywanego *dolnoprzepustowym filtrem Haara*. Wzór na współczynnik $a_1[n]$ przyjmuje postać

$$a_1[n] = \sum_{i=-1}^0 \bar{h}[i] a_0[2n-i] = \bar{h} * a_0[2n]. \quad (3.15)$$

Korzystając z własności przemienności splotu, możemy napisać

$$a_1[n] = a_0 * \bar{h}[2n]. \quad (3.16)$$

Łatwo sprawdzić, że wzór ten można uogólnić i że opisuje on przejście od reprezentacji sygnału w przestrzeni V_j do reprezentacji w przestrzeni V_{j+1}

$$a_{j+1}[n] = a_j * \bar{h}[2n]. \quad (3.17)$$

Wzór (3.17) wyraża współczynniki aproksymacji sygnału w przestrzeni V_{j+1} za pomocą filtracji cyfrowej współczynników aproksymacji w przestrzeni V_j filtrem $\bar{h}[n]$ oraz decymacji, tj. z pominięciem co drugiego obliczonego współczynnika. Jest to jeden z dwóch wzorów definiujących dekompozycję sygnału za pomocą tzw. *szybkiego ortogonalnego przekształcenia falkowego*.

3.1.2 Falka Haara

Z poprzedniego punktu wiemy, że przechodząc od reprezentacji sygnału w przestrzeni V_j do przestrzeni V_{j+1} tracimy detale sygnału. Postawmy pytanie: co zrobić, żeby zachować szczegóły i móc powrócić do reprezentacji w mniejszej skali? Odpowiedź brzmi: należy skonstruować nową przestrzeń W_{j+1} i w przestrzeni tej zachować detale gubione przy przejściu ze skali 2^j do skali 2^{j+1} . Oznacza to, że

$$f_j(t) - f_{j+1}(t) \in W_{j+1}. \quad (3.18)$$

Żeby pokazać, jak skonstruować bazę przestrzeni W_{j+1} , powrócimy do przestrzeni V_0 , V_1 i pokażemy, jak skonstruować bazę przestrzeni W_1 . Będą w niej przechowywane detale sygnału gubione przy przejściu od reprezentacji w skali 2^0 do reprezentacji w skali 2^1 .

Obliczmy różnicę między aproksymacjami w przedziale $[0, 2)$

$$\begin{aligned} f_0(t) - f_1(t) &= a_0[0] \phi_0(t) + a_0[1] \phi_0(t-1) \\ &- \frac{1}{2} (a_0[0] + a_0[1]) (\phi_0(t) + \phi_0(t-1)) \\ &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} a_0[0] + \frac{1}{\sqrt{2}} a_0[1] \right) \\ &\quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0(t-1) \right) \end{aligned}$$

Ostatnia równość nasuwa myśl, żeby jako funkcję bazy przestrzeni W_1 w przedziale $[0, 2)$ przyjąć

$$\psi_1(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0(t-1), \quad (3.19)$$

a jako współczynnik

$$d_1[0] = -\frac{1}{\sqrt{2}} a_0[0] + \frac{1}{\sqrt{2}} a_0[1]. \quad (3.20)$$

Wówczas otrzymujemy

$$f_0(t) = f_1(t) + d_1[0] \psi_1(t). \quad (3.21)$$

Łatwo pokazać, że

$$\langle \phi_1(t), \psi_1(t) \rangle = 0, \quad (3.22)$$

co oznacza, że funkcje te są względem siebie ortogonalne. Analogicznie można pokazać, że powyższe zależności obowiązują dla dowolnego przedziału $[2n, 2n+2)$

$$d_1[n] = -\frac{1}{\sqrt{2}} a_0[2n] + \frac{1}{\sqrt{2}} a_0[2n+1], \quad (3.23)$$

$$f_0(t) = f_1(t) + d_1[n] \psi_1(t-2n) \quad (3.24)$$

i że

$$\langle \phi_1(t-2n), \psi_1(t-2n) \rangle = 0. \quad (3.25)$$

Nośniki funkcji $\psi_1(t - 2n)$ są rozłączne i bazą przestrzeni W_1 jest zbiór funkcji

$$\{\psi_1(t - 2n)\}_{n \geq 0}, \quad (3.26)$$

a reprezentacja sygnału $f_0(t)$ z przestrzeni V_0 przez funkcje z przestrzeni V_1 i W_1 dla całej dziedziny aproksymowanego sygnału ma postać

$$f_0(t) = f_1(t) + \sum_{n \geq 0} d_1[n] \psi_1(t - 2n). \quad (3.27)$$

Definiując ciąg $g[n]$, taki że $g[0] = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $g[1] = \frac{1}{\sqrt{2}}$, a pozostałe wyrazy ciągu równe 0, współczynnik (3.23) można zapisać w postaci

$$d_1[n] = \sum_{i=0}^1 a_0[2n + i] g[i]. \quad (3.28)$$

Ciąg rewersyjny do ciągu $g[n]$, tj. $\bar{g}[n] = g[-n]$, jest odpowiedzią impulsową filtru górnoprzepustowego Haara i wzór na współczynnik $d_1[n]$ można zapisać w postaci splotu

$$d_1[n] = \sum_{i=-1}^0 \bar{g}[i] a_0[2n - i] = \bar{g} * a_0[2n]. \quad (3.29)$$

Korzystając z własności przemienności splotu, możemy napisać

$$d_1[n] = a_0 * \bar{g}[2n]. \quad (3.30)$$

Łatwo sprawdzić, że wzór ten można uogólnić na dowolną przestrzeń W_{j+1} , zawierającą detale sygnału gubione przy przejściu od reprezentacji w skali 2^j do reprezentacji w skali 2^{j+1}

$$d_{j+1}[n] = a_j * \bar{g}[2n]. \quad (3.31)$$

Wzór (3.31) wyraża współczynniki detali sygnału w przestrzeni W_{j+1} za pomocą filtracji cyfrowej współczynników aproksymacji w przestrzeni V_j

filtrem $\bar{g}[n]$ oraz decymacji, tj. z pominięciem co drugiego obliczonego współczynnika. Jest to drugi z dwóch wzorów definiujących dekompozycję sygnału za pomocą szybkiego ortogonalnego przekształcenia falkowego. Wzór ten obowiązuje dla wszystkich tzw. *ortogonalnych filtrów górnoprzepustowych* $\bar{g}[n]$, a nie tylko dla górnoprzepustowego filtra Haara, który został użyty w wyprowadzeniu wzoru (3.31) [12].

Konstrukcję przestrzeni szczegółów rozpoczęliśmy od konstrukcji przestrzeni W_1 . Oczywiście istnieje przestrzeń W_0 , która zawiera szczegóły tracone przy przejściu od reprezentacji sygnału w przestrzeni V_{-1} do reprezentacji w przestrzeni V_0 . Do przestrzeni W_0 należą funkcje z przestrzeni W_1 przeskalowane ze współczynnikiem 2^{-1} . Bazę tej przestrzeni można otrzymać, skalując przez 2^{-1} i mnożąc przez $\frac{1}{\sqrt{2^{-1}}}$ obie strony równania (3.19)

$$\frac{1}{\sqrt{2^{-1}}} \psi_1(t/2^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{2^{-1}}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0(t/2^{-1}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0(t/2^{-1} - 1) \right). \quad (3.32)$$

Lewa strona powyższego równania jest falką $\psi_0(t)$, a prawa strona jej definicją za pomocą translacji funkcji skalującej z przestrzeni V_{-1}

$$\psi_0(t) = -\phi_0(2t) + \phi_0(2t - 1). \quad (3.33)$$

Powyższe równanie jest inną postacią równania falkowego (3.19). Funkcja (3.33) nazywa się *falką Haara* i uwzględniając (3.1) i (3.33), można ją opisać wzorem

$$\psi_0(t) = \begin{cases} -1 & \text{jeśli } 0 \leq t < 1/2 \\ 1 & \text{jeśli } 1/2 \leq t < 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych } t. \end{cases}$$

Łatwo zauważyć, że falka Haara ma następujące własności:

nośnikiem jest przedział $[0, 1)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0, \quad (3.34)$$

$$\|\psi(t)\| = 1, \quad (3.35)$$

$$\langle \psi_j(t - 2^j n), \psi_k(t - 2^k m) \rangle = \delta[j - k] \delta[n - m]. \quad (3.36)$$

Zbiór translacji całkowitoliczbowych falki Haara $\{\psi_0(t - n)\}_{n \geq 0}$ tworzy bazę przestrzeni W_0 .

3.1.3 Reprezentacje falkowe sygnałów

Z poprzedniego punktu wynika, że reprezentację sygnału w skali 2^j można wyrazić w postaci sumy reprezentacji w skali 2^{j+1} i „szczegółów” z przestrzeni W_{j+1}

$$f_j(t) = f_{j+1}(t) + \sum_{n \geq 0} d_{j+1}[n] \psi_{j+1}(t - 2^{j+1}n). \quad (3.37)$$

Wychodząc zatem od reprezentacji sygnału w postaci ciągu współczynników $a_0[n]$ stanowiących wagi przy funkcjach bazy przestrzeni V_0 , można za pomocą szybkiego przekształcenia falkowego obliczyć współczynniki

$$a_1[n] = a_0 * \bar{h}[2n] \quad (3.38)$$

$$d_1[n] = a_0 * \bar{g}[2n]. \quad (3.39)$$

i zapisać sygnał $f_0(t)$ jako

$$f_0(t) = \sum_{n \geq 0} a_1[n] \phi_1(t - 2n) + \sum_{n \geq 0} d_1[n] \psi_1(t - 2n). \quad (3.40)$$

Pierwsza suma w powyższym równaniu stanowi sygnał $f_1(t)$ z przestrzeni V_1 i może być zdekomponowana na sygnał $f_2(t)$ z przestrzeni V_2 i sygnał z przestrzeni W_2 za pomocą przekształcenia

$$a_2[n] = a_1 * \bar{h}[2n] \quad (3.41)$$

$$d_2[n] = a_1 * \bar{g}[2n] \quad (3.42)$$

dając następujące rozwinięcie

$$f_0(t) = \sum_{n \geq 0} a_2[n] \phi_2(t-4n) + \sum_{n \geq 0} d_2[n] \psi_2(t-4n) + \sum_{n \geq 0} d_1[n] \psi_1(t-2n). \quad (3.43)$$

Powtarzając dekompozycję $J > 0$ razy, otrzymujemy

$$f_0(t) = \sum_{n \geq 0} a_J[n] \phi_J(t - 2^J n) + \sum_{j=1}^J \sum_{n \geq 0} d_j[n] \psi_j(t - 2^j n). \quad (3.44)$$

Współczynniki

$$\{a_J[n]\}, \{d_J[n]\}, \{d_{J-1}[n]\}, \dots, \{d_1[n]\} \quad (3.45)$$

stanowią *reprezentację wieloskalową sygnału* dla falki $\psi(t)$ i stowarzyszonej z nią funkcji skalującej $\phi(t)$.

Jeżeli analizowany sygnał $f(t)$ jest rzutowany na podprzestrzeń V_0 i rzut ten liczy $N = 2^L$ ($L > 0$) próbek, to można utworzyć L -poziomą piramidę falkową sygnału dla skal $2^1, \dots, 2^L$. Na spodzie piramidy można umieścić $N/2$ współczynników $d_1[0], d_1[1], \dots, d_1[N/2 - 1]$, wyżej $N/4$ współczynników $d_2[0], d_2[1], \dots, d_2[N/4 - 1]$ itd. Na L -tym poziomie (szczycie) piramidy będą dwa współczynniki, $d_L[0]$ i $a_L[0]$. Liczba wszystkich współczynników w piramidzie będzie równa $N = 2^L$.

Jeżeli sygnał $f(t)$ jest zdefiniowany w przedziale $[0, 1]$, to można rozpatrywać skale $2^{-L}, 2^{-L+1}, \dots, 2^{-1}, 2^0$. Dekompozycja wieloskalowa może być przeprowadzona dla wybranego przedziału skal, tj. $2^{-L+1}, 2^{-L+2}, \dots, 2^J$, gdzie $2^J \leq 2^0$. Przykładowo, jeśli $N = 2^8$, to można wybrać skale: $2^{-7}, 2^{-6}, 2^{-5}, 2^{-4}, 2^{-3}$. Przy wzroście J moduły współczynników $a_J[n]$ maleją. Dowodzi się, że w granicy, gdy J dąży do nieskończoności, $a_J[n]$ dążą do zera i szereg falkowy przyjmuje postać

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_j[n] \psi_j(t - 2^j n), \quad (3.46)$$

co oznacza, że zbiór funkcji

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right) \right\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2} \quad (3.47)$$

jest bazą ortonormalną przestrzeni $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ [32].

3.1.4 Rekonstrukcja sygnału

Pokazaliśmy, że sygnał z przestrzeni V_0 może być zdekomponowany na dwa sygnały: jeden z przestrzeni V_1 (sygnał wygładzony) i drugi z przestrzeni W_1 (szczegóły sygnału). Porównując reprezentację sygnału w przestrzeni V_0 z reprezentacją w przestrzeniach V_1 i W_1 , można wyprowadzić wzory przekształcenia odwrotnego do opisanego wyżej.

W przedziale $[0, 2)$

$$\begin{aligned} a_0[0] \phi_0(t) + a_0[1] \phi(t-1) &= a_1[0] \phi_1[0] + d_1[0] \psi_1(t) \\ &= a_1[0] \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0(t) + a_1[0] \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0(t-1) \\ &\quad - d_1[0] \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0(t) + d_1[0] \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0(t-1) \end{aligned}$$

Przyrównując współczynniki przy $\phi_j(t)$, otrzymujemy

$$a_0[0] = \frac{1}{\sqrt{2}} a_1[0] - \frac{1}{\sqrt{2}} d_1[0], \quad (3.48)$$

z przyrównania współczynników przy $\phi(t-1)$ otrzymujemy

$$a_0[1] = \frac{1}{\sqrt{2}} a_1[0] + \frac{1}{\sqrt{2}} d_1[0]. \quad (3.49)$$

Analogicznie dla przedziału $[2, 4)$ otrzymujemy

$$a_0[2] = \frac{1}{\sqrt{2}} a_1[1] - \frac{1}{\sqrt{2}} d_1[1], \quad (3.50)$$

$$a_0[3] = \frac{1}{\sqrt{2}} a_1[1] + \frac{1}{\sqrt{2}} d_1[1]. \quad (3.51)$$

Dla dowolnego przedziału $[2n, 2n + 2)$

$$a_0[2n] = \frac{1}{\sqrt{2}} a_1[n] - \frac{1}{\sqrt{2}} d_1[n], \quad (3.52)$$

$$a_0[2n + 1] = \frac{1}{\sqrt{2}} a_1[n] + \frac{1}{\sqrt{2}} d_1[n]. \quad (3.53)$$

Wzory powyższe można zapisać następująco

$$a_0[2n] = \frac{1}{\sqrt{2}} a_1[n] + \frac{1}{\sqrt{2}} 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} d_1[n] + \frac{1}{\sqrt{2}} 0, \quad (3.54)$$

$$a_0[2n + 1] = \frac{1}{\sqrt{2}} 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} a_1[n] - \frac{1}{\sqrt{2}} 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} d_1[n]. \quad (3.55)$$

Jeżeli zdefiniujemy ciągi

$$\check{a}_1 = \dots, 0, a_1[0], 0, a_1[1], 0, a_1[2], \dots \quad (3.56)$$

$$\check{d}_1 = \dots, 0, d_1[0], 0, d_1[1], 0, d_1[2], \dots \quad (3.57)$$

oraz filtry o odpowiedziach impulsowych

$$h[0] = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad h[1] = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (3.58)$$

$$g[0] = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad g[1] = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (3.59)$$

to wzór na $a_0[n]$ można zapisać następująco

$$a_0[n] = \check{a}_1 * h[n] + \check{d}_1 * g[n]. \quad (3.60)$$

Wzór powyższy obowiązuje dla wszystkich skal, tj.

$$a_j[n] = \check{a}_{j+1} * h[n] + \check{d}_{j+1} * g[n] \quad (3.61)$$

i wszystkich filtrów h i g o ortogonalnych względem siebie odpowiedziach impulsowych.

3.2 Formalne wprowadzenie do analizy wieloskalowej

Aksjomatyczne ujęcie analizy wieloskalowej przedstawione zostało przez Stefana Mallata w publikacji [11]. Można je również znaleźć w każdej monografii poświęconej metodom falkowym analizy sygnałów. Poniżej ogólnie scharakteryzowano aproksymację funkcji należących do przestrzeni funkcji o skończonej energii $L^2(\mathbb{R})$ w oparciu o aksjomaty analizy wieloskalowej. W podejściu aksjomatycznym zakłada się, że

- istnieje funkcja $\phi(t)$, której translacje całkowitoliczbowe $\{\phi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tworzą bazę Riesz podprzestrzeni V_0 ;
- przeskalowane translacje $\{\phi_{j,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, gdzie $\phi_{j,n}(t) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}t - n)$, tworzą bazy Riesz podprzestrzeni V_j , $j \in \mathbb{Z}$;
- suma podprzestrzeni $\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j$ jest zbiorem gęstym w przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$, tj. każdą funkcję z przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$ można przybliżyć z dowolną dokładnością za pomocą funkcji ze zbioru $\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j$;
- elementem wspólnym wszystkich podprzestrzeni V_j , $j \in \mathbb{Z}$ jest funkcja równa zero, tj. $\bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\}$.

Z definicji podprzestrzeni V_j wynika, że każda funkcja z podprzestrzeni V_j należy do podprzestrzeni V_{j-1} . Oznacza to w szczególności, że funkcja $\phi(t)$ należąca do podprzestrzeni V_0 może być wyrażona za pomocą kombinacji liniowej funkcji tworzących bazę podprzestrzeni V_{-1} , tj.

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_n h[n] \phi(2t - n). \quad (3.62)$$

Równanie (3.62) nazywa się *równaniem dylatacyjnym*, a funkcja $\phi(t)$ nazywa się *funkcją skalującą*.

Ciągowi zanurzonych podprzestrzeni

$$\dots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots \quad (3.63)$$

przyporządkowuje się ciąg *podprzestrzeni szczegółów*

$$\dots W_2, W_1, W_0, W_{-1}, W_{-2}, \dots \quad (3.64)$$

zdefiniowanych równaniem

$$V_j \oplus W_j = V_{j-1}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (3.65)$$

w którym \oplus oznacza, że V_{j-1} jest sumą prostą podprzestrzeni² V_j i W_j , z warunkiem, że jedynym wspólnym elementem podprzestrzeni V_j i W_j jest funkcja równa 0, tj. $V_j \cap W_j = \{0\}$.

Funkcję $\psi(t)$, której translacje całkowitoliczbowe $\{\psi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tworzą bazę Riesz podprzestrzeni W_0 , nazywa się falką matką. Bazę Riesz podprzestrzeni W_j , $j \in \mathbb{Z}$ tworzą przeskalowane translacje falki $\{\psi_{j,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, gdzie $\psi_{j,n}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - n)$, $j \in \mathbb{Z}$. Funkcje należące do podprzestrzeni W_j należą również do podprzestrzeni V_{j-1} , a zatem falkę $\psi(t)$ należącą do W_0 można wyrazić za pomocą kombinacji liniowej funkcji tworzących bazę podprzestrzeni V_{-1}

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_n g[n] \phi(2t - n). \quad (3.66)$$

Równanie (3.66) nazywa się *równaniem falkowym*.

Na podstawie powyższego opisu podprzestrzeni $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ i $\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ stanowiących aproksymację wieloskalową przestrzeni $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ można wpro-

²Podprzestrzeń A jest sumą prostą podprzestrzeni B i C wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element podprzestrzeni A daje się przedstawić w sposób jednoznaczny w postaci sumy elementu z podprzestrzeni B i elementu z podprzestrzeni C oraz jeśli jedynym elementem wspólnym podprzestrzeni B i C jest element zerowy.

dzić pojęcie *reprezentacji falkowej sygnału*. W tym celu zapiszemy równanie (3.65) w następującej postaci

$$V_0 = V_1 \oplus W_1 \quad (3.67)$$

$$= V_2 \oplus W_2 \oplus W_1 \quad (3.68)$$

$$= V_J \oplus \bigoplus_{j=1}^J W_j, \quad J > 0. \quad (3.69)$$

Równanie (3.69) oznacza, że aproksymacja sygnału $f(t)$ w podprzestrzeni V_0 może być przedstawiona w postaci sumy aproksymacji w podprzestrzeni V_J i szczegółów w podprzestrzeniach W_j , $j = 1, 2, \dots, J$. Bazą podprzestrzeni V_J jest $\{\phi_{J,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, więc sygnał $f_J(t) = \sum_n a_J[n] \phi_{J,n}(t)$. Bazą podprzestrzeni W_j jest $\{\psi_{j,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $j = 1, 2, \dots, J$, więc

$$f_0(t) = \sum_n a_J[n] \phi_{J,n}(t) + \sum_{j=1}^J \sum_n d[j, n] \psi_{j,n}(t). \quad (3.70)$$

Współczynniki $\{a_J[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ i $\{\{d[j, n]\}_{n \in \mathbb{Z}}\}_{1 \leq j \leq J}$ stanowią J -poziomą *piramidę falkową* sygnału.

Podprzestrzeń V_0 w równaniu (3.69) została wybrana arbitralnie. Równie dobrze można przyjąć inną podprzestrzeń V_K , $K \neq 0$ i wówczas otrzymuje się równanie

$$V_K = V_J \oplus \bigoplus_{j=K+1}^J W_j, \quad J > K. \quad (3.71)$$

Możliwe są dwa przejścia graniczne związane z równaniem (3.71). I tak, zwiększając K do nieskończoności, otrzymuje się w równaniu (3.71) podprzestrzeń V_∞ . Z aksjomatów wynika, że w podprzestrzeni tej jest tylko jeden element, a mianowicie funkcja równa zero, więc rozpatrywane równanie przyjmuje postać

$$V_K = \bigoplus_{j=K+1}^{+\infty} W_j. \quad (3.72)$$

Powyższemu równaniu odpowiada reprezentacja falkowa w postaci

$$f_K(t) = \sum_{j=K+1}^{+\infty} \sum_n d[j, n] \psi_{j,n}(t). \quad (3.73)$$

Drugie przejście graniczne polega na zmniejszaniu K do minus nieskończoności. Podprzestrzeń $V_{-\infty}$ zawiera wszystkie podprzestrzenie V_j i zgodnie z założeniem jest zbiorem gęstym w przestrzeni $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, a więc aproksymuje z dowolną dokładnością sygnał $f(t)$ należący do $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Mamy więc

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_n d[j, n] \psi_{j,n}(t). \quad (3.74)$$

Matematyk fakt ten określa stwierdzeniem, że zbiór funkcji $\{\psi_{j,n}(t)\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2}$ jest bazą przestrzeni $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$.

Jeżeli falki tworzące bazę są wzajemnie ortogonalne i znormalizowane, tj. spełniają warunek

$$\langle \psi_{j,n}(t), \psi_{k,m}(t) \rangle = \delta[j - k] \delta[n - m], \quad (j, n) \in \mathbb{Z}^2, \quad (k, m) \in \mathbb{Z}^2, \quad (3.75)$$

to baza $\{\psi_{j,n}(t)\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Falka (matka) $\psi(t)$, której przeskalowane translacje spełniają warunek (3.75), nazywana jest *falką ortogonalną*.

Warunek (3.75) sprawia, że również funkcje stanowiące bazy podprzestrzeni W_j , $j \in \mathbb{Z}$ są ortogonalne do funkcji tworzących bazy podprzestrzeni W_k , $k \in \mathbb{Z}$ i mówi się, że podprzestrzenie te są wzajemnie ortogonalne, co symbolicznie zapisuje się jako $W_j \perp W_k$.

Dla falek ortonormalnych współczynniki skalujące $a_J[n]$ i falkowe $d_j[n]$ w równaniu (3.70) obliczane są ze wzorów

$$a_J[n] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \phi_{J,n}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{2^J}} \phi\left(\frac{t - 2^J n}{2^J}\right) dt, \quad (3.76)$$

$$d_j[n] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{j,n}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right) dt. \quad (3.77)$$

Te same funkcje bazy służą do obliczenia współczynników piramidy falkowej i do rekonstrukcji sygnału.

Proste ortogonalne przekształcenie falkowe (dekompozycja sygnału) polega na rozłożeniu sygnału $f_j(t)$ należącego do podprzestrzeni V_j na sygnał *wygładzony* należący do podprzestrzeni V_{j+1} i sygnał *szczegółowy* należący do podprzestrzeni W_{j+1} , tj. na obliczeniu współczynników $\{a_{j+1}[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ i $\{d_{j+1}[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ na podstawie współczynników $\{a_j[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$, zgodnie z równaniem

$$\sum_n a_j[n] \phi_{j,n}(t) = \sum_n a_{j+1}[n] \phi_{j+1,n}(t) + \sum_n d_{j+1}[n] \psi_{j+1,n}(t). \quad (3.78)$$

Odwrotne ortogonalne przekształcenie falkowe (rekonstrukcja sygnału) polega na obliczeniu sygnału $f_j(t)$ z podprzestrzeni V_j na podstawie sygnału wygładzonego z podprzestrzeni V_{j+1} i sygnału szczegółowego z podprzestrzeni W_{j+1} , tj. na obliczeniu współczynników $\{a_j[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ na podstawie współczynników $\{a_{j+1}[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ i $\{d_{j+1}[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Algorytmy szybkich ortogonalnych przekształceń falkowych przedstawione są w punkcie 3.4 tego rozdziału.

Cechą charakterystyczną falek ortogonalnych jest to, że są one niesymetryczne (z wyjątkiem falki Haara). W konsekwencji niesymetryczne są odpowiedzi impulsowe filtrów falkowych, co wprowadza przesunięcia fazowe w reprezentacjach falkowych sygnałów. Te przesunięcia fazowe mogą utrudniać dalsze przetwarzanie sygnału. Rezygnując z wymogu ortogonalności falek, można używać falek, które są symetryczne i nie wprowadzają przesunięć fazowych. Jednakże w tym przypadku niezbędne jest posiadanie dwóch aproksymacji wieloskalowych przestrzeni $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$: $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, $\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ i $\{\tilde{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, $\{\tilde{W}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$. Podprzestrzenie z tych dwóch aproksymacji muszą być wzajemnie ortogonalne, tj. $V_j \perp \tilde{W}_j$ i $\tilde{V}_j \perp W_j$. Układ takich

dwóch aproksymacji wieloskalowych, tj. $\phi(t)$, $\psi(t)$, $h[n]$ i $\tilde{\phi}(t)$, $\tilde{\psi}(t)$, $\tilde{h}[n]$, nazywa się aproksymacją biortogonalną przestrzeni $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Do dekompozycji sygnału można użyć $\phi(t)$, $\psi(t)$, $h[n]$, a do rekonstrukcji $\tilde{\phi}(t)$, $\tilde{\psi}(t)$, $\tilde{h}[n]$ albo na odwrót, tj. do dekompozycji można wykorzystać $\tilde{\phi}(t)$, $\tilde{\psi}(t)$, $\tilde{h}[n]$, a do rekonstrukcji $\phi(t)$, $\psi(t)$, $h[n]$. Algorytmy szybkich biortogonalnych przekształceń falkowych przedstawione są w punkcie 3.5 tego rozdziału.

W podsumowaniu niniejszego punktu możemy stwierdzić, że w analizie wieloskalowej występują dwie funkcje: funkcja skalująca $\phi(t)$ i falka $\psi(t)$ i dwa filtry cyfrowe $h[n]$ i $g[n]$. Związki pomiędzy wyżej wymienionymi funkcjami i filtrami opisują równania dylatacyjne i falkowe. Translacje całkowitoliczbowe funkcji skalującej i falki mogą być wzajemnie ortogonalne. Wówczas podprzestrzenie V_j i W_j są względem siebie ortogonalne ($V_j \perp W_j$), a funkcja skalująca $\phi(t)$, falka $\psi(t)$ i filtr $h[n]$ ³ umożliwiają zarówno dekompozycję, jak i rekonstrukcję sygnału. W przypadku użycia falek symetrycznych potrzebne są dwie różne aproksymacje wieloskalowe funkcji należących do przestrzeni $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$.

Istotną własnością funkcji skalującej i falki mogą być ich zwarte nośniki, czyli zerowanie się tych funkcji poza skończonym przedziałem argumentu, co w konsekwencji daje skończone odpowiedzi impulsowe filtrów $h[n]$ i $g[n]$. Skończone odpowiedzi impulsowe filtrów mają ważne konsekwencje obliczeniowe w przekształceniach falkowych.

³Filtr $g[n]$ może być obliczony na podstawie filtru $h[n]$, co pokazano w dalszych częściach książki.

3.3 Funkcja skalująca i stowarzyszony z nią filtr

Funkcja skalująca $\phi(t)$, której translacje całkowitoliczbowe są względem siebie ortogonalne, tj. spełniają warunek

$$\langle \phi(t), \phi(t - n) \rangle = \phi * \bar{\phi}(n) = \delta[n], \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.79)$$

nazywa się *funkcją skalującą ortogonalną*.

Warunek ortogonalności funkcji skalującej w dziedzinie częstotliwości można otrzymać za pomocą poniższych przekształceń. Ciąg liczbowy $\phi * \bar{\phi}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ jest wynikiem spróbkowania z krokiem $T = 1$ splotu $\phi * \bar{\phi}(t)$. Transformatą Fouriera splotu $\phi * \bar{\phi}(t)$ jest $\Phi(\omega)\Phi^*(\omega) = |\Phi(\omega)|^2$. Transformatą Fouriera ciągu $\phi * \bar{\phi}(n)$ jest, zgodnie z (2.104), $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\Phi(\omega + 2k\pi)|^2$, co oznacza, że w dziedzinie częstotliwości warunek ortogonalności funkcji skalującej ma postać

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\Phi(\omega + 2k\pi)|^2 = 1. \quad (3.80)$$

Mając funkcję skalującą $\phi(t)$, której translacje całkowitoliczbowe są ortogonalne, można na podstawie równania dylatacyjnego obliczyć współczynniki filtru $h[n]$

$$h[n] = \langle 2^{-1/2}\phi(t/2), \phi(t - n) \rangle, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.81)$$

Z powyższego widać, że jeśli funkcja skalująca $\phi(t)$ ma zwarty nośnik, to filtr ma skończoną odpowiedź impulsową.

Z równania dylatacyjnego wynika inna ważna własność filtru stowarzyszonego z ortogonalną funkcją skalującą. Zapisując funkcję $\phi_{1,k}(t)$ za pomocą równania dylatacyjnego

$$\phi_{1,k}(t) = 2^{-1/2}\phi((t/2 - k)) = \sum_m h[m] \phi(t - 2k - m) \quad (3.82)$$

i wprowadzając nową zmienną $n = 2k + m$, mamy

$$\phi_{1,k}(t) = \sum_n h[n - 2k] \phi(t - n). \quad (3.83)$$

Obliczając iloczyny skalarne obu stron powyższego równania z funkcją $\phi_{1,0}(t)$, otrzymujemy

$$\langle \phi_{1,k}(t), \phi_{1,0}(t) \rangle = \sum_n h[n - 2k] \langle \phi(t - n), \phi_{1,0}(t) \rangle, \quad (3.84)$$

skąd

$$\sum_n h[n - 2k] h[n] = \delta[k], \quad (3.85)$$

co oznacza, że odpowiedzi impulsowe filtru h przesunięte względem siebie o parzystą liczbę próbek są ortogonalne. Powyższą własność odpowiedzi impulsowej filtru h można zapisać w postaci splotu

$$\bar{h} * h[2k] = \delta[k], \quad (3.86)$$

gdzie $\bar{h}[n] = h[-n]$. Ciąg $\bar{h} * h[2k]$ jest zdecydowanym z krokiem 2 ciągiem $\bar{h} * h[k]$. Transformatą Fouriera ciągu $\bar{h} * h[k]$ jest $H^*(e^{i\omega})H(e^{i\omega}) = |H(e^{i\omega})|^2$. Transformatą Fouriera ciągu zdecydowanego jest, zgodnie z (2.99), $\frac{1}{2}(|H(e^{i\omega})|^2 + |H(e^{i(\omega+\pi)})|^2)$. Zatem warunek ortogonalności translacji parzystoliczbowych odpowiedzi impulsowej filtru h w dziedzinie częstotliwości ma postać

$$|H(e^{i\omega})|^2 + |H(e^{i(\omega+\pi)})|^2 = 2. \quad (3.87)$$

Powyżej pokazano, w jaki sposób ortogonalność funkcji skalującej prowadzi do właściwości transmitancji filtru h opisanej równaniem (3.87). Możliwe jest postępowanie odwrotne, tj. obliczenie funkcji skalującej $\phi(t)$ na podstawie znajomości transmitancji filtru h . Prowadzą do tego poniższe przekształcenia.

Równanie dylatacyjne można przedstawić w dziedzinie częstotliwości, zapisując transformaty Fouriera obu stron równania (3.62)

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_n h[n] e^{-in\omega/2} \right) \Phi(\omega/2) \quad (3.88)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} H(e^{i\omega/2}) \Phi(\omega/2). \quad (3.89)$$

Wykorzystując rekurencyjnie zależność

$$\Phi(\omega/2^{j-1}) = \frac{1}{\sqrt{2}} H(e^{i\omega/2^j}) \Phi(\omega/2^j), \quad (3.90)$$

otrzymujemy równanie

$$\Phi(\omega) = \prod_{j=1}^J \frac{H(e^{i\omega/2^j})}{\sqrt{2}} \Phi(\omega/2^J). \quad (3.91)$$

Przechodząc z J do nieskończoności i zakładając, że $\Phi(0) = 1$, otrzymujemy wzór na transformatę Fouriera funkcji skalującej $\phi(t)$ za pomocą transmitancji filtru $h[n]$

$$\Phi(\omega) = \prod_{j=1}^{+\infty} \frac{H(e^{i\omega/2^j})}{\sqrt{2}}. \quad (3.92)$$

Warunki konieczne i wystarczające, jakie powinien spełniać filtr h , żeby wzór (3.92) określał transformatę Fouriera funkcji skalującej należącej do przestrzeni $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, podano w pracy [12]. Ilustracją zastosowania omawianego wzoru do obliczenia funkcji skalującej jest poniższy przykład.

Przykład. Niech filtrem h będzie filtr Haara $h[0] = h[1] = 1/\sqrt{2}$. Transformatą Fouriera tego filtru jest $H(e^{i\omega}) = (1 + e^{-i\omega})/\sqrt{2}$. Obliczmy iloczyn J początkowych czynników transformaty Fouriera funkcji skalującej

(wzór (3.92))

$$\prod_{j=1}^J \frac{H(e^{i\omega/2^j})}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2^J} (1 + e^{-i\omega/2})(1 + e^{-i\omega/4}) \dots (1 + e^{-i\omega/2^J}) \quad (3.93)$$

$$= \frac{1}{2^J} \sum_{k=0}^{2^J-1} e^{-ik\omega/2^J} \quad (3.94)$$

$$= \frac{1 - e^{-i\omega}}{2^J(1 - e^{-i\omega/2^J})}. \quad (3.95)$$

Wykorzystując rozwinięcie funkcji $e^{-i\theta} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-i\theta)^m}{m!}$ i zastępując θ wyrażeniem $2^{-J}\omega$, łatwo sprawdzić, że

$$\lim_{J \rightarrow +\infty} 2^J (1 - e^{-i\omega/2^J}) = i\omega. \quad (3.96)$$

Zatem, zgodnie z (3.92),

$$\Phi(\omega) = \frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega}. \quad (3.97)$$

Prawa strona powyższego wzoru jest transformatą Fouriera funkcji

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych wartości } t, \end{cases} \quad (3.98)$$

która jest funkcją skalującą Haara odpowiadającą filtrowi $h[0] = h[1] = 1/\sqrt{2}$.

3.4 Szybkie ortogonalne przekształcenie falkowe

Wyprowadzone w podrozdziale 3.1 dla falki Haara szybkie ortogonalne przekształcenie falkowe obowiązuje dla wszystkich ortogonalnych funkcji skalujących i falek ortogonalnych.

W celu wyprowadzenia algorytmów szybkiego ortogonalnego przekształcenia falkowego wstępnie obliczymy iloczyn skalarny funkcji bazy podprzestrzeni V_j i funkcji bazy podprzestrzeni V_{j+1} . Bazą podprzestrzeni V_j , $j \in \mathbb{Z}$ jest zbiór $\{\phi_{j,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, bazą podprzestrzeni V_{j+1} , $j \in \mathbb{Z}$ jest zbiór $\{\phi_{j+1,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, gdzie $\phi_{j,n}(t) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}t - n)$, $\phi_{j+1,k}(t) = 2^{-(j+1)/2} \phi(2^{-(j+1)}t - k)$. Zakładając, że funkcje baz są funkcjami rzeczywistymi, mamy

$$\langle \phi_{j,n}, \phi_{j+1,k} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} 2^{-j/2} \phi(2^{-j}t - n) 2^{-(j+1)/2} \phi(2^{-(j+1)}t - k) dt. \quad (3.99)$$

Wprowadzając nową zmienną $u = 2^{-j}t$, otrzymujemy

$$\langle \phi_{j,n}, \phi_{j+1,k} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u - n) 2^{-1/2} \phi((u - 2k)/2) du. \quad (3.100)$$

Wprowadzając kolejną zmienną $\tau = u - 2k$, mamy

$$\langle \phi_{j,n}, \phi_{j+1,k} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau - n + 2k) 2^{-1/2} \phi(\tau/2) d\tau. \quad (3.101)$$

Zastępując funkcję $2^{-1/2} \phi(\tau/2)$ prawą stroną równania dylatacyjnego, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j,n}, \phi_{j+1,k} \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau - n + 2k) \sum_m h[m] \phi(\tau - m) d\tau \\ &= \sum_m h[m] \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau - n + 2k) \phi(\tau - m) d\tau. \end{aligned}$$

Ze względu na ortogonalność translacji całkowitoliczbowych funkcji skalującej $\phi(t)$ całka w powyższym równaniu jest równa 1, gdy $n - 2k = m$, i zero, gdy $n - 2k \neq m$, stąd

$$\langle \phi_{j,n}, \phi_{j+1,k} \rangle = h[n - 2k]. \quad (3.102)$$

Wykonując analogiczne przekształcenia, ale wykorzystując zamiast równania dylatacyjnego równanie falkowe, otrzymujemy iloczyn skalarny funkcji bazy podprzestrzeni V_j i funkcji bazy podprzestrzeni W_{j+1}

$$\langle \phi_{j,n}, \psi_{j+1,k} \rangle = g[n - 2k]. \quad (3.103)$$

Proste ortogonalne przekształcenie falkowe polega na obliczeniu na podstawie współczynników rzutu sygnału na podprzestrzeń V_j współczynników rzutu sygnału na podprzestrzeń V_{j+1} i współczynników rzutu sygnału na podprzestrzeń W_{j+1} . Współczynniki rzutu sygnału $f(t)$ na podprzestrzeń V_j są określone iloczynami skalarnymi

$$a_j[k] = \langle f(t), \phi_{j,k}(t) \rangle, \quad (3.104)$$

a na podprzestrzenie V_{j+1} i W_{j+1} odpowiednio

$$a_{j+1}[k] = \langle f(t), \phi_{j+1,k}(t) \rangle, \quad (3.105)$$

i

$$d_{j+1}[k] = \langle f(t), \psi_{j+1,k}(t) \rangle. \quad (3.106)$$

Rozwijając funkcję $\phi_{j+1,k}(t)$ w bazie podprzestrzeni V_j , na podstawie (3.102) i z uwagi na założenie, że funkcje są rzeczywiste (iloczyn skalarny jest przemienny), mamy

$$\phi_{j+1,k}(t) = \sum_n \langle \phi_{j+1,k}, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,n}(t) \quad (3.107)$$

$$= \sum_n h[n - 2k] \phi_{j,n}(t). \quad (3.108)$$

Obliczając iloczyny skalarne obu stron powyższego równania z sygnałem $f(t)$, otrzymujemy

$$\langle f(t), \phi_{j+1,k}(t) \rangle = \sum_n h[n - 2k] \langle f(t), \phi_{j,n}(t) \rangle, \quad (3.109)$$

czyli

$$a_{j+1}[k] = \sum_n h[n - 2k] a_j[n]. \quad (3.110)$$

W analogiczny sposób, wykorzystując (3.103), otrzymuje się wzór

$$d_{j+1}[k] = \sum_n g[n - 2k] a_j[n]. \quad (3.111)$$

Odwrotne ortogonalne przekształcenie falkowe wyprowadza się, zapisując funkcję bazy podprzestrzeni V_j jako sumę dwóch składników: z podprzestrzeni V_{j+1} i z podprzestrzeni W_{j+1} . Ponieważ podprzestrzenie te są z założenia ortonormalne, więc rozwinięcie w bazach tych przestrzeni ma postać

$$\phi_{j,n}(t) = \sum_k \langle \phi_{j,n}(t), \phi_{j+1,k}(t) \rangle \phi_{j+1,k}(t) \quad (3.112)$$

$$+ \sum_k \langle \phi_{j,n}(t), \psi_{j+1,k}(t) \rangle \psi_{j+1,k}(t). \quad (3.113)$$

Wykorzystując (3.102) i (3.103), otrzymujemy

$$\phi_{j,n}(t) = \sum_k h[n - 2k] \phi_{j+1,k}(t) \quad (3.114)$$

$$+ \sum_k g[n - 2k] \psi_{j+1,k}(t). \quad (3.115)$$

Obliczając iloczyny skalarne obu stron powyższego równania z sygnałem $f(t)$, otrzymujemy

$$\langle f, \phi_{j,n} \rangle = \sum_k h[n - 2k] \langle f, \phi_{j+1,k} \rangle + \sum_k g[n - 2k] \langle f, \psi_{j+1,k} \rangle, \quad (3.116)$$

czyli

$$a_j[n] = \sum_k h[n - 2k] a_{j+1}[k] + \sum_k g[n - 2k] d_{j+1}[k]. \quad (3.117)$$

Wzory określające szybkie ortogonalne przekształcenie falkowe mogą być zapisane w formie splotu ciągów liczbowych. Zdefiniujmy filtr $\bar{h}[n] = h[-n]$ i filtr $\bar{g}[n] = g[-n]$. Wówczas wzory definiujące proste ortogonalne przekształcenie falkowe można zapisać jako

$$a_{j+1}[k] = \sum_n \bar{h}[2k - n] a_j[n] = a_j * \bar{h}[2k] \quad (3.118)$$

$$d_{j+1}[k] = \sum_n \bar{g}[2k - n] a_j[n] = a_j * \bar{g}[2k]. \quad (3.119)$$

Definiując ciągi

$$\check{a}_{j+1}[n] = \begin{cases} a_{j+1}[k] & \text{jeśli } n = 2k \\ 0 & \text{jeśli } n = 2k + 1 \end{cases} \quad (3.120)$$

$$\check{d}_{j+1}[n] = \begin{cases} d_{j+1}[k] & \text{jeśli } n = 2k \\ 0 & \text{jeśli } n = 2k + 1 \end{cases} \quad (3.121)$$

wzór określający odwrotne ortogonalne przekształcenie falkowe może być zapisany w postaci

$$a_j[n] = \sum_k h[n - 2k] a_{j+1}[k] + \sum_k g[n - 2k] d_{j+1}[k] \quad (3.122)$$

$$= \sum_k \check{a}_{j+1}[k] h[n - k] + \sum_k \check{d}_{j+1}[k] g[n - k] \quad (3.123)$$

$$= \check{a}_{j+1} * h[n] + \check{d}_{j+1} * g[n]. \quad (3.124)$$

Cechą charakterystyczną przekształcenia ortogonalnego jest to, że wszystkie cztery filtry cyfrowe (\bar{h} , \bar{g} , h , g) służące do obliczania transformat pochodzą z jednego ciągu $h[n]$ występującego w równaniu (3.62).

Warto zwrócić uwagę na całkowicie dyskretny charakter przekształcenia, nie licząc wstępnego etapu, polegającego na obliczeniu współczynników $a_0[n]$, który nie jest krokiem algorytmu. Wagi przy funkcjach bazy

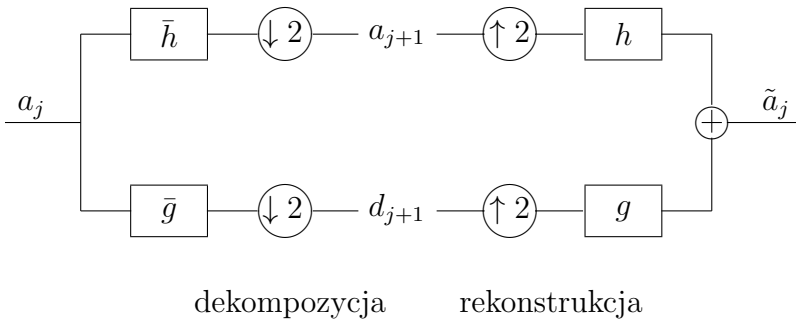
obliczane są wyłącznie za pomocą przetwarzania ciągów liczbowych (filtracji cyfrowej). Z tego względu to przekształcenie falkowe nazywane jest również *dyskretnym przekształceniem falkowym*, a jego wynik *dyskretną transformatą falkową*.

Złożoność obliczeniowa przekształcenia jest liniowa. Do obliczenia dyskretnej reprezentacji falkowej sygnału $f(t)$, którego rzut na podprzestrzeń V_0 jest ciągiem o długości N , potrzeba $O(N)$ działań.

Praktyczne wykorzystanie przekształcenia wymaga rozszerzenia analizowanego sygnału tak, aby uniknąć dużych współczynników falkowych na początku sygnału i na jego końcu. Najczęściej stosowany sposób rozszerzenia sygnału opisany jest w rozdziale 5.

3.4.1 Banki filtrów implementujące szybkie ortogonalne przekształcenie falkowe

Wzory (3.118), (3.119) i (3.124), określające szybkie ortogonalne przekształcenie falkowe w postaci splotu ciągów liczbowych, prowadzą do sformułowania tego przekształcenia w ujęciu filtracji pasmowej sygnału. Układ filtrów cyfrowych implementujący omawiane przekształcenie pokazany jest na rysunku 3.1. Za filtrami dekompozycji \bar{h} i \bar{g} występują tzw. *decymatory* $\downarrow 2$, które oznaczają pominięcie co drugiej próbki z wyjścia filtrów. Przed filtrami rekonstrukcji h i g występują tzw. *ekspandery* $\uparrow 2$, które oznaczają wstawienie jednej próbki o wartości zero przed każdą próbką wchodzącą na wejścia filtrów. Sygnał a_{j+1} podany na wejście ekspandera daje na jego wyjściu sygnał \tilde{a}_{j+1} zgodnie z (3.120). Analiza układu filtrów z rysunku 3.1 umożliwia sformułowanie równań, które muszą spełniać filtry, aby zapewnić doskonałą rekonstrukcję sygnału. Filtry spełniają warunki doskonałej rekonstrukcji sygnału, jeśli $\tilde{a}_j = a_j$. W celu wyprowadzenia równań doskonałej rekonstrukcji sygnału najpierw sfor-



Rysunek 3.1: Banki filtrów ortogonalnych dekompozycji sygnału (z lewej) i rekonstrukcji sygnału (z prawej)

mużemy równanie opisujące działanie kaskadowo połączonego decymatora i ekspandera. Jeżeli na wejście decymatora wchodzi sygnał $x[n]$, to na wyjściu ekspandera jest sygnał

$$y[n] = \frac{1}{2}(x[n] + (-1)^n x[n]).$$

Transformata Fouriera sygnału $y[n]$ jest równa

$$Y(e^{i\omega}) = \frac{1}{2}(X(e^{i\omega}) + X(e^{i(\omega+\pi)})).$$

Transformata Fouriera $\tilde{A}_j(e^{i\omega})$ sygnału na wyjściu banku filtrów rekonstrukcji ma postać

$$\begin{aligned} \tilde{A}_j(e^{i\omega}) &= \frac{1}{2}(A_j(e^{i\omega}) H^*(e^{i\omega}) + A_j(e^{i(\omega+\pi)}) H^*(e^{i(\omega+\pi)})) H(e^{i\omega}) \\ &+ \frac{1}{2}(A_j(e^{i\omega}) G^*(e^{i\omega}) + A_j(e^{i(\omega+\pi)}) G^*(e^{i(\omega+\pi)})) G(e^{i\omega}). \end{aligned}$$

Po uprządkowaniu składników otrzymujemy

$$\begin{aligned} \tilde{A}_j(e^{i\omega}) &= \frac{1}{2}(|H(e^{i\omega})|^2 + |G(e^{i\omega})|^2) A_j(e^{i\omega}) \\ &+ \frac{1}{2}(H^*(e^{i(\omega+\pi)}) H(e^{i\omega}) + G^*(e^{i(\omega+\pi)}) G(e^{i\omega})) A_j(e^{i(\omega+\pi)}). \end{aligned}$$

$A_j(e^{i(\omega+\pi)})$ jest transformatą Fouriera sygnału $(-1)^n a_j[n]$. Takiego sygnału na wyjściu banku filtrów rekonstrukcji nie powinno być i dlatego doskonała rekonstrukcja wymaga spełnienia równania

$$H^*(e^{i(\omega+\pi)}) H(e^{i\omega}) + G^*(e^{i(\omega+\pi)}) G(e^{i\omega}) = 0 \quad (3.125)$$

Równość sygnałów $\tilde{a}_j = a_j$ wymaga ponadto spełnienia drugiego równania

$$|H(e^{i\omega})|^2 + |G(e^{i\omega})|^2 = 2. \quad (3.126)$$

Krokiem prowadzącym do otrzymania równań umożliwiających projektowanie filtrów o określonych właściwościach jest przyjęcie zależności pomiędzy filtrami h i g . Jednym z rozwiązań jest zdefiniowanie filtru g w następujący sposób

$$g[n] = (-1)^{1-n} h[1-n], \quad (3.127)$$

co w dziedzinie częstotliwości jest równoważne równości

$$G(e^{i\omega}) = e^{-i\omega} H^*(e^{i(\omega+\pi)}). \quad (3.128)$$

Obliczając lewą stronę równania (3.125), otrzymujemy

$$H(e^{i\omega}) e^{i\omega} H(e^{i(\omega+\pi)}) + H(e^{i(\omega+\pi)}) e^{i(\omega+\pi)} H(e^{i\omega}) = \quad (3.129)$$

$$H(e^{i\omega}) e^{i\omega} H(e^{i(\omega+\pi)}) - H(e^{i(\omega+\pi)}) e^{i\omega} H(e^{i\omega}) = 0, \quad (3.130)$$

co oznacza, że pierwszy warunek doskonałej rekonstrukcji jest przez taką parę filtrów spełniony. Zastępując w równaniu (3.126) filtr $G(e^{i\omega})$ prawą stroną wzoru (3.128), otrzymujemy drugi warunek doskonałej rekonstrukcji sygnału

$$|H(e^{i\omega})|^2 + |H(e^{i(\omega+\pi)})|^2 = 2, \quad (3.131)$$

zaś wyrażając $H(e^{i\omega})$ za pomocą $G(e^{i\omega})$ i wstawiając do równania (3.126), otrzymujemy

$$|G(e^{i\omega})|^2 + |G(e^{i(\omega+\pi)})|^2 = 2. \quad (3.132)$$

Układ filtrów z rysunku 3.1, wynikający z analizy wieloskalowej, pojawił się wcześniej w publikacjach dotyczących cyfrowego przetwarzania sygnałów. W pracy [25] opisane wyżej filtry nazwano *filtrami kwadraturowymi odmienionymi* (ang. *conjugate quadrature filters*)⁴.

Z punktu widzenia metod falkowych przetwarzania sygnałów najważniejsze są filtry kwadraturowe odmienione, opracowane pod koniec lat osiemdziesiątych XX wieku przez Ingrid Daubechies w ramach konstrukcji falek ortogonalnych o zwartym nośniku [4]. Z tego typu falkami stowarzyszone są filtry o skończonej odpowiedzi impulsowej. Cechą charakterystyczną falek ortogonalnych o zwartym nośniku i stowarzyszonych z nimi filtrów jest ich silna niesymetria. Poza falką Haara, która jest asymetryczna, tj. $\psi(t) = -\psi(-t)$, nie istnieją falki ortogonalne o zwartym nośniku symetryczne albo asymetryczne. W konsekwencji związane z nimi filtry wprowadzają przesunięcia fazowe, które mogą utrudniać przetwarzanie sygnałów lub obrazów. Alternatywą w takim przypadku może być wykorzystanie zamiast ortogonalnego przekształcenia falkowego przekształcenia biortogonalnego, przedstawionego w następnym punkcie.

⁴Nazwa tych filtrów może mieć odniesienie do nazwy opracowanych w połowie lat siedemdziesiątych przez D. Estebana i C. Galanda *filtrów lustrzanych kwadraturowych* (ang. *quadrature mirror filters*) [6], umożliwiających doskonałą rekonstrukcję sygnału. W układzie filtrów, analogicznym do tego z rysunku 3.1, bank dekompozycji stanowiła para filtrów (h, g) , a bank rekonstrukcji para filtrów (\tilde{h}, \tilde{g}) . Przyjęto następujące zależności między filtrami: $G(e^{i\omega}) = H(e^{i(\omega+\pi)})$, $\tilde{H}(e^{i\omega}) = H(e^{i\omega})$ i $\tilde{G}(e^{i\omega}) = -H(e^{i(\omega+\pi)})$. Z warunków doskonałej rekonstrukcji sygnału wynikało, że filtr h musi spełniać równanie $H^2(e^{i\omega}) - H^2(e^{i(\omega+\pi)}) = 2e^{-ik\omega}$, gdzie k - liczba całkowita nieparzysta. Okazało się jednak, że nie istnieją (poza filtrem Haara) filtry lustrzane kwadraturowe o skończonej odpowiedzi impulsowej spełniające dokładnie warunki doskonałej rekonstrukcji sygnału.

3.5 Szybkie biortogonalne przekształcenie falkowe

Dwie bazy, $\{\phi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ i $\{\tilde{\phi}(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, są parą baz biortogonalnych, jeśli

$$\langle \phi(t-n), \tilde{\phi}(t-m) \rangle = \delta[n-m], \quad n, m \in \mathbb{Z}. \quad (3.133)$$

Bez ograniczenia rozważań powyższy warunek można zapisać w uproszczonej formie

$$\langle \phi(t), \tilde{\phi}(t-n) \rangle = \delta[n], \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.134)$$

Rozwinięcie sygnału w bazie $\{\tilde{\phi}(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ma postać

$$f(t) = \sum_n a[n] \tilde{\phi}(t-n). \quad (3.135)$$

Współczynniki $a[n]$ można obliczyć, mnożąc skalarnie obie strony powyższego równania przez funkcje bazy $\{\phi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$

$$a[n] = \langle f(t), \phi(t-n) \rangle \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.136)$$

Alternatywnie sygnał można rozwinąć w bazie $\{\phi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$

$$f(t) = \sum_n \tilde{a}[n] \phi(t-n), \quad (3.137)$$

gdzie

$$\tilde{a}[n] = \langle f(t), \tilde{\phi}(t-n) \rangle \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.138)$$

Z powyższego widać, że do dekompozycji wykorzystywana jest jedna baza, a do rekonstrukcji druga

$$f(t) = \sum_n \langle f(t), \phi(t-n) \rangle \tilde{\phi}(t-n) = \sum_n \langle f(t), \tilde{\phi}(t-n) \rangle \phi(t-n). \quad (3.139)$$

Biortogonalne przekształcenie falkowe umożliwia wykorzystanie funkcji skalujących i falek o zwartym nośniku symetrycznych lub niesymetrycznych, a co za tym idzie, stowarzyszonych z nimi filtrów o skończonej odpowiedzi impulsowej niewprowadzających przesunięć fazowych. Ceną, jaką trzeba zapłacić za rezygnację z ortogonalnej funkcji skalującej i falki, jest konieczność użycia dwóch różnych filtrów dolnoprzepustowych dekompozycji \bar{h} i rekonstrukcji \tilde{h} , których odpowiedzi impulsowe są wzajemnie ortogonalne, tj. spełniają warunek

$$\sum_n \bar{h}[n] \tilde{h}[n - 2k] = \delta[k]. \quad (3.140)$$

Dwa pozostałe filtry, tj. \bar{g} i \tilde{g} , mogą być wyrażone za pomocą filtrów \bar{h} i \tilde{h} . W kontekście analizy wieloskalowej oznacza to konieczność skonstruowania dwóch aproksymacji wieloskalowych przestrzeni funkcji o skończonej energii $L^2(\mathbb{R})$, tj. dwóch baz $\{\psi_{j,n}(t)\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2}$ i $\{\tilde{\psi}_{j,n}(t)\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2}$ spełniających warunek biortogonalności falek

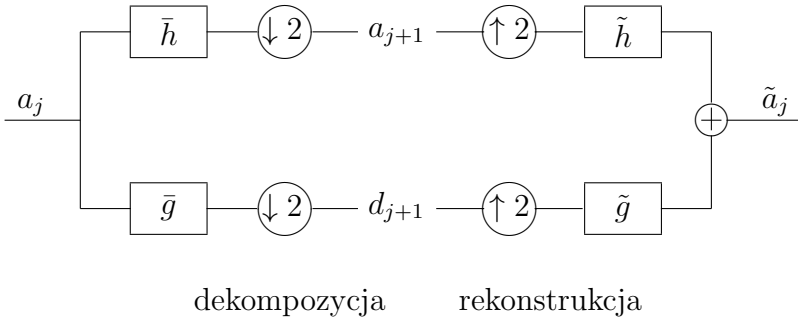
$$\langle \psi_{j,n}(t), \tilde{\psi}_{k,m}(t) \rangle = \delta[j - k] \delta[n - m], \quad (j, n), (k, m) \in \mathbb{Z}^2. \quad (3.141)$$

Dla falek biortogonalnych możliwe są dwa rozwinięcia sygnału

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_n \langle f(\tau), \psi_{j,n}(\tau) \rangle \tilde{\psi}_{j,n}(t), \quad (3.142)$$

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_n \langle f(\tau), \tilde{\psi}_{j,n}(\tau) \rangle \psi_{j,n}(t). \quad (3.143)$$

Układ filtrów implementujący szybkie biortogonalne przekształcenie falkowe otrzymuje się na podstawie układu z rysunku 3.1, zastępując filtry rekonstrukcji h , g filtrami \tilde{h} , \tilde{g} .



Rysunek 3.2: Banki filtrów biortogonalnych dekompozycji sygnału (z lewej) i rekonstrukcji sygnału (z prawej)

Analizując układ z rysunku 3.2, można otrzymać równania określające *warunki doskonałej rekonstrukcji sygnału* [31] [18] [19]:

$$H^*(e^{i(\omega+\pi)}) \tilde{H}(e^{i\omega}) + G^*(e^{i(\omega+\pi)}) \tilde{G}(e^{i\omega}) = 0, \quad (3.144)$$

$$H^*(e^{i\omega}) \tilde{H}(e^{i\omega}) + G^*(e^{i\omega}) \tilde{G}(e^{i\omega}) = 2. \quad (3.145)$$

Przyjmując filtr górnoprzepustowy dekompozycji g w postaci

$$G(e^{i\omega}) = e^{-i\omega} \tilde{H}^*(e^{i(\omega+\pi)}), \quad (3.146)$$

czyli w dziedzinie czasu

$$g[n] = (-1)^{1-n} \tilde{h}[1-n] \quad (3.147)$$

i filtr górnoprzepustowy rekonstrukcji \tilde{g} w postaci

$$\tilde{G}(e^{i\omega}) = e^{-i\omega} H^*(e^{i(\omega+\pi)}), \quad (3.148)$$

czyli w dziedzinie czasu

$$\tilde{g}[n] = (-1)^{1-n} h[1-n], \quad (3.149)$$

otrzymujemy równanie, jakie muszą spełniać filtry h i \tilde{h} , aby spełnione były warunki doskonałej rekonstrukcji sygnału

$$H^*(e^{i\omega}) \tilde{H}(e^{i\omega}) + H^*(e^{i(\omega+\pi)}) \tilde{H}(e^{i(\omega+\pi)}) = 2. \quad (3.150)$$

Powyższe równanie narzuca warunki, jakie musi spełniać suma współczynników filtrów dolnoprzepustowych h i \tilde{h} . Wynika z niego, że $H^*(e^{i0}) \tilde{H}(e^{i0}) = 2$, czyli że

$$\left(\sum_n \bar{h}[n] \right) \left(\sum_n \tilde{h}[n] \right) = 2. \quad (3.151)$$

Najczęściej przyjmuje się, że

$$\sum_n \bar{h}[n] = \sum_n \tilde{h}[n] = \sqrt{2}. \quad (3.152)$$

Suma współczynników filtru rewersyjnego jest taka sama jak filtru, z którego filtr rewersyjny powstał, więc $\sum_n h[n] = \sqrt{2}$.

Wprowadzając pomocniczą transmitancję $P(e^{i\omega})$, zdefiniowaną jako

$$P(e^{i\omega}) = H^*(e^{i\omega}) \tilde{H}(e^{i\omega}), \quad (3.153)$$

równanie (3.150) można zapisać następująco

$$P(e^{i\omega}) + P(e^{i(\omega+\pi)}) = 2. \quad (3.154)$$

Filtr o transmitancji $P(e^{i\omega})$ spełniający powyższe równanie jest nazywany *filtrem półpasmowym* (ang. *halfband filter*). Sposobem na zaprojektowanie pary filtrów biortogonalnych dolnoprzepustowych jest zaprojektowanie filtru półpasmowego $P(e^{i\omega})$, a następnie *rozszczipienie* tego filtru na dwa filtry, h i \tilde{h} , takie że $H^*(e^{i\omega}) \tilde{H}(e^{i\omega}) = P(e^{i\omega})$. Proces rozłożenia filtru $P(e^{i\omega})$ na dwa filtry, $H^*(e^{i\omega})$ i $\tilde{H}(e^{i\omega})$, jest nazywany *faktoryzacją spektralną*, a filtry $H^*(e^{i\omega})$ i $\tilde{H}(e^{i\omega})$ są nazywane *czynnikami spektralnymi*. Faktoryzacja spektralna dotyczy również filtrów ortogonalnych, w przypadku których $\tilde{H}(e^{i\omega}) = H(e^{i\omega})$. Wówczas $P(e^{i\omega}) =$

$H^*(e^{i\omega}) H(e^{i\omega}) = |H(e^{i\omega})|^2$ i stąd wymóg, żeby $P(e^{i\omega})$ miało na okręgu jednostkowym wartości nieujemne.

Wprowadzając dla uproszczenia zapisu pomocniczą zmienną zdefiniowaną następująco

$$z = e^{i\omega}, \quad (3.155)$$

równanie (3.154) można zapisać w postaci

$$P(z) + P(-z) = 2. \quad (3.156)$$

Modelując $P(z)$ wielomianem względem z , łatwo zauważyć, że $P(z)$ nie może zawierać potęg parzystych z , z wyjątkiem wyrazu wolnego, który musi być równy 1. Poniżej pokazany jest przykład zamodelowania $P(z)$ wielomianem, którego faktoryzacja spektralna prowadzi do skonstruowania filtrów biortogonalnych nazywanych filtrami 5/3.

Przykład. Filtry biortogonalne 5/3. W pracy [9] zaproponowano transmitancję filtru półpasmowego w postaci wielomianu

$$P(z) = \frac{1}{16} z^3(1+z^{-1})^3 (-1+3z^{-1}+3z^{-2}-z^{-3}), \quad (3.157)$$

który może być zapisany jako

$$P(z) = \left[\frac{\sqrt{2}}{4} z(1+z^{-1})^2 \right] \left[\frac{\sqrt{2}}{8} z^2(1+z^{-1})^2(-1+4z^{-1}-z^{-2}) \right]. \quad (3.158)$$

Przyjmując wielomian w pierwszej parze nawiasów kwadratowych jako transformatę filtru dolnoprzepustowego rekonstrukcji \tilde{h}

$$\tilde{H}(z) = \frac{\sqrt{2}}{4} z(1+z^{-1})^2 = \frac{\sqrt{2}}{4} (z+2+z^{-1}), \quad (3.159)$$

otrzymujemy

$$\tilde{H}(e^{i\omega}) = \frac{\sqrt{2}}{4} (e^{i\omega} + 2 + e^{-i\omega}), \quad (3.160)$$

skąd współczynniki filtra dolnoprzepustowego rekonstrukcji

$$\begin{aligned}\tilde{h}[0] &= \frac{2\sqrt{2}}{4} \\ \tilde{h}[-1] &= \tilde{h}[1] = \frac{\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Przyjmując wielomian w drugiej parze nawiasów kwadratowych jako transformatę filtra dolnoprzepustowego dekompozycji h

$$H(z) = \frac{\sqrt{2}}{8} z^2(1+z^{-1})^2(-1+4z^{-1}-z^{-2}) = \frac{\sqrt{2}}{8}(-z^2+2z^1+6+2z^{-1}-z^{-2}), \quad (3.161)$$

otrzymujemy

$$H(e^{i\omega}) = \frac{\sqrt{2}}{8} (-e^{i2\omega} + 2e^{i\omega} + 6 + 2e^{-i\omega} - e^{-i2\omega}), \quad (3.162)$$

skąd współczynniki filtra dolnoprzepustowego dekompozycji

$$\begin{aligned}h[0] &= \frac{6\sqrt{2}}{8} \\ h[-1] &= h[1] = \frac{2\sqrt{2}}{8} \\ h[-2] &= h[2] = -\frac{\sqrt{2}}{8}.\end{aligned}$$

Współczynniki filtra górnoprzepustowego dekompozycji obliczone według wzoru (3.147)

$$\begin{aligned}g[0] &= \tilde{h}[1] = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ g[1] &= \tilde{h}[0] = \frac{2\sqrt{2}}{4} \\ g[2] &= \tilde{h}[-1] = -\frac{\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Współczynniki filtra górnoprzepustowego rekonstrukcji obliczone według

wzoru (3.149), to

$$\begin{aligned}\tilde{g}[-1] &= h[2] = -\frac{\sqrt{2}}{8} \\ \tilde{g}[0] &= -h[1] = -\frac{2\sqrt{2}}{8} \\ \tilde{g}[1] &= h[0] = \frac{6\sqrt{2}}{8} \\ \tilde{g}[2] &= -h[-1] = -\frac{\sqrt{2}}{8} \\ \tilde{g}[3] &= h[-2] = -\frac{\sqrt{2}}{8}.\end{aligned}$$

Należy zwrócić uwagę na to, że w banku filtrów dekompozycji występują filtry rewersyjne w stosunku do filtrów h i g . Filtr h jest filtrem symetrycznym w zerze, więc $\bar{h} = h$, natomiast współczynniki filtru \bar{g} , zgodnie ze wzorem $\bar{g}[n] = g[-n]$, są następujące

$$\begin{aligned}\bar{g}[-2] &= \tilde{h}[-1] = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \bar{g}[-1] &= \tilde{h}[0] = \frac{2\sqrt{2}}{4} \\ \bar{g}[0] &= \tilde{h}[1] = -\frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Rezygnując z warunku (3.152), a narzucając na przykład warunki

$$\sum_n h[n] = 1 \quad \text{i} \quad \sum_n \tilde{h}[n] = 2, \quad (3.163)$$

otrzymuje się współczynniki filtrów o wartościach wymiernych diadycznych, tj. takich, w których licznik jest liczbą całkowitą nieparzystą, a mianownik jest potęgą dwójki

$$\begin{aligned}h[0] &= \frac{3}{4} \\ h[-1] &= h[1] = \frac{1}{4} \\ h[-2] &= h[2] = -\frac{1}{8}\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\tilde{h}[0] &= 1 \\ \tilde{h}[-1] &= \tilde{h}[1] = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Dzięki temu transformata falkowa z użyciem tych filtrów może być zaimplementowana w arytmetyce całkowitoliczbowej, zapewniającej przekształcenie odwracalne. Filtry 5/3 zostały wybrane jako filtry domyślne transformaty odwracalnej (ang. *reversible*) standardu kompresji obrazów nieruchomych JPEG 2000.

Wzory transformacyjne szybkiego biortogonalnego przekształcenia falkowego wynikają bezpośrednio ze wzorów ortogonalnego przekształcenia falkowego i z układu filtrów z rysunku 3.2 poprzez zastąpienie filtrów h i g filtrami \tilde{h} i \tilde{g} w przekształceniu odwrotnym.

Przekształcenie proste jest opisane wzorami

$$a_{j+1}[k] = \sum_n \bar{h}[2k - n] a_j[n] = a_j * \bar{h}[2k], \quad (3.164)$$

$$d_{j+1}[k] = \sum_n \bar{g}[2k - n] a_j[n] = a_j * \bar{g}[2k], \quad (3.165)$$

zaś przekształcenie odwrotne wzorem

$$a_j[n] = \check{a}_{j+1} * \check{h}[n] + \check{d}_{j+1} * \check{g}[n], \quad (3.166)$$

gdzie

$$\check{a}_{j+1}[n] = \begin{cases} a_{j+1}[k] & \text{jeśli } n = 2k \\ 0 & \text{jeśli } n = 2k + 1 \end{cases} \quad (3.167)$$

$$\check{d}_{j+1}[n] = \begin{cases} d_{j+1}[k] & \text{jeśli } n = 2k \\ 0 & \text{jeśli } n = 2k + 1. \end{cases} \quad (3.168)$$

Złożoność obliczeniowa obydwu przekształceń, analogicznie do przypadku przekształcenia ortogonalnego, jest liniowa.

3.5.1 Bank filtrów iterowanych służący do obliczania funkcji skalującej

Rekonstrukcja sygnału zdekomponowanego falkowo wykonywana jest w układzie filtrów pokazanych na rysunkach 3.1 albo 3.2. Banki filtrów rekonstrukcji mogą służyć do obliczania przybliżonych wartości funkcji skalującej $\phi(t)$ stowarzyszonej z filtrem dolnoprzepustowym h albo funkcji skalującej $\tilde{\phi}(t)$ stowarzyszonej z filtrem dolnoprzepustowym \tilde{h} . W obydwu przypadkach algorytmy obliczeniowe są takie same, więc dalej będzie opisany tylko algorytm obliczania przybliżonych wartości funkcji $\phi(t)$ na podstawie filtru h .

W dekompozycji sygnału opisaney algorytmami szybkiego ortogonalnego i biortogonalnego przekształcenia falkowego numery kroków zwiększają się, tj. po wykonaniu kroku j , następny krok ma numer $j + 1$. Podczas rekonstrukcji sygnału numery kroków zmniejszają się, tj. po wykonaniu kroku j następny krok ma numer $j - 1$. W celu przedstawienia sposobu obliczania wartości funkcji skalującej za pomocą banku filtrów rekonstrukcji wygodnie jest zmienić kolejność numeracji kroków i mimo że proces obliczeniowy jest procesem rekonstrukcji, zwiększać numer następnej iteracji. Konsekwencją tego będzie zmiana postaci wzoru określającego skalę z 2^j na 2^{-j} i zmiana definicji przeskalowanej funkcji skalującej

$$\phi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^{-j}}} \phi\left(\frac{t - 2^{-j}n}{2^{-j}}\right). \quad (3.169)$$

Jedną z fundamentalnych własności funkcji skalujących wyraża równość

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt = 1. \quad (3.170)$$

Funkcja skalująca przeskalowana i przesunięta w poniższy sposób również

spełnia warunek

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^{-j}} \phi\left(\frac{t - 2^{-j}n}{2^{-j}}\right) dt = 1 \quad (3.171)$$

i może służyć jako *funkcja wagowa* do otrzymania wersji *uśrednionej* sygnału $f(t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{2^{-j}} \phi\left(\frac{t - 2^{-j}n}{2^{-j}}\right) dt. \quad (3.172)$$

Dla dostatecznie małych skal 2^{-j} sygnał uśredniony na przedziale równym nośnikowi przeskalowanej i przesuniętej funkcji skalującej można traktować jako wartość przybliżoną sygnału $f(t)$ w punkcie $t = 2^{-j}n$

$$f(2^{-j}n) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{2^{-j}} \phi\left(\frac{t - 2^{-j}n}{2^{-j}}\right) dt. \quad (3.173)$$

Powyższa zależność obowiązuje dla dowolnych funkcji $f(t)$, w tym dla $f(t) = \phi(t)$, więc

$$\phi(2^{-j}n) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \frac{1}{2^{-j}} \phi\left(\frac{t - 2^{-j}n}{2^{-j}}\right) dt. \quad (3.174)$$

Wśród filtrów stosowanych w przekształceniach falkowych szczególną rolę odgrywają filtry o skończonej odpowiedzi impulsowej. Jeżeli filtr ma L współczynników odpowiedzi impulsowej i jest filtrem przyczynowym, to stowarzyszona z nim funkcja skalująca $\phi(t)$ ma zwarty nośnik, którym jest przedział $[0, L - 1]$. Nośnikiem funkcji skalującej przeskalowanej i przesuniętej $\phi_{j,n}(t)$ jest przedział $[2^{-j}n, 2^{-j}(n+L-1)]$. W tym przypadku wzór (3.174) przyjmuje postać

$$\phi(2^{-j}n) \approx \int_{2^{-j}n}^{2^{-j}(n+L-1)} \phi(t) \frac{1}{2^{-j}} \phi\left(\frac{t - 2^{-j}n}{2^{-j}}\right) dt. \quad (3.175)$$

Oznacza to, że przybliżona wartość funkcji skalującej $\phi(t)$ w punkcie $t = 2^{-j}n$ jest uśrednioną wartością funkcji skalującej w przedziale

$[2^{-j}n, 2^{-j}(n+L-1)]$. Prawą stronę wzoru (3.175) można zapisać w postaci

$$\frac{1}{\sqrt{2^{-j}}} \int_{2^{-j}n}^{2^{-j}(n+L-1)} \phi(t) \frac{1}{\sqrt{2^{-j}}} \phi\left(\frac{t-2^{-j}n}{2^{-j}}\right) dt. \quad (3.176)$$

Porównując powyższe wyrażenie z wzorem definiującym współczynniki skalujące

$$a_j[n] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{2^{-j}}} \phi\left(\frac{t-2^{-j}n}{2^{-j}}\right) dt, \quad (3.177)$$

łatwo zauważyć, że

$$\phi(2^{-j}n) \approx \sqrt{2^j} a_j[n], \quad (3.178)$$

gdzie współczynniki $a_j[n]$ są współczynnikami skalującymi dekompozycji falkowej funkcji skalującej. Poniżej pokazano, jak za pomocą banku filtrów rekonstrukcji obliczyć współczynniki skalujące $a_j[n]$ i tym samym przybliżone wartości funkcji skalującej.

Zakładając istnienie funkcji skalującej $\phi(t)$ w postaci sygnału czasu ciągłego posiadającego transformatę Fouriera $\Phi(\omega)$, przybliżenie (3.178) można wyrazić w dziedzinie częstotliwości w postaci

$$\frac{1}{2^{-j}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi\left(\omega + \frac{n2\pi}{2^{-j}}\right) \approx \sqrt{2^j} A_j(e^{i\omega}). \quad (3.179)$$

Przybliżenie to po uproszczeniu przyjmuje postać

$$\sum_n \Phi(\omega + 2^j 2n\pi) \approx \frac{A_j(e^{i\omega})}{(\sqrt{2})^j}. \quad (3.180)$$

Poniżej pokazano, że przyjmując $a_0[n] = \delta[n]$, po wykonaniu J iteracji otrzymuje się

$$A_J(e^{i\omega}) = \prod_{j=1}^J H(e^{i\omega/2^j}), \quad (3.181)$$

czyli że

$$\sum_n \Phi(\omega + 2^J 2n\pi) \approx \prod_{j=1}^J \frac{H(e^{i\omega/2^j})}{\sqrt{2}}, \quad (3.182)$$

co oznacza, że próbkowana z krokiem 2^{-J} funkcja skalująca $\phi(t)$ ma w przybliżeniu transformatę Fouriera będącą iloczynem pierwszych J czynników prawej strony wzoru (3.92)

$$\Phi(\omega) = \prod_{j=1}^{+\infty} \frac{H(e^{i\omega/2^j})}{\sqrt{2}}. \quad (3.183)$$

Obliczając zatem odwrotną transformatę Fouriera wyrażenia

$$\prod_{j=1}^J \frac{H(e^{i\omega/2^j})}{\sqrt{2}}, \quad (3.184)$$

otrzymujemy przybliżone wartości funkcji skalującej $\phi(t)$ w punktach $t = n/2^J$, $n \in \mathbb{Z}$.

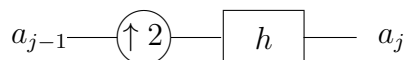
Dowód powyższego stwierdzenia oparty jest na przekształceniach układów *ekspander i filtr* implementujących odwrotne przekształcenie falkowe (3.124), które przy założeniu, że $a_0[n] = \delta[n]$, $d_0[n] = 0$, $d_j[n] = 0$, dla $j = 1, \dots, J$ redukuje się do postaci

$$a_j[n] = \sum_k h[n - 2k] a_{j-1}[k] = \check{a}_{j-1} * h[n], \quad (3.185)$$

gdzie

$$\check{a}_{j-1}[n] = \begin{cases} a_{j-1}[k] & \text{jeśli } n = 2k \\ 0 & \text{jeśli } n = 2k + 1. \end{cases} \quad (3.186)$$

Powyższe przekształcenie implementuje układ pokazany na rysunku 3.3.



Rysunek 3.3: Układ *ekspander i filtr*

Na rysunku 3.4 pokazano układ implementujący proces obliczeniowy splotu (3.185) dla $J = 3$.

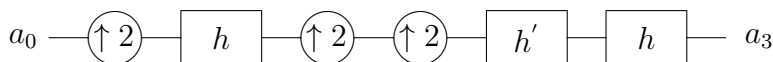


Rysunek 3.4: Kaskadowe połączenie trzech układów *ekspandera i filtru*

Wykorzystując równoważność układów pokazanych na rysunku 3.5, układ z rysunku 3.4 można przekształcić do postaci pokazanej na rysunku 3.6.



Rysunek 3.5: Dwa układy równoważne: *filtr i ekspander* oraz *ekspander i filtr*, gdzie $H'(e^{i\omega}) = H(e^{i2\omega})$

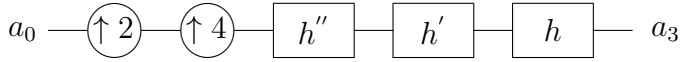


Rysunek 3.6: Pierwszy etap przekształcenia układu z rysunku 3.4, gdzie $H'(e^{i\omega}) = H(e^{i2\omega})$

Układ z rysunku 3.6 można przekształcić do układu pokazanego na rysunku 3.7.

Na rysunku 3.8 pokazany jest układ równoważny trzem iteracjom. Transmitancję filtru z rysunku 3.8 wyraża wzór

$$H^{(3)}(e^{i\omega}) = H(e^{i4\omega}) H(e^{i2\omega}) H(e^{i\omega}) = \prod_{j=0}^2 H(e^{i2^j\omega}). \quad (3.187)$$

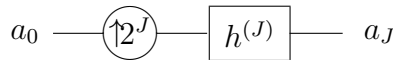


Rysunek 3.7: Drugi etap przekształcenia układu z rysunku 3.4, gdzie $H''(e^{i\omega}) = H(e^{i4\omega})$



Rysunek 3.8: Układ z jednym ekspanderem i jednym filtrem równoważny kaskadowemu połączeniu trzech układów ekspandera i filtra z rysunku 3.4

Łatwo uogólnić wzór (3.187) na kaskadowe połączenie $J > 0$ układów z rysunku 3.3. Układ zastępczy takiego połączenia pokazany jest na rysunku 3.9.



Rysunek 3.9: Układ z jednym ekspanderem i jednym filtrem równoważny kaskadowemu połączeniu J układów z rysunku 3.3

Transmitancję filtra równoważnego $H^{(J)}(e^{i\omega})$ wyraża wzór

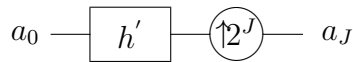
$$H^{(J)}(e^{i\omega}) = \prod_{j=0}^{J-1} H(e^{i2^j\omega}). \quad (3.188)$$

Wykorzystując równoważność układów z rysunku 3.10,



Rysunek 3.10: Układy równoważne, gdzie $H'(e^{i\omega}) = H(e^{i\omega/N})$

kaskadowe połączenie $J > 0$ układów *ekspander i filtr* można zastąpić układem z rysunku 3.11.



Rysunek 3.11: Układ równoważny połączeniu kaskadowemu $J > 0$ układów z rysunku 3.3, gdzie $H'(e^{i\omega}) = \prod_{j=1}^J H(e^{i\omega/2^j})$

Na wejściu filtru z rysunku 3.11 występuje sygnał $a_0[n] = \delta[n]$, którego transformata Fouriera równa jest 1, więc transformatę Fouriera sygnału na wyjściu filtru wyraża wzór

$$A_J(e^{i\omega}) = H^{(J)}(e^{i\omega/2^J}) = \prod_{j=1}^J H(e^{i\omega/2^j}), \quad (3.189)$$

co dowodzi równości (3.181). Występujący za filtrem ekspander rozszerza sygnał wyjściowy filtru 2^J -krotnie, tj. do punktów t będących liczbami całkowitymi.

Wykorzystując opisany wyżej algorytm, otrzymuje się wartości przybliżone funkcji skalującej po J iteracjach w punktach $t = 2^{-J}n$

$$\phi^{(J)}(2^{-J}n) = \sqrt{2^J} a_J[n]. \quad (3.190)$$

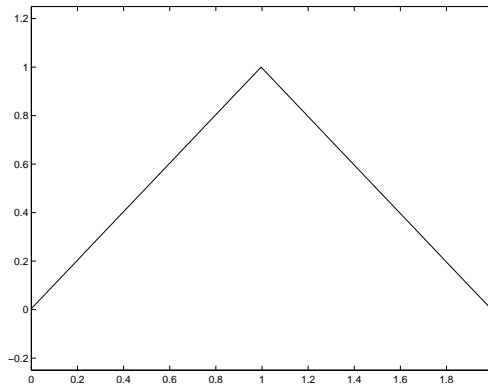
Wartości powyższe można użyć do skonstruowania przybliżenia funkcji

skalującej w postaci funkcji schodkowej

$$\phi^{(J)}(t) = \sqrt{2^J} a_J[n], \quad 2^{-J}n \leq t < 2^{-J}(n+1), \quad 0 \leq n < 2^J(L-1), \quad (3.191)$$

gdzie L - liczba współczynników filtru h .

Poniżej pokazano program w języku MATLAB obliczający według opisanego wyżej algorytmu wartości przybliżone funkcji skalującej $\phi(t)$ stowarzyszonej z filtrem o trzech współczynnikach odpowiedzi impulsowej: $h[0] = \sqrt{2}/4$, $h[1] = \sqrt{2}/2$, $h[2] = \sqrt{2}/4$. Funkcją skalującą stowarzyszoną z tym filtrem jest bazowa funkcja sklejana pierwszego stopnia (patrz punkt 4.5.1). Wykres funkcji (po wykonaniu ośmiu iteracji) pokazano na rysunku 3.12.



Rysunek 3.12: Funkcja skalująca $\phi(t)$ w postaci bazowej funkcji skleianej pierwszego stopnia, stowarzyszona z filtrem o odpowiedzi impulsowej: $h[0] = \sqrt{2}/4$, $h[1] = \sqrt{2}/2$, $h[2] = \sqrt{2}/4$

```
function [t, phi] = phi_hat(J)
% funkcja skalująca - bazowa funkcja sklejana pierwszego stopnia
```



```
h(1) = sqrt(2)/4;
h(2) = sqrt(2)/2;
h(3) = sqrt(2)/4;
L = 3;           % liczba współczynników filtru
N = (L-1)*(2^J) % liczba obliczanych wartości funkcji skalującej
phi = zeros(1,N);
bufor = zeros(1,N);
phi(1) = 1;
Nj = L-1;

for j = 1 : 1 : J
    for n = 1 : 1 : Nj
        bufor(2*n-1) = phi(n);
%        bufor(2*n) = 0;
    end
    Nj = 2*Nj;
    for n = 1 : 2 : Nj-1
        s=0;
        for k = 1 : 2 : L
            if n-k>=0
                s = s+ bufor(n-k+1)*h(k);
            end
        end
        phi(n) = s;
        s=0;
        for k = 2 : 2 : L
            if n+1-k>=0
                s = s + bufor(n+1-k+1)*h(k);
            end
        end
    end
end
```

```
        end
        phi(n+1) = s;
    end
end
phi = sqrt(2^J)*phi;
h = 2^(-J);
t = 0: h: L-1-h;
```


4 Falki

4.1 Ogólne właściwości falek

Funkcje nazwane falekami powstały w odpowiedzi na potrzebę stworzenia aparatu matematycznego umożliwiającego badanie właściwości sygnałów w otoczeniu wybranych chwil czasowych, w sposób ulepszony w stosunku do okienkowego przekształcenia Fouriera. Fundamentalną cechą falki $\psi(t)$ jest brak składowej stałej

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (4.1)$$

Powyższa własność oznacza, że falka musi mieć oscylacje. Falka powinna być różna od zera tylko w skończonym przedziale czasu albo bardzo szybko, np. wykładniczo, zanikać poza tym przedziałem.

Przekształcenie falkowe polega na obliczeniu *transformaty falkowej* $Wf(t, s)$, która jest iloczynem skalarnym sygnału $f(t)$ i *przeskalowanej i przesuniętej* falki:

$$Wf(t, s) = \langle f(\tau), \psi_{t,s}(\tau) \rangle, \quad (4.2)$$

gdzie

$$\psi_{t,s}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{\tau - t}{s}\right). \quad (4.3)$$

Skalowanie i przesuwanie falki to *zoom* przekształcenia falkowego, który pozwala obserwować „drzewo” i „las”, w którym jest to drzewo.

Transformata falkowa funkcji jednej zmiennej, zgodnie ze wzorem (4.2), jest funkcją dwóch zmiennych: czasu i skali. Jest to reprezentacja wysoce redundancyjna i kosztowna obliczeniowo. Naturalne jest dążenie do dyskretyzacji płaszczyzny czas-skala w taki sposób, aby zmniejszyć nakłady obliczeniowe i zachować odwracalność przekształcenia falkowego. Ogólnym sposobem dyskretyzacji jest wykorzystanie falek przeskalowanych i przesuwanych według wzoru:

$$\psi_{n,j}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{a^j}} \psi\left(\frac{\tau - na^j b}{a^j}\right), \quad (4.4)$$

gdzie stałe $a > 0$ i $b > 0$ są parametrami dyskretyzacji płaszczyzny czas-skala. Wybierając na przykład $a = 2$ i $b = 1$, otrzymujemy reprezentację falkową sygnału w postaci ciągu współczynników liczbowych $\{d_j[n]\}_{n,j \in \mathbb{Z}}$:

$$d_j[n] = \langle f(\tau), \psi_{n,j}(\tau) \rangle, \quad (4.5)$$

na podstawie których jest możliwa rekonstrukcja sygnału w postaci podwójnej sumy:

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_j[n] \psi_{n,j}(t). \quad (4.6)$$

Jak wcześniej wspomniano, przekształcenia falkowe powstały w celu umożliwienia badania lokalnych cech sygnałów. Typowym pytaniem jest pytanie następujące: jakie częstotliwości dominują w sygnale w określonym przedziale czasu, którego środkiem jest określony moment czasu? Odpowiedź można uzyskać, analizując transformatę falkową sygnału z falką w różnych skalach przesuniętą do wskazanego momentu czasu. Analizę należy rozpocząć od określenia parametrów charakteryzujących falkę matkę $\psi(t)$ w dziedzinie czasu i w dziedzinie częstotliwości. Parametrami tymi są: \hat{t} - odcięta środka ciężkości gęstości czasowej energii falki matki $\psi(t)$, $\hat{\omega}$ - odcięta środka ciężkości gęstości widmowej energii falki, σ_t - szerokość średniokwadratowa falki, σ_ω - szerokość średniokwadratowa widma

falki (por. p. 2.2.2). Wymienione parametry są zdefiniowane następująco:

$$\sigma_t = \inf_{\hat{t}} \frac{\|(t - \hat{t}) \psi(t)\|}{\|\psi(t)\|} < \infty \quad (4.7)$$

$$\sigma_\omega = \inf_{\hat{\omega}} \frac{\|(\omega - \hat{\omega}) \Psi(\omega)\|}{\|\Psi(\omega)\|} < \infty. \quad (4.8)$$

Sposób obliczania tych parametrów podany został w rozdziale 2. Falka $\psi(t)$ wnosi swój wkład do sygnału rekonstruowanego w przedziale czasu $[\hat{t} - \sigma_t, \hat{t} + \sigma_t]$ i w przedziale częstotliwości $[\hat{\omega} - \sigma_\omega, \hat{\omega} + \sigma_\omega]$. Falka przeskalowana ze współczynnikiem s i przesunięta do chwili czasowej t

$$\psi_{t,s}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{\tau - t}{s}\right) \quad (4.9)$$

wnosi swój wkład do sygnału rekonstruowanego w przedziale czasu

$$[t + s\hat{t} - s\sigma_t, t + s\hat{t} + s\sigma_t] \quad (4.10)$$

i w przedziale częstotliwości

$$[(\hat{\omega} - \sigma_\omega)/s, (\hat{\omega} + \sigma_\omega)/s]. \quad (4.11)$$

W szczególności dla skal i przesunięć, jak we wzorze (4.4), przedziały te są odpowiednio równe

$$[t + a^j \hat{t} - a^j \sigma_t, t + a^j \hat{t} + a^j \sigma_t] \quad (4.12)$$

i

$$[a^{-j}(\hat{\omega} - \sigma_\omega), a^{-j}(\hat{\omega} + \sigma_\omega)]. \quad (4.13)$$

Jak widać, małym skalom odpowiada duża rozdzielczość w dziedzinie czasu (krótki przedział czasu) i mała rozdzielczość w dziedzinie częstotliwości (szerokie pasmo częstotliwości), i na odwrót, dużym skalom odpowiada mała rozdzielczość w dziedzinie czasu (długi przedział czasu) i

duża rozdzielczość w dziedzinie częstotliwości (wąskie pasmo częstotliwości).

W celu uzyskania dużej rozdzielczości falki, zarówno w dziedzinie czasu, jak i w dziedzinie częstotliwości, pożądane jest, aby parametry σ_t i σ_ω były małe. Jednocześnie łączna rozdzielczość jest ograniczona, gdyż zgodnie z zasadą nieoznaczoności

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2}. \quad (4.14)$$

Naturalną konsekwencją wymogu dużej rozdzielczości falek w dziedzinie czasu i w dziedzinie częstotliwości jest wymóg szybkiego zanikania falki w dziedzinie czasu i szybkiego zanikania transformaty Fouriera falki. Falka może mieć zwarty nośnik w dziedzinie czasu albo w dziedzinie częstotliwości, ale nie jest możliwy zwarty nośnik w obu tych dziedzinach jednocześnie. Większe znaczenie praktyczne mają falki o zwartym nośniku w dziedzinie czasu niż falki o zwartym nośniku ich transformat Fouriera.

Falki wykorzystywane do obliczania ciągłej prostej i odwrotnej transformaty falkowej muszą spełniać *warunek dopuszczalności* (ang. *admissibility condition*)

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty, \quad (4.15)$$

gdź stała C_ψ występuje we wzorze (1.11) na odwrotną ciągłą transformację falkową (por. rozdz. 1). Falki mające znaczenie praktyczne należą do przestrzeni funkcji o skończonej energii, tj. $\psi(t) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, oraz do przestrzeni funkcji bezwzględnie całkowalnych, tj. $\psi(t) \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$. Ten ostatni warunek pociąga za sobą ciągłość transformaty Fouriera i C_ψ może być skończona tylko wtedy jeśli $\Psi(0) = 0$, czyli jeśli $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$, co oznacza, że falka nie ma składowej stałej.

Z natury sygnału $f(t)$ aproksymowanego przez szereg falkowy (4.6) może wynikać wskazanie użycia falki o określonej *gładkości*, mierzonej

liczbą ciągłych pochodnych. Dotyczy to zarówno falki użytej do dekompozycji sygnału, czyli do obliczenia współczynników falkowych $d_j[n]$, jak i do rekonstrukcji sygnału. Dobór falek z uwzględnieniem gładkości sygnału może dać bardziej zwartą reprezentację falkową sygnału. Stosowaną miarą gładkości falek jest tzw. *wykładnik Lipschitza*, nazywany także *wykładnikiem Höldera*.

Gładkość funkcji, która nie ma ciągłej pochodnej, może być scharakteryzowana za pomocą wykładnika Lipschitza $0 \leq \alpha \leq 1$, jeżeli istnieje stała $K > 0$, taka że

$$|f(t) - f(\tau)| < K |t - \tau|^\alpha. \quad (4.16)$$

Powyższa definicja dotyczy gładkości punktowej (w punkcie $t = \tau$) i może być rozszerzona na gładkość jednostajną na przedziale $[a, b]$, jeżeli nierówność (4.16) jest spełniona dla wszystkich punktów $\tau \in [a, b]$ ze stałą K , która jest niezależna od punktu τ . Miarą gładkości funkcji $f(t)$ według Lipschitza jest wartość równa supremum w punkcie τ lub na przedziale $[a, b]$ wykładnika α w nierówności (4.16).

Analizując nierówność (4.16), łatwo dostrzec, co oznacza wykładnik $\alpha = 0$. Wówczas

$$|f(t) - f(\tau)| < K, \quad (4.17)$$

czyli funkcja ograniczona jest nieciągła w punkcie τ . Drugą skrajną wartością współczynnika α jest wartość 1. Wówczas

$$|f(t) - f(\tau)| < K |t - \tau|. \quad (4.18)$$

Ten przypadek dotyczy na przykład bazowej funkcji sklejanego pierwszego rzędu równej $1 - |t|$ dla $|t| \leq 1$ i równej 0 dla $|t| > 1$. Funkcja ta nie ma ciągłej pochodnej i tym samym nie należy do przestrzeni funkcji mających ciągłą pierwszą pochodną, ale ma wykładnik $\alpha = 1$. Wartości wykładnika $0 < \alpha < 1$ oznaczają, że funkcja nie jest różniczkowalna i

charakteryzuje typ osobliwości [12]. Jeżeli dla danej funkcji wykładnik α w nierówności (4.16) jest większy od 1, oznacza to, że funkcja posiada $\lceil \alpha \rceil - 1$ ¹ ciągłych pochodnych.

Ważną własnością falki są *znikające momenty*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t) dt = 0. \quad (4.19)$$

Jeżeli powyższa całka zeruje się dla $k = 0, 1, \dots, p - 1$, to mówi się, że falka ma p znikających momentów. Oznacza to, że falka jest ortogonalna do wielomianów stopnia niższego niż p . Znaczenie znikających momentów falki w przekształceniach falkowych i w konsekwencji w falkowej reprezentacji sygnału wyjaśnimy, analizując aproksymację sygnału $f(t)$ w podprzestrzeni V_{-1}

$$f_{-1}(t) = \sum_n a_{-1}[n] \phi_{-1,n}(t). \quad (4.20)$$

Sygnał ten może być zdekomponowany na sygnał wygładzony z podprzestrzeni V_0 i sygnał szczegółowy z podprzestrzeni W_0

$$f_{-1}(t) = \sum_n a_0[n] \phi(t - n) + \sum_n d_0[n] \psi(t - n). \quad (4.21)$$

Zakładając, że falka jest falką ortogonalną, współczynniki skalujące $a_0[n]$ obliczane są ze wzoru

$$a_0[n] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \phi(t - n) dt, \quad (4.22)$$

a współczynniki falkowe $d_0[n]$ ze wzoru

$$d_0[n] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi(t - n) dt. \quad (4.23)$$

¹ $\lceil \alpha \rceil$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą większą lub równą α .

Wyberzemy konkretny współczynnik falkowy, na przykład $d_0[0]$. Jego wartość obliczamy ze wzoru

$$d_0[0] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi(t) dt. \quad (4.24)$$

Jeżeli falka ma zwarty nośnik równy przedziałowi $[b_1, b_2]$ i sygnał $f(t)$ w tym przedziale jest na tyle gładki, że może być opisany wielomianem stopnia niższego niż liczba znikających momentów falki p , to współczynnik falkowy $d_0[0]$ będzie równy zero. Sygnał $f_{-1}(t)$ w rozważanym przedziale będzie określony przez współczynniki przy translacjach funkcji skalującej, gdyż podprzestrzeń V_0 zawiera wielomiany stopnia niższego niż p^2 .

Im więcej jest znikających momentów, tym mniejsze co do modułu mogą być współczynniki falkowe w reprezentacji sygnału w postaci szeregu falkowego

$$f_0(t) = \sum_n a_J[n] \phi_{J,n}(t) + \sum_{j=1}^J \sum_n d_j[n] \psi_{j,n}(t). \quad (4.25)$$

Sygnał $f(t)$ w otoczeniu punktu $\tau = 2^j n$, tj. dla $t \in [\tau - h, \tau + h]$, $h > 0$, można przedstawić w postaci wielomianu Taylora i błędzi $\varepsilon_\tau(t)$

$$f(t) = f(\tau) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{f^{(k)}(\tau)}{k!} (t - \tau)^k + \varepsilon_\tau(t), \quad (4.26)$$

gdzie $\varepsilon_\tau(t)$ ma następujące oszacowanie

$$|\varepsilon_\tau(t)| \leq \frac{|t - \tau|^m}{m!} \sup_{u \in [\tau - h, \tau + h]} |f^{(m)}(u)|. \quad (4.27)$$

²Jest to tzw. warunek Fixa-Stranga, który dowodzi, że falka $\psi(t)$ ma p znikających momentów wtedy i tylko wtedy, jeśli stowarzyszona z nią funkcja skalująca $\phi(t)$ jest taka, że dowolny wielomian stopnia $p - 1$ może być zapisany jako kombinacja liniowa funkcji skalujących $\{\phi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ [12] [27].

Jeżeli falka ma $p = m$ znikających momentów, to jest ortogonalna do wielomianu Taylora i wartość transformaty falkowej w rozpatrywanym punkcie zależy wyłącznie od błędu aproksymacji $\varepsilon_\tau(t)$.

Znikające momenty falki mają ścisły związek z zerowaniem się w punkcie $\omega = 0$ transformaty Fouriera falki i jej pochodnych. Z warunku

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (4.28)$$

wynika, że

$$\Psi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-i0t} dt = 0. \quad (4.29)$$

Pochodna rzędu $k > 0$ transformaty Fouriera falki jest równa

$$\frac{d^k \Psi(\omega)}{d\omega^k} = \int_{-\infty}^{+\infty} (-it)^k \psi(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (4.30)$$

Uwzględniając równość (4.19), otrzymujemy warunki w dziedzinie częstotliwości równoważne znikającym momentom w dziedzinie czasu

$$\left. \frac{d^k \Psi(\omega)}{d\omega^k} \right|_{\omega=0} = 0 \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \dots, p-1. \quad (4.31)$$

Zerowanie się transformaty Fouriera falki i jej pierwszych $p-1$ pochodnych określają płaskość transformaty Fouriera falki w otoczeniu częstotliwości $\omega = 0$, czyli w zakresie niskich częstotliwości, i pokazują, że falkę można traktować jako odpowiedź impulsową filtru analogowego (czasu ciągłego) pasmowoprzepustowego.

Równanie falkowe umożliwia wyprowadzenie związku pomiędzy wartością transformaty Fouriera falki i jej pochodnych w punkcie $\omega = 0$ i wartościami transmitancji filtru g w punkcie $\omega = 0$. W dziedzinie częstotliwości równanie falkowe ma postać

$$\sqrt{2} \Psi(2\omega) = G(e^{i\omega}) \Phi(\omega) \quad (4.32)$$

i z (4.29) wynika, że $G(e^{i0}) \Phi(0) = 0$. Transformata Fouriera funkcji skalującej

$$\Phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1, \quad (4.33)$$

zatem

$$G(e^{i0}) = 0. \quad (4.34)$$

Różniczkując równanie dylatacyjne, otrzymujemy

$$\sqrt{2} \frac{d\Psi(2\omega)}{d\omega} = \Phi(\omega) \frac{dG(e^{i\omega})}{d\omega} + G(e^{i\omega}) \frac{d\Phi(\omega)}{d\omega}. \quad (4.35)$$

Pochodna lewej strony równania dylatacyjnego ma postać

$$\sqrt{2} \frac{d\Psi(2\omega)}{d\omega} = \sqrt{2} \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) e^{-i2\omega t} dt = -2\sqrt{2} i \int_{-\infty}^{+\infty} t \psi(t) e^{-i2\omega t} dt. \quad (4.36)$$

W punkcie $\omega = 0$

$$\sqrt{2} \left. \frac{d\Psi(2\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=0} = -2\sqrt{2} i \int_{-\infty}^{+\infty} t \psi(t) dt = 0. \quad (4.37)$$

Otrzymujemy więc równanie

$$\Phi(0) \left. \frac{dG(e^{i\omega})}{d\omega} \right|_{\omega=0} + G(e^{i0}) \left. \frac{d\Phi(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=0} = 0, \quad (4.38)$$

z którego wynika, że

$$\left. \frac{dG(e^{i\omega})}{d\omega} \right|_{\omega=0} = 0. \quad (4.39)$$

W analogiczny sposób można pokazać, że

$$\left. \frac{d^k G(e^{i\omega})}{d\omega^k} \right|_{\omega=0} = 0 \quad \text{dla} \quad k = 2, 3, \dots, p-1. \quad (4.40)$$

W konsekwencji

$$\left. \frac{d^k G(e^{i\omega})}{d\omega^k} \right|_{\omega=0} = 0 \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \dots, p-1, \quad (4.41)$$

co oznacza, że transmitancja filtru górnoprzepustowego związanego z falką równaniem falkowym i jej pochodne rzędu od 1 do $p-1$, gdzie p jest liczbą znikających momentów falki, zerują się w punkcie $\omega = 0$.

4.2 Falki ortogonalne o zwartym nośniku

Jak wynika ze wzorów opisujących szybkie przekształcenia falkowe (rozdział 3), do obliczenia dyskretnej reprezentacji falkowej sygnału potrzebne są filtry cyfrowe h i g . W przypadku przekształceń ortogonalnych wystarczy jeden filtr dolnoprzepustowy h , gdyż na jego podstawie, w prosty sposób, tworzy się filtr górnoprzepustowy g . Falka nie jest bezpośrednio wykorzystywana w dyskretnych przekształceniach falkowych, ale jej właściwości decydują o wartościach zbioru współczynników liczbowych stanowiących reprezentację falkową sygnału. Wybór falki determinuje wybór stowarzyszonych z nią filtrów cyfrowych występujących we wzorach transformacyjnych. Poniżej pokazano związki pomiędzy właściwościami falki i właściwościami stowarzyszonych z nią filtrów.

Wyprowadzone własności transformaty filtru g przenoszą się odpowiednio na filtr h , za pomocą którego filtr g jest zdefiniowany (rozdział 3) w postaci

$$G(e^{i\omega}) = e^{-i\omega} H^*(e^{i(\omega+\pi)}), \quad (4.42)$$

skąd

$$H(e^{i(\omega+\pi)}) = e^{-i\omega} G^*(e^{i\omega}) \quad (4.43)$$

i

$$H(e^{i\pi}) = e^{-i0} G^*(e^{i0}) = 0. \quad (4.44)$$

Pochodna transmitancji filtru h ma postać

$$\frac{dH(e^{i(\omega+\pi)})}{d\omega} = -ie^{-i\omega} G^*(e^{i\omega}) + e^{-i\omega} \frac{dG^*(e^{i\omega})}{d\omega} \quad (4.45)$$

i z powyższego wynika, że

$$\left. \frac{dH(e^{i\omega})}{d\omega} \right|_{\omega=\pi} = 0. \quad (4.46)$$

W analogiczny sposób można pokazać, że

$$\left. \frac{d^k H(e^{i\omega})}{d\omega^k} \right|_{\omega=\pi} = 0 \quad \text{dla} \quad k = 2, 3, \dots, p-1. \quad (4.47)$$

Podsumowując, stwierdzamy, że transmitancja filtra dolnoprzepustowego h stowarzyszonego z falką ortogonalną, która ma p znikających momentów, zeruje się w punkcie $\omega = \pi$ i zerują się w tym punkcie pochodne transmitancji od pierwszej do $p-1$

$$\left. \frac{d^k H(e^{i\omega})}{d\omega^k} \right|_{\omega=\pi} = 0 \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \dots, p-1. \quad (4.48)$$

Z falkami ortogonalnymi o zwartym nośniku stowarzyszone są filtry ortogonalne o skończonej odpowiedzi impulsowej. Nie ograniczając ogólności rozważań, można przyjąć, że filtr dolnoprzepustowy h jest filtrem przyczynowym, którego transmitancją jest wielomian trygonometryczny

$$H(e^{i\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]e^{-in\omega}. \quad (4.49)$$

Filtr ortogonalny, tj. spełniający warunek

$$|H(e^{i\omega})|^2 + |H(e^{i(\omega+\pi)})|^2 = 2, \quad (4.50)$$

taki że jego transmitancja i $p-1$ jej pochodnych zerują się przy częstotliwości $\omega = \pi$ i który ma najmniejszą liczbę współczynników, można zamodelować następującym wielomianem

$$H(e^{i\omega}) = \sqrt{2} \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^p R(e^{-i\omega}), \quad (4.51)$$

gdzie $R(e^{-i\omega})$ jest wielomianem względem $e^{-i\omega}$ [5].

Dowód na to, że w transmitancji filtra o podanych wyżej własnościach występuje czynnik $\left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2}\right)^p$, można przeprowadzić, wzorując się na poniższych przekształceniach, w których dla skrócenia zapisu wprowadzono pomocniczą zmienną $z = e^{-i\omega}$.

Niech $W_M(z)$ będzie wielomianem stopnia M i niech $W_M^{(k)}(z)$, $k = 0, 1, \dots, p-1$, $p < M$, oznacza k -tą pochodną zerującą się w punkcie $z = -1$, tj. $W_M^{(k)}(-1) = 0$. Z warunku $W_M(-1) = 0$ wynika, że wielomian $W_M(z)$ może być przedstawiony w postaci

$$W_M(z) = (z + 1) W_{M-1}(z). \quad (4.52)$$

Pierwszą pochodną wielomianu można zapisać następująco

$$W_M^{(1)}(z) = W_{M-1}(z) + (z + 1) W_{M-1}^{(1)}(z). \quad (4.53)$$

Z warunku $W_M^{(1)}(-1) = 0$ wynika, że $W_{M-1}(z)$ musi się równać zeru w punkcie $z = -1$, a więc można wielomian przedstawić w postaci,

$$W_{M-1}(z) = (z + 1) W_{M-2}(z) \quad (4.54)$$

i

$$W_M(z) = (z + 1)^2 W_{M-2}(z). \quad (4.55)$$

Kontynuując powyższe przekształcenia, otrzymuje się

$$W_M(z) = (z + 1)^p W_{M-p}(z), \quad (4.56)$$

co kończy dowód.

Czynnik $\left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2}\right)^p$ w równaniu (4.51) jest związany ze znikającymi momentami falki, a wykładnik p jest nazywany *rzędem aproksymacji* (ang. *approximation order*). Czynniki $R(e^{-i\omega})$ musi być tak dobrany, aby spełniony był warunek filtru kwadraturowego odmienionego (4.50). I. Daubechies pokazała, że wielomian $R(e^{-i\omega})$ musi być stopnia $p-1$ lub wyższego [5]. Ze wzoru (4.51) wynika, że w przypadku, gdy $R(e^{-i\omega})$ jest stopnia $p-1$, transmitancja filtru jest wielomianem stopnia $2p-1$ względem $e^{-i\omega}$. Filtr ma skończoną odpowiedź impulsową o najmniejszej

możliwej liczbie $2p$ współczynników, które w przypadku filtru przyczy nowego mają numery od 0 do $2p - 1$. O filtrach takich mówi się, że mają zwarty nośnik równy zbiorowi liczb całkowitych z przedziału $[0, 2p - 1]$.

Funkcja skalująca $\phi(t)$ i falka $\psi(t)$ stowarzyszone z filtrem ortogonalnym o skończonej odpowiedzi impulsowej mają zwarte nośniki. Z równania dylatacyjnego wynika, że jeśli nośnikiem filtru h jest zbiór liczb całkowitych z przedziału $[0, 2p - 1]$, to nośnikiem funkcji skalującej $\phi(t)$ jest przedział $[0, 2p - 1]$. Na podstawie równania falkowego można udowodnić, że falka $\psi(t)$ ma nośnik równy przedziałowi $[-p + 1, p]$.

W celu wyprowadzenia równania, z którego rozwiązania można otrzymać wielomian $R(e^{-i\omega})$, zapiszemy, czemu równa się składnik $|H(e^{i\omega})|^2$ w równaniu (4.50)

$$|H(e^{i\omega})|^2 = 2 \left| \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^p \right|^2 |R(e^{-i\omega})|^2 \quad (4.57)$$

$$= 2 \left[\left| \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^2 \right|^p \right] |R(e^{-i\omega})|^2 \quad (4.58)$$

$$= 2 \left[\left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right) \left(\frac{1 + e^{i\omega}}{2} \right) \right]^p |R(e^{-i\omega})|^2 \quad (4.59)$$

$$= 2 \left(\frac{1 + \cos \omega}{2} \right)^p |R(e^{-i\omega})|^2 \quad (4.60)$$

$$= 2 \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^{2p} |R(e^{-i\omega})|^2. \quad (4.61)$$

Kwadrat modułu transmitancji filtru o współczynnikach rzeczywistych jest funkcją parzystą, więc $|R(e^{-i\omega})|^2$ można przedstawić w postaci wielomianu względem kosinusa. Wygodnie jest wprowadzić dodatkową zmienną $y = \sin^2 \frac{\omega}{2}$, która dla $\omega \in [0, \pi]$ należy do przedziału $[0, 1]$, i uwzględniając zależności $\sin^2 \frac{\omega}{2} = (1 - \cos \omega)/2$, $\cos^2 \frac{\omega}{2} = (1 + \cos \omega)/2$, zapisać $|H(e^{i\omega})|^2$ w postaci

$$|H(e^{i\omega})|^2 = 2 \left(\cos^2 \frac{\omega}{2} \right)^p P \left(\sin^2 \frac{\omega}{2} \right). \quad (4.62)$$

Wówczas na podstawie równania (4.50) otrzymuje się równanie, jakie

musi spełniać funkcja $P(y)$

$$(1 - y)^p P(y) + y^p P(1 - y) = 2. \quad (4.63)$$

I. Daubechies pokazała [4] [5], że wielomian najniższego stopnia spełniający powyższe równanie ma postać

$$P(y) = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1+k}{k} y^k. \quad (4.64)$$

Jest to wielomian stopnia $p - 1$ względem y , a uwzględniając zależność $\sin^2 \frac{\omega}{2} = \frac{1}{4}(-e^{i\omega} + 2 - e^{-i\omega})$, łatwo sprawdzić, że jest wielomianem stopnia $2p - 2$ względem $e^{i\omega}$.

Przyjmując powyższe rozwiązanie, kwadrat modułu transmitancji filtra h wyraża wzór

$$|H(e^{i\omega})|^2 = 2 \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^{2p} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1+k}{k} \left(\sin \frac{\omega}{2} \right)^{2k}. \quad (4.65)$$

Transmitancję filtra $H(e^{i\omega})$ otrzymuje się poprzez faktoryzację spektralną prawej strony wzoru (4.65).

Przykład

Niech liczba znikających momentów falki będzie równa 2. Wówczas $P(y) = 1 + 2y$, $P(\sin^2 \frac{\omega}{2}) = 1 + 2 \sin^2 \frac{\omega}{2}$ i uwzględniając zależności $\sin^2 \frac{\omega}{2} = \frac{1 - \cos \omega}{2} = \frac{2 - e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{4}$, otrzymujemy

$$P(e^{i\omega}) = \frac{-e^{-i\omega} + 4 - e^{i\omega}}{2}. \quad (4.66)$$

Wprowadzając pomocniczą zmienną $z = e^{i\omega}$, otrzymujemy równanie względem z

$$P(z) = \frac{1}{2} (-z^{-1} + 4 - z) = -\frac{z^{-1}}{2} (1 - 4z + z^2), \quad (4.67)$$

które ma dwa pierwiastki, $z_1 = 2 - \sqrt{3}$ i $z_2 = 2 + \sqrt{3} = z_1^{-1}$, tj.

$$P(z) = -\frac{z^{-1}}{2} (z - z_1)(z - z_2) \quad (4.68)$$

$$= \frac{1}{2z_1} (1 - z_1 z^{-1}) (1 - z_1 z) \quad (4.69)$$

$$= \frac{1}{2z_2} (1 - z_2 z^{-1}) (1 - z_2 z). \quad (4.70)$$

Pierwiastek $z_1 = 2 - \sqrt{3} \approx 0,2679$ jest mniejszy od 1. Wybierając rozkład wielomianu $P(z)$ z pierwiastkiem z_1 , leżącym wewnątrz okręgu jednostkowego na płaszczyźnie Z , otrzymujemy tzw. *filtr minimalnofazowy*, który wprowadza mniejsze przesunięcia fazowe niż filtr odpowiadający pierwiastkowi z_2 , leżącemu na zewnątrz okręgu jednostkowego. Charakterystyki amplitudowe obydwu filtrów są takie same, natomiast charakterystyki fazowe różnią się. Łatwo sprawdzić, że $2z_1 = 2(2 - \sqrt{3}) = (1 - \sqrt{3})^2$, zatem

$$P(e^{i\omega}) = |R(e^{-i\omega})|^2 = \left(\frac{1}{1 - \sqrt{3}}\right)^2 [1 - (2 - \sqrt{3}) e^{-i\omega}] [1 - (2 - \sqrt{3}) e^{i\omega}]. \quad (4.71)$$

Dla wielomianów o współczynnikach rzeczywistych $R^*(e^{-i\omega}) = R(e^{i\omega})$ i $|R(e^{-i\omega})|^2 = R(e^{-i\omega}) R^*(e^{i\omega}) = R(e^{-i\omega}) R(e^{i\omega})$, więc można przyjąć, że

$$R(e^{-i\omega}) = \frac{1}{1 - \sqrt{3}} [1 - (2 - \sqrt{3}) e^{-i\omega}] \quad (4.72)$$

i zgodnie z (4.51)

$$\begin{aligned} H(e^{i\omega}) &= \sqrt{2} \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2}\right)^2 \frac{1}{1 - \sqrt{3}} [1 - (2 - \sqrt{3}) e^{-i\omega}] \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} + \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} e^{-i\omega} + \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} e^{-i2\omega} + \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} e^{-i3\omega}, \end{aligned}$$

zatem

$$h[0] = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = 0,48296291 \quad (4.73)$$

$$h[1] = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = 0,83651630 \quad (4.74)$$

$$h[2] = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = 0,22414387 \quad (4.75)$$

$$h[3] = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = -0,12940952. \quad (4.76)$$

Obliczony wyżej filtr nazywany jest filtrem Daubechies stopnia 2 i oznaczany symbolem D_2 (indeks 2 oznacza liczbę zer transmitancji filtru dla częstotliwości $\omega = \pi$) [31]³. Filtr jest filtrem ortogonalnym, gdyż spełnia kryterium $\sum_{n=0}^3 (h[n])^2 = 1$, $\sum_{n=0}^3 h[n] h[n-2] = 0$, $\sum_{n=0}^3 h[n] h[n+2] = 0$. Energia filtru koncentruje się w dwóch początkowych współczynnikach.

Funkcje skalujące i falki stowarzyszone z filtrami ortogonalnymi o zwartych nośnikach nie mają wzorów analitycznych pozwalających obliczać ich wartości. I. Daubechies podała algorytm nazwany kaskadowym [5] obliczania z dowolną dokładnością przybliżonej wartości funkcji skalującej $\phi(t)$ na podstawie filtru dolnoprzepustowego h . Implementacja tego algorytmu w języku MATLAB dla wyprowadzonego wyżej filtru przedstawiona jest poniżej.

```
function [t, phi] = phi_D4(J)
% agorytm kaskadowy obliczania funkcji skalujacej
% funkcja skalujaca ortogonalna Daubechies 2 znikajace momenty
% J - liczba iteracji algorytmu kaskadowego
h(1) = 0.48296291;
```

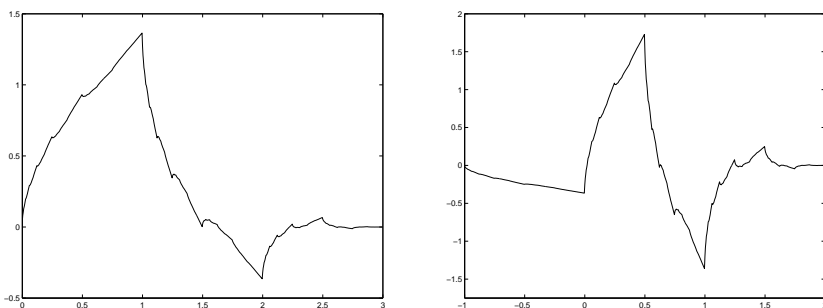
³W monografii [27] filtr ten jest oznaczony jako D_4 , gdzie indeks 4 oznacza liczbę współczynników filtru.

```
h(2) = 0.83651630;
h(3) = 0.22414387;
h(4) = -0.12940952;
L = 4;           % szerokosc nosnika funkcji skalujacej
N = (L-1)*(2^J); % dlugosc buforow

phi = zeros(1,N);
phi(1) = 1;
bufor = zeros(1,N);
Nj=L-1;
for j = 1 : 1 : J
    for n = 0 : 1 : Nj-1
        s0 = 0;
        s1 = 0;
        for k = max(0, n-1) : 1 : n
            s0 = s0 + h(2*(n-k)+1)*phi(k+1);
            s1 = s1 + h(2*(n-k)+2)*phi(k+1);
        end
        bufor(2*n+1) = s0;
        bufor(2*n+2) = s1;
    end
    phi = bufor;
    Nj = 2*Nj;
end
phi = sqrt(2^J)*phi;
h=2^(-J);
t=0:h:(L-1)-h;
```

Funkcja skalująca odpowiadająca filtrowi Daubechies stopnia 2 (z powyższego przykładu), obliczona za pomocą algorytmu kaskadowego, jest

pokazana na lewym rysunku 4.1. Jej nośnikiem jest przedział $[0, 3]$.



Rysunek 4.1: Funkcja skalująca Daubechies 4 (z lewej) i falka Daubechies 4 (z prawej)

Falka obliczona za pomocą równania falkowego o postaci

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-2}^1 (-1)^n h[1-n] \phi(2t-n) \quad (4.77)$$

jest pokazana na prawym rysunku 4.1⁴. Jej nośnikiem jest przedział $[-1, 2]$.

W monografiach [5] [12] podano współczynniki filtrów ortogonalnych Daubechies stowarzyszonych z falkami o zwartym nośniku i liczbie znikających momentów od 2 do 10.

4.3 Falki biortogonalne o zwartym nośniku

Filtr cyfrowy w dziedzinie częstotliwości opisują dwie charakterystyki: charakterystyka amplitudowa i charakterystyka fazowa. W zastosowaniach, takich jak kompresja sygnałów i obrazów, dektekcja zbczy sy-

⁴Falka obliczona według wzoru $\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-2}^1 (-1)^{1-n} h[1-n] \phi(2t-n)$ ma przeciwny znak.

gnałów i krawędzi obrazów i innych, ważne jest zachowanie fazy przetwarzanych sygnałów. Filtry symetryczne, tj. takie, których współczynniki spełniają warunek $h[n] = h[2L - n]$, $L \in \mathbb{Z}$, wprowadzają liniowe przesunięcie fazowe $\arg H(e^{i\omega}) = -L\omega$, a w przypadku gdy filtr jest symetryczny w zerze ($L = 0$), nie przesuują fazy. Właściwości tej nie posiadają filtry ortogonalne o zwartym nośniku z wyjątkiem filtru Haara, który jest antysymetryczny względem środka przedziału $[0, 1]$, tj. punktu $1/2$. Charakterystyka fazowa filtru Haara może być opisana następująco

$$\arg H(e^{i\omega}) = \begin{cases} -\omega/2 & \text{jeśli } 0 \leq \omega < \pi, \\ -\omega/2 + \pi & \text{jeśli } \pi < \omega \leq 2\pi. \end{cases}$$

Faza ma nieciągłość w punkcie $\omega = \pi$, w którym charakterystyka amplitudowa zeruje się. Filtry o odcinkami liniowej charakterystyce fazowej z nieciągłością w punktach, gdzie charakterystyka amplitudowa zeruje się, zaliczane są do filtrów o liniowej charakterystyce fazowej. Liniowe przesunięcie fazowe filtru, tj. czynnik $e^{-iL\omega}$ wprowadzany przez filtr do transformaty Fouriera sygnału $f[n]$, jest równoważne w dziedzinie czasu przesunięciu sygnału o L -próbek, czyli odpowiada sygnałowi $f[n - L]$.

Nie jest możliwe skonstruowanie filtrów symetrycznych o zwartych odpowiedziach impulsowych ortogonalnych, tj. spełniających równoważne warunki w dziedzinie czasu i w dziedzinie częstotliwości

$$\sum_n h[n] h[n - 2k] = \delta[k], \quad (4.78)$$

$$H^*(e^{i\omega})H(e^{i\omega}) + H^*(e^{i(\omega+\pi)})H(e^{i(\omega+\pi)}) = 2, \quad (4.79)$$

ale jest możliwe skonstruowanie par filtrów symetrycznych o zwartych odpowiedziach impulsowych wzajemnie ortogonalnych, tj. spełniających równoważne warunki

$$\sum_n h[n] \tilde{h}[n - 2k] = \delta[k], \quad (4.80)$$

$$H^*(e^{i\omega}) \tilde{H}(e^{i\omega}) + H^*(e^{i(\omega+\pi)}) \tilde{H}(e^{i(\omega+\pi)}) = 2. \quad (4.81)$$

Jak pokazano w poprzednim punkcie, filtr ortogonalny Daubechies h otrzymuje się w wyniku faktoryzacji spektralnej równania

$$H^*(e^{i\omega}) H(e^{i\omega}) = 2 \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^{2p} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1+k}{k} \left(\sin \frac{\omega}{2} \right)^{2k}. \quad (4.82)$$

Parę filtrów biortogonalnych h i \tilde{h} otrzymuje się w wyniku faktoryzacji spektralnej równania

$$H^*(e^{i\omega}) \tilde{H}(e^{i\omega}) = 2 \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^{p+\tilde{p}} \sum_{k=0}^{q-1} \binom{q-1+k}{k} \left(\sin \frac{\omega}{2} \right)^{2k}, \quad (4.83)$$

gdzie $q = (p + \tilde{p})/2$. Przyjęto oznaczenia: p - liczba zer transmitancji filtru h w punkcie $\omega = \pi$, \tilde{p} - liczba zer transmitancji filtru \tilde{h} w punkcie $\omega = \pi$. Obydwie te liczby muszą być parzyste albo obydwie nieparzyste. Filtry górnoprzepustowe, tj. g i \tilde{g} , obliczane są ze wzorów wynikających z warunków doskonałej rekonstrukcji sygnału w układzie filtrów biortogonalnych (rozdział 2)

$$G(e^{i\omega}) = e^{-i\omega} \tilde{H}^*(e^{i(\omega+\pi)}), \quad (4.84)$$

$$\tilde{G}(e^{i\omega}) = e^{-i\omega} H^*(e^{i(\omega+\pi)}), \quad (4.85)$$

które w dziedzinie czasu wyrażają się następującymi zależnościami

$$g[n] = (-1)^{1-n} \tilde{h}[1-n], \quad (4.86)$$

$$\tilde{g}[n] = (-1)^{1-n} h[1-n]. \quad (4.87)$$

Falki stowarzyszone z tymi filtrami obliczane są ze wzorów

$$\psi(t) = \sum_n g[n] \phi(2t-n) = \sum_n (-1)^{1-n} \tilde{h}[1-n] \phi(2t-n), \quad (4.88)$$

$$\tilde{\psi}(t) = \sum_n \tilde{g}[n] \tilde{\phi}(2t - n) = \sum_n (-1)^{1-n} h[1 - n] \tilde{\phi}(2t - n). \quad (4.89)$$

Z powyższych wzorów wynika, że liczba znikających momentów falki $\psi(t)$ jest równa liczbie zer w punkcie $\omega = \pi$ transmitancji filtru \tilde{h} , czyli \tilde{p} . Analogicznie liczba znikających momentów falki $\tilde{\psi}(t)$ jest równa liczbie zer w punkcie $\omega = \pi$ transmitancji filtru h , czyli p .

W następnym punkcie opisano filtry biortogonalne o zwartych nośnikach, takie że, transmitancja jednego filtru obliczana jest na podstawie wyrażenia

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^{\tilde{p}}, \quad (4.90)$$

które jest wielomianem stopnia \tilde{p} względem $e^{i\omega}$ i ma $\tilde{p} + 1$ współczynników, a transmitancja drugiego filtru jest obliczana na podstawie wyrażenia

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^p \sum_{k=0}^{(p+\tilde{p})/2-1} \binom{(p+\tilde{p})/2-1+k}{k} \left(\sin \frac{\omega}{2} \right)^{2k}, \quad (4.91)$$

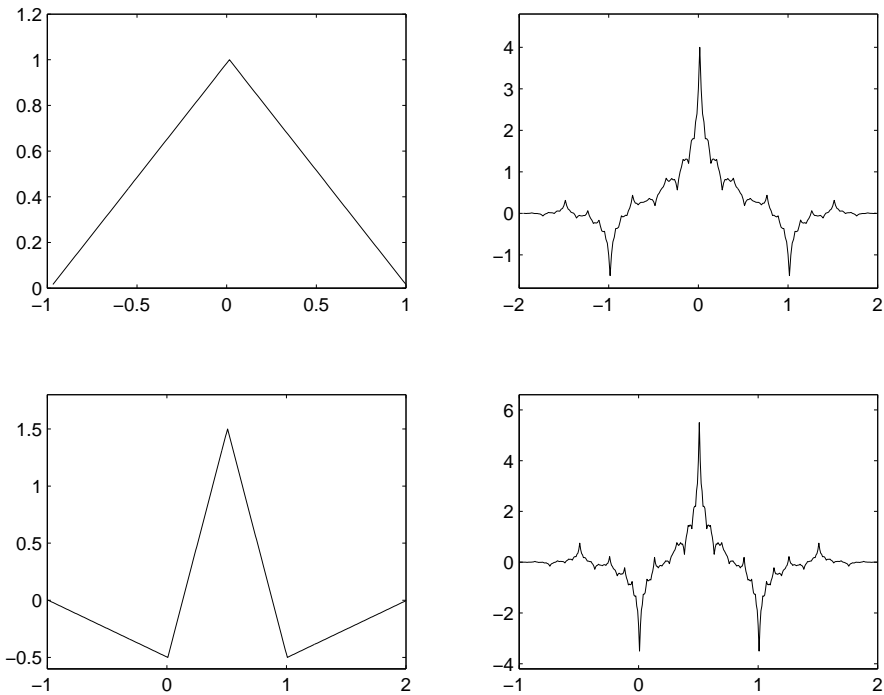
które jest wielomianem stopnia $2p + \tilde{p} - 2$ i ma $2p + \tilde{p} - 1$ współczynników. Suma liczby współczynników obydwu filtrów jest równa $2(p + \tilde{p})$, a różnica $2(p - 1)$.

4.3.1 Filtry LeGalla i pochodne

W punkcie tym pokażemy sposób konstrukcji par filtrów biortogonalnych, w których jeden z filtrów, oznaczony dalej jako \tilde{h} , ma trzy współczynniki i jest najkrótszym filtrem symetrycznym w zerze. Stowarzyszona z nim funkcja skalująca $\tilde{\phi}(t)$ jest bazową funkcją sklejaną pierwszego rzędu, symetryczną w zerze, pokazaną na rysunku 4.2 w górnej lewej części.

Funkcja ta jest przesuniętą wersją splotu dwóch funkcji bramkowych

$$\alpha^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } 0 \leq t < 1, \\ 0 & \text{dla pozostałych } t. \end{cases}$$



Rysunek 4.2: Funkcje skalujące i falki stowarzyszone z filtrami 5/3: lewy górny rysunek - funkcja skalująca odpowiadająca filtrowi dolnoprzepustowemu o 3 współczynnikach odpowiedzi impulsowej, którego transmitancja ma 2 zera w punkcie $\omega = \pi$; prawy górny rysunek - funkcja skalująca odpowiadająca filtrowi o 5 współczynnikach odpowiedzi impulsowej, którego transmitancja ma 2 zera w punkcie $\omega = \pi$; lewy dolny rysunek - falka odpowiadająca funkcji skalującej z lewego górnego rysunku, posiadająca 2 znikające momenty; prawy dolny rysunek - falka odpowiadająca funkcji skalującej z górnego prawego rysunku, posiadająca 2 znikające momenty

Transformatą Fouriera funkcji brankowej jest

$$\int_0^1 1 e^{-i\omega t} dt = \frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega} = e^{-i\omega/2} \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}. \quad (4.92)$$

Transformatą splotu dwóch funkcji brankowych jest

$$e^{-i\omega} \left[\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right]^2, \quad (4.93)$$

zaś transformatą przesuniętego w lewo o 1 splotu dwóch funkcji brankowych jest

$$\left[\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right]^2. \quad (4.94)$$

Z powyższego wynika, że transformatą Fouriera wybranej funkcji skalującej $\tilde{\phi}(t)$ jest

$$\tilde{\Phi}(\omega) = \left[\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right]^2. \quad (4.95)$$

Filtr \tilde{h} stowarzyszony z funkcją skalującą $\tilde{\phi}(t)$ można obliczyć z równania dylatacyjnego

$$\tilde{H}(e^{i\omega}) = \sqrt{2} \frac{\tilde{\Phi}(2\omega)}{\tilde{\Phi}(\omega)} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^2. \quad (4.96)$$

Porównując powyższe wyrażenie z równaniem (4.83), widać, że transmitancja filtra \tilde{h} ma dwa zera w punkcie $\omega = \pi$, czyli że $\tilde{p} = 2$. Zastępując $\cos^2 \frac{\omega}{2}$ wyrażeniem $\frac{1}{4}(e^{i\omega} + 2 + e^{-i\omega})$ i porządkując wyrazy, otrzymujemy

$$\tilde{H}(e^{i\omega}) = \frac{\sqrt{2}}{4} (e^{i\omega} + 2 + e^{-i\omega}), \quad (4.97)$$

skąd

$$\tilde{h}[-1] = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad \tilde{h}[0] = \frac{2\sqrt{2}}{4}, \quad \tilde{h}[1] = \frac{\sqrt{2}}{4}. \quad (4.98)$$

Transmitancję filtra h ortogonalnego do filtra \tilde{h} można otrzymać, dzieląc prawą stronę równania (4.83) przez (4.96)

$$H^*(e^{i\omega}) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^p \sum_{k=0}^{p/2} \binom{p/2+k}{k} \left(\sin \frac{\omega}{2} \right)^{2k}. \quad (4.99)$$

Prawa strona powyższego równania jest rzeczywista i symetryczna, więc $H(e^{i\omega}) = H^*(e^{i\omega})$ i

$$H(e^{i\omega}) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^p \sum_{k=0}^{p/2} \binom{p/2+k}{k} \left(\sin \frac{\omega}{2} \right)^{2k}. \quad (4.100)$$

Najmniejszą możliwą liczbą zer transmitancji filtru h w punkcie $\omega = \pi$, oznaczoną w równaniu (4.100) jako p , jest 2. W tym przypadku

$$H(e^{i\omega}) = \sqrt{2} \cos^2 \frac{\omega}{2} \left(1 + 2 \sin^2 \frac{\omega}{2} \right) \quad (4.101)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8} (-e^{i2\omega} + 2e^{i\omega} + 6 + 2e^{-i\omega} - e^{-i2\omega}), \quad (4.102)$$

czyli

$$h[-2] = -\frac{\sqrt{2}}{8}, \quad h[-1] = \frac{2\sqrt{2}}{8}, \quad h[0] = \frac{6\sqrt{2}}{8}, \quad h[1] = \frac{2\sqrt{2}}{8}, \quad h[2] = -\frac{\sqrt{2}}{8}. \quad (4.103)$$

Otrzymaliśmy parę filtrów biortogonalnych 5/3, nazywanych filtrami Le-Galla [30], o których była mowa w rozdziale 3.

Falkę $\tilde{\psi}(t)$ stowarzyszoną z funkcją skalującą $\tilde{\phi}(t)$ oblicza się (zgodnie z (4.89)) ze wzoru

$$\tilde{\psi}(t) = \sum_{n=-2}^2 (-1)^{1-n} h[1-n] \tilde{\phi}(2t-n). \quad (4.104)$$

Funkcję skalującą $\phi(t)$ odpowiadającą filtrowi h można obliczyć za pomocą algorytmu kaskadowego. Falkę $\psi(t)$ stowarzyszoną z funkcją skalującą $\phi(t)$ oblicza się (zgodnie z (4.88)) ze wzoru

$$\psi(t) = \sum_{n=-1}^1 (-1)^{1-n} \tilde{h}[1-n] \phi(2t-n). \quad (4.105)$$

Transmitancje obydwu filtrów mają po dwa zera w punkcie $\omega = \pi$, czyli mają rząd aproksymacji równy 2 i falki mają po dwa znikające momenty.

Gładkość według Höldera funkcji skalującej $\tilde{\phi}(t)$ stowarzyszonej z filtrem \tilde{h} o 3 współczynnikach równa jest 1; gładkość funkcji skalującej $\phi(t)$ stowarzyszonej z filtrem h o 5 współczynnikach równa jest 0 [30]. Funkcje skalujące i falki stowarzyszone z filtrami 5/3 pokazane są na rysunku 4.2.

Kolejną parę filtrów można otrzymać, przyjmując $p = 4$. W tym przypadku równanie (4.100) posiada postać

$$H(e^{i\omega}) = \sqrt{2} \cos^4 \frac{\omega}{2} \left(1 + 3 \sin^2 \frac{\omega}{2} + 6 \sin^4 \frac{\omega}{2} \right) \quad (4.106)$$

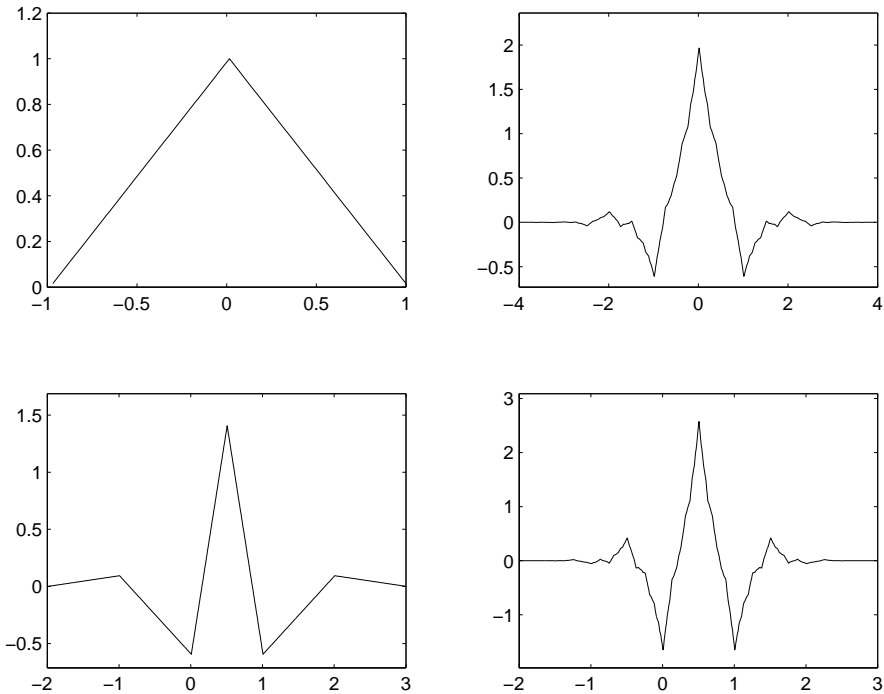
$$= \frac{\sqrt{2}}{128} (3e^{i4\omega} - 6e^{i3\omega} - 16e^{i2\omega} + 38e^{i\omega}) \quad (4.107)$$

$$+ \frac{90\sqrt{2}}{128} \quad (4.108)$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{128} (38e^{-i\omega} - 16e^{-i2\omega} - 6e^{-i3\omega} + 3e^{-i4\omega}). \quad (4.109)$$

W wyniku otrzymuje się parę filtrów 9/3. Filtr h ma 4 zera w punkcie $\omega = \pi$; stowarzyszona z z nim falka $\tilde{\psi}(t)$ ma 4 znikające momenty. Filtr \tilde{h} ma 2 zera w punkcie $\omega = \pi$; stowarzyszona z z nim falka $\psi(t)$ ma 2 znikające momenty. Gładkość według Höldera funkcji skalującej $\tilde{\phi}(t)$ stowarzyszonej z filtrem \tilde{h} o 3 współczynnikach równa jest 1; gładkość funkcji skalującej $\phi(t)$ stowarzyszonej z filtrem h o 9 współczynnikach równa jest 0,83. Funkcje skalujące i falki stowarzyszone z filtrami 9/3 pokazane są na rysunku 4.3.

Następną dopuszczalną wartością p jest 6. W wyniku powstaje para filtrów 13/3. Wadą tego sposobu konstrukcji filtrów biortogonalnych jest zwiększająca się znacznie różnica pomiędzy długościami filtrów. W następnym punkcie opisano sposób konstrukcji filtrów minimalnie różniących się długością.



Rysunek 4.3: Funkcje skalujące i falki stowarzyszone z filtrami 9/3: lewy górny rysunek - funkcja skalująca odpowiadająca filtrowi dolnoprzepustowemu o 3 współczynnikach odpowiedzi impulsowej, którego transmitancja ma 2 zera w punkcie $\omega = \pi$; prawy górny rysunek - funkcja skalująca odpowiadająca filtrowi o 9 współczynnikach odpowiedzi impulsowej, którego transmitancja ma 4 zera w punkcie $\omega = \pi$; lewy dolny rysunek - falka odpowiadająca funkcji skalującej z lewego górnego rysunku, posiadająca 4 znikające momenty; prawy dolny rysunek - falka odpowiadająca funkcji skalującej z górnego prawego rysunku, posiadająca 2 znikające momenty

4.3.2 Filtry biortogonalne minimalnie różniące się długością

W filtrach opisanych w poprzednim punkcie transmitancja jednego filtru była obliczana z wyrażenia

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^{\bar{p}}, \quad (4.110)$$

a transmitancja drugiego filtra z wyrażenia

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^p \sum_{k=0}^{(p+\tilde{p})/2-1} \binom{\frac{p+\tilde{p}}{2} - 1 + k}{k} \left(\sin \frac{\omega}{2} \right)^{2k}. \quad (4.111)$$

Wielomian

$$\sum_{k=0}^{(p+\tilde{p})/2-1} \binom{\frac{p+\tilde{p}}{2} - 1 + k}{k} \left(\sin \frac{\omega}{2} \right)^{2k} \quad (4.112)$$

w całości wchodził do transmitancji jednego filtra, co dla większych wartości parametru p wprowadzało znaczne różnice w długościach filtrów, gdyż różnica była równa $2(p-1)$. W celu zmniejszenia różnicy w długościach filtrów należy wielomian

$$\sum_{k=0}^{(p+\tilde{p})/2-1} \binom{\frac{p+\tilde{p}}{2} - 1 + k}{k} y^k, \quad (4.113)$$

gdzie $y = \sin^2 \frac{\omega}{2}$, „rozszczyć” na dwa wielomiany o zbliżonych stopniach. Jeden z tych wielomianów należy przyjąć jako czynnik w transmitancji jednego filtra, drugi zaś jako czynnik w transmitancji drugiego filtra. Sposób postępowania będzie pokazany na przykładzie konstrukcji filtrów biortogonalnych 9/7.

Niech $p = 4$ i $\tilde{p} = 4$. Wówczas wielomian podlegający rozszczepieniu ma postać

$$\sum_{k=0}^3 \binom{3+k}{k} y^k = 20y^3 + 10y^2 + 4y + 1. \quad (4.114)$$

Wielomian ten ma dwa pierwiastki zespolone sprzężone i jeden rzeczywisty

$$20y^3 + 10y^2 + 4y + 1 = (y - a - ib)(y - a + ib)(y - c), \quad (4.115)$$

gdzie

$$a = 0,07881; \quad b = 0,37393; \quad c = 0,34238.$$

Do konstrukcji filtru h można wykorzystać czynniki z pierwiastkami zespolonymi

$$(y - a - ib)(y - a + ib) = y^2 - 2ay + a^2 + b^2, \quad (4.116)$$

a do konstrukcji filtru \tilde{h} czynnik z pierwiastkiem rzeczywistym $(y - c)$. W konsekwencji transmitancję filtru h tworzy się z wielomianu

$$\sqrt{2} (1 - y)^2 (y^2 - 2ay + a^2 + b^2), \quad (4.117)$$

a transmitancję filtru \tilde{h} z wielomianu

$$\sqrt{2} (1 - y)^2 (y - c). \quad (4.118)$$

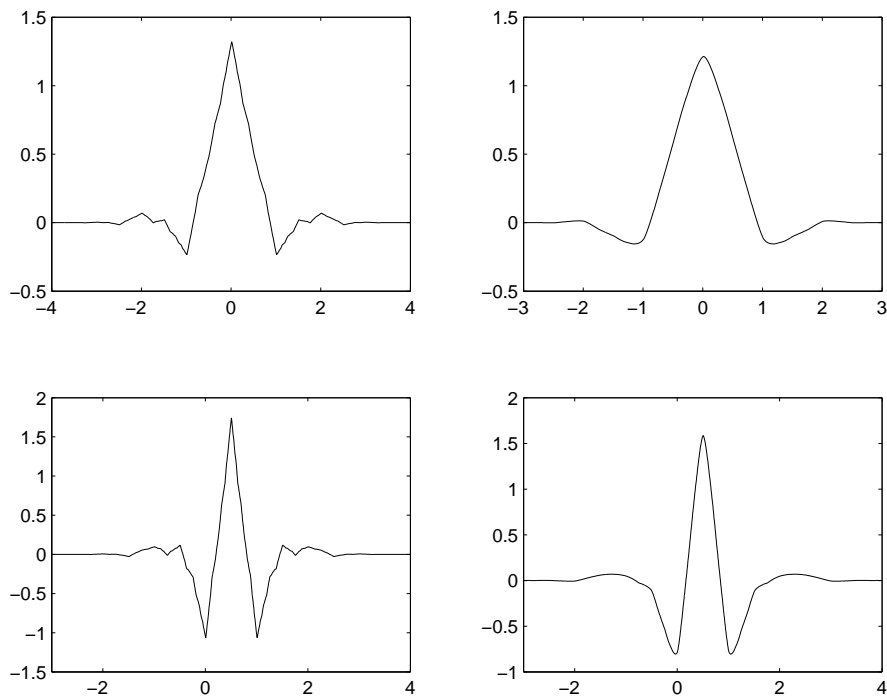
Uwzględniając zależności $y = \sin^2 \frac{\omega}{2} = \frac{1}{4}(-e^{i\omega} + 2 - e^{-i\omega})$, otrzymuje się współczynniki filtrów biortogonalnych 9/7, symetrycznych w zerze, pokazane w tabelicy 4.1.

Tablica 4.1: Współczynniki filtrów 9/7

$ n $	$h[n]$	$\tilde{h}[n]$
0	0,852698697	0,788485616
1	0,377402888	0,418092273
2	-0,110624404	-0,040689418
3	-0,023849465	-0,064538882
4	0,037828455	

Obydwa filtry 9/7 mają taki sam rząd aproksymacji, równy 4. Gładkość według Höldera funkcji skalującej $\tilde{\phi}(t)$ stowarzyszonej z filtrem \tilde{h} o 7 współczynnikach równa jest 1,70; gładkość funkcji skalującej $\phi(t)$ stowarzyszonej z filtrem h o 9 współczynnikach równa jest 1,07 [30]. Charakterystyczną cechą tych filtrów jest to, że są filtry o prawie ortogonalnej

odpowiedzi impulsowej, gdyż kresy rozpięcia związanego z funkcją skalującą stowarzyszoną z filtrem o 9 współczynnikach równe są $A = 0,926$ i $B = 1,065$, a kresy rozpięcia związanego z funkcją skalującą stowarzyszoną z filtrem o 7 współczynnikach równe są $A = 0,943$ i $B = 1,084$



Rysunek 4.4: Funkcje skalujące i falki stowarzyszone z filtrami 9/7: lewy górny rysunek - funkcja skalująca odpowiadająca filtrowi o 9 współczynnikach odpowiedzi impulsowej, którego transmitancja ma 4 zera w punkcie $\omega = \pi$; prawy górny rysunek - funkcja skalująca odpowiadająca filtrowi o 7 współczynnikach odpowiedzi impulsowej, którego transmitancja ma 4 zera w punkcie $\omega = \pi$; lewy dolny rysunek - falka odpowiadająca funkcji skalującej z lewego górnego rysunku, posiadająca 4 znikające momenty; prawy dolny rysunek - falka odpowiadająca funkcji skalującej z prawego górnego rysunku, posiadająca 4 znikające momenty

[30]. Funkcje skalujące i falki stowarzyszone z filtrami 9/7 pokazane są na rysunku 4.4.

4.3.3 Zagadnienie wyboru filtrów dekompozycji i rekonstrukcji

Z falkami biortogonalnymi związane są dwie równoważne nieskończenie-wymiarowe reprezentacje sygnału

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_n \langle f(\tau), \psi_{j,n}(\tau) \rangle \tilde{\psi}_{j,n}(t) \quad (4.119)$$

albo

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_n \langle f(\tau), \tilde{\psi}_{j,n}(\tau) \rangle \psi_{j,n}(t). \quad (4.120)$$

W praktyce wykorzystuje się reprezentacje falkowe skończeniowymiarowe. Dają one różniące się między sobą aproksymacje sygnału $f(t)$

$$\tilde{f}_0(t) = \sum_n a_0[n] \tilde{\phi}(t-n) = \sum_n a_J[n] \tilde{\phi}_{J,n}(t) + \sum_{j=1}^J \sum_n d_j[n] \tilde{\psi}_{j,n}(t), \quad (4.121)$$

gdzie

$$a_J[n] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \phi_{J,n}(\tau) d\tau, \quad d_j[n] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \psi_{j,n}(\tau) d\tau \quad (4.122)$$

albo

$$f_0(t) = \sum_n \tilde{a}_0[n] \phi(t-n) = \sum_n \tilde{a}_J[n] \phi_{J,n}(t) + \sum_{j=1}^J \sum_n \tilde{d}_j[n] \psi_{j,n}(t), \quad (4.123)$$

gdzie

$$\tilde{a}_J[n] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \tilde{\phi}_{J,n}(\tau) d\tau, \quad \tilde{d}_j[n] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \tilde{\psi}_{j,n}(\tau) d\tau. \quad (4.124)$$

Współczynniki występujące w rozwinięciu (4.121)

$$\{a_J[n]\}, \{d_J[n]\}, \{d_{J-1}[n]\}, \dots, \{d_1[n]\} \quad (4.125)$$

i współczynniki występujące w rozwinięciu (4.123)

$$\{\tilde{a}_J[n]\}, \{\tilde{d}_J[n]\}, \{\tilde{d}_{J-1}[n]\}, \dots, \{\tilde{d}_1[n]\} \quad (4.126)$$

są obliczane za pomocą szybkich biortogonalnych przekształceń falkowych z wykorzystaniem splotów liczbowych, ale zachowują wartości określone wzorami (4.122) i (4.124). Uwzględniając te wzory i własności funkcji skalujących i falek stowarzyszonych z wybranymi do konkretnej reprezentacji falkowej filtrami, można dokonać wyboru filtrów dekompozycji i rekonstrukcji, kierując się określonymi kryteriami. Sposoby wyboru będą pokazane na konkretnych przykładach filtrów biortogonalnych.

Przykład 1

Niech filtrami wybranymi do reprezentacji falkowej będą filtry 5/3. Funkcje skalujące i falki stowarzyszone z tymi filtrami pokazane są na rysunku 4.2. Jeżeli reprezentacja falkowa ma służyć kompresji sygnału, to wskazane jest obliczanie współczynników falkowych za pomocą falki, która ma więcej znikających momentów, gdyż taka falka wprowadza mniej współczynników znaczących, tzn. większych co do modułu od pewnego przyjętego progu, począwszy od którego współczynniki falkowe są kodowane. W przypadku filtrów 5/3 obydwie stowarzyszone z nimi falki mają tyle samo (dwa) znikających momentów. Tak więc kryterium w postaci liczby znikających momentów falek nie dostarcza w tym przypadku przesłanek co do wyboru falki dekompozycji i falki rekonstrukcji. Analizując kształt obydwu falek, łatwo zauważyć, że falka stowarzyszona z funkcją skalującą, odpowiadającą filtrowi o 3 współczynnikach odpowiedzi impulsowej, jest gładzsza (wykładnik Höldera równy 1) od falki odpowiadającej filtrowi o 5 współczynnikach odpowiedzi impulsowej (wykładnik

Höldera równy 0). Jeżeli chcemy otrzymać gładszy sygnał, to do rekonstrukcji powinniśmy użyć gładszej falki, gdyż sygnał rekonstruowany jest kombinacją liniową (sumą ważoną) falek, a współczynniki falkowe są iloczynami skalarnymi sygnału i falki. Falka występująca w tych iloczynach jest uśredniana poprzez całkowanie i tym samym wpływ oscylacji falki na reprezentację falkową sygnału jest mniejszy, jeśli mniej gładka falka występuje jako falka dekompozycji niż jako falka rekonstrukcji. Dlatego w tym przypadku wybór filtrów powinien być następujący: filtrem dolnoprzepustowym dekompozycji powinien być filtr o 5 współczynnikach odpowiedzi impulsowej, a filtrem dolnoprzepustowym rekonstrukcji powinien być filtr o 3 współczynnikach odpowiedzi impulsowej.

Przykład 2

Niech filtrami wybranymi do reprezentacji falkowej będą filtry 9/3. Funkcje skalujące i falki stowarzyszone z tymi filtrami pokazane są na rysunku 4.3. Falka związana z filtrem o 9 współczynnikach odpowiedzi impulsowej ma 4 znikające momenty i gładkość wg Höldera równą 0,83. Falka związana z filtrem o 3 współczynnikach odpowiedzi impulsowej ma 2 znikające momenty i gładkość wg Höldera równą 1. Mimo niewielkiej różnicy w wartościach wykładnika Höldera z wyników eksperymentów obliczeniowych dotyczących kompresji obrazu *Lena* podanych w [1] wynika, że nawet ta niewielka różnica w gładkości falek ma większy wpływ na współczynnik kompresji i zniekształcenia kompresji niż liczba znikających momentów. Przemawia to za wyborem filtru o 9 współczynnikach jako filtru dekompozycji i filtru o 3 współczynnikach jako filtru rekonstrukcji.

Przykład 3

Niech filtrami wybranymi do reprezentacji falkowej będą filtry 9/7. Funkcje skalujące i falki stowarzyszone z tymi filtrami pokazane są na rysunku

4.4. Obydwie falki mają po 4 znikające momenty. Falka związana z filtrem o 9 współczynnikach ma gładkość wg Höldera równą 1,07, a falka związana z filtrem o 7 współczynnikach gładkość równą 1,70. Dość znaczna różnica w wartościach wykładnika Höldera, a także wyniki eksperymentów kompresji obrazów podane w [1] przemawiają za wyborem filtru o 9 współczynnikach jako filtru dekompozycji i filtru o 7 współczynnikach jako filtru rekonstrukcji.

Podsumowując, w oparciu o wnioski zawarte w [1] można sformułować następujące wytyczne dotyczące wyboru falek biortogonalnych w kompresji sygnałów i obrazów:

- jeśli obydwie falki mają tę samą liczbę znikających momentów, to falka o większym wykładniku Höldera powinna być falką rekonstrukcji, a falka o mniejszym wykładniku Höldera powinna być falką dekompozycji;
- zwiększenie gładkości falki rekonstrukcji kosztem zmniejszenia liczby znikających momentów falki dekompozycji może polepszyć jakość kompresji;
- w przypadku falek o zbliżonych gładkościach i różnych liczbach znikających momentów falką dekompozycji powinna być falka o większej liczbie znikających momentów, a falką rekonstrukcji falka o mniejszej liczbie znikających momentów.

4.4 Falki jako pochodne funkcji Gaussa

Unikalne właściwości funkcji Gaussa powodują, że funkcja ta może służyć do tworzenia falek. Funkcja Gaussa o odchyleniu standardowym równym

1 jest zdefiniowana następująco

$$g(t) = c \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right), \quad (4.127)$$

gdzie stała c dobierana jest tak, aby funkcja miała określoną własność. Jeśli ma spełniać warunek

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = 1, \quad (4.128)$$

to stała c musi być równa $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, gdyż

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \sqrt{2\pi}. \quad (4.129)$$

Dalej przyjęto, że funkcja Gaussa będzie spełniać powyższy warunek, więc

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right). \quad (4.130)$$

Pochodne funkcji Gaussa można wyrazić za pomocą wzoru zawierającego tzw. *wielomiany Hermite'a*⁵ $H_n(t)$, które są rozwiązaniami równania

$$\frac{d^n e^{-t^2}}{dt^n} = (-1)^n H_n(t) e^{-t^2}. \quad (4.131)$$

Kilka pierwszych wielomianów Hermite'a pokazano w tablicy 4.2.

Zastępując w równaniu (4.131) t przez $t/\sqrt{2}$, otrzymujemy

$$2^{n/2} \frac{d^n}{dt^n} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) = (-1)^n H_n(t/\sqrt{2}) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right), \quad (4.132)$$

skąd

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n} = (-1)^n 2^{-n/2} H_n(t/\sqrt{2}) g(t). \quad (4.133)$$

⁵Nazwa wielomianów pochodzi od nazwiska francuskiego matematyka Charlesa Hermite'a (1822-1901).

Tablica 4.2: Wielomiany Hermite'a

n	Wielomian Hermite'a $H_n(t)$
1	$2t$
2	$-2 + 4t^2$
3	$-12t + 8t^3$
4	$12 - 48t^2 + 16t^4$
5	$-120 + 720t^2 - 480t^4 + 64t^6$

Na podstawie równania (4.133) i tablicy 4.2 otrzymujemy pierwszą pochodną funkcji Gaussa

$$\frac{dg(t)}{dt} = -t g(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right). \quad (4.134)$$

Druga pochodna funkcji Gaussa ma postać

$$\frac{d^2g(t)}{dt^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (t^2 - 1) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right). \quad (4.135)$$

Funkcja Gaussa i jej pochodne mają nieskończone nośniki, ale zarówno sama funkcja, jak i jej pochodne zanikają bardzo szybko. Pochodne funkcji Gaussa mają charakter oscylacyjny i mogą być wykorzystane jako falki. Liczba miejsc zerowych pochodnej funkcji Gaussa jest równa stopniowi pochodnej. Pochodne parzystego stopnia są parzyste, pochodne nieparzystego stopnia są nieparzyste.

Wyjątkową cechą funkcji Gaussa jest to, że jej transformata Fouriera jest również funkcją Gaussa ⁶

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\right). \quad (4.136)$$

⁶Inną interesującą w kontekście przetwarzania sygnałów własnością funkcji Gaussa jest $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} = \delta(t)$, czyli że funkcja Gaussa może służyć do zdefiniowania dystrybucji Diraca (deltę Diraca).

Transformata Fouriera n -tej pochodnej funkcji Gaussa ma postać

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^n g(t)}{dt^n}\right\} = (-i\omega)^n \mathcal{F}\{g(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-i\omega)^n \exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\right). \quad (4.137)$$

Z powyższego wynika, że transformatą Fouriera pierwszej pochodnej funkcji Gaussa jest

$$\mathcal{F}\left\{\frac{dg(t)}{dt}\right\} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} i\omega \exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\right), \quad (4.138)$$

a transformatą drugiej pochodnej jest

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^2 g(t)}{dt^2}\right\} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \omega^2 \exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\right). \quad (4.139)$$

Transformaty Fouriera funkcji Gaussa i jej pochodnych, podobnie jak samych funkcji, zanikają bardzo szybko.

Druga pochodna funkcji Gaussa, znormalizowana w przestrzeni $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ w taki sposób, że norma jest równa 1, znana jest w literaturze jako falka o nazwie *kapelusz meksykański* (ang. *mexican hat*)

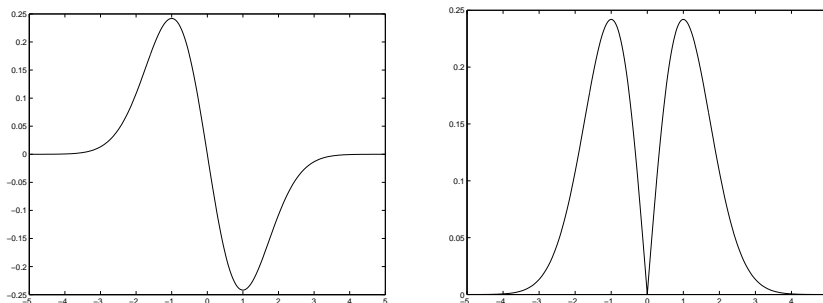
$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-1/4} (t^2 - 1) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right). \quad (4.140)$$

Jej transformata Fouriera ma postać

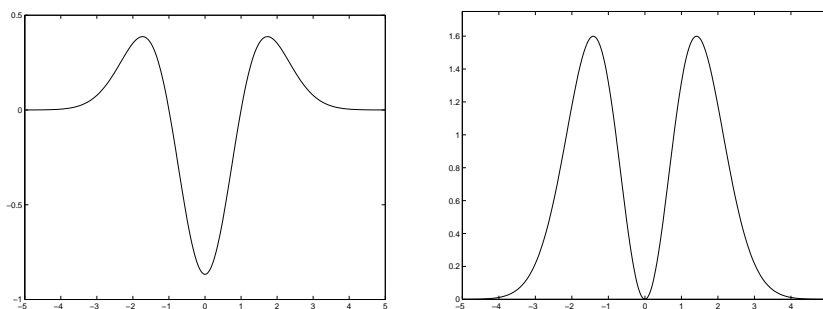
$$\Psi(\omega) = -\frac{\sqrt{8} \pi^{1/4}}{\sqrt{3}} \omega^2 \exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\right). \quad (4.141)$$

Pierwsza pochodna funkcji Gaussa i moduł jej transformaty Fouriera pokazane są na rysunku 4.5. Falka kapelusz meksykański i moduł jej transformaty Fouriera pokazane są na rysunku 4.6.

Z przedstawionych rysunków wynika, że funkcje te można interpretować jako odpowiedzi impulsowe filtrów pasmowych. Maksymalna wartość modułu transmitancji filtru w postaci pierwszej pochodnej funkcji Gaussa jest w punkcie $\omega = 1$; maksymalna wartość modułu transmitancji filtru



Rysunek 4.5: Falka w postaci pierwszej pochodnej funkcji Gaussa (z lewej) i moduł jej transformaty Fouriera (z prawej)



Rysunek 4.6: Falka kapelusz meksykański (z lewej) i moduł jej transformaty Fouriera (z prawej)

w postaci falki kapelusz meksykański znajduje się w punkcie $\omega = \sqrt{2}$. Szerokość pasma przepuszczania obydwu filtrów jest taka sama.

Falki w postaci pochodnych funkcji Gaussa wykorzystywane są do detekcji zbczy sygnałów i krawędzi obrazów.

4.5 Falki w postaci funkcji sklejanych

Funkcje wymienione w tytule tego punktu w języku angielskim nazywają się *splines*. W języku polskim spotyka się różne nazwy: funkcje sklelane, funkcje gięte⁷, splajny.

W definicji funkcji sklejaney zakłada się, że na przedziale $[k, k + 1]$, $k \in \mathbb{Z}$ funkcję opisuje wielomian stopnia co najwyżej n i najwyższy stopień wielomianu określa rząd funkcji sklejaney. Do określenia wielomianu stopnia n potrzeba $n + 1$ współczynników liczbowych. W odniesieniu do funkcji sklejanych stopnia n zakłada się, że są one ciągłe w węzłach i mają ciągłe pochodne aż do stopnia $n - 1$. Wymóg ciągłości funkcji i jej $n - 1$ pochodnych w węzłach powoduje, że pozostaje tylko jeden stopień swobody na każdy segment $[k, k + 1]$, $k \in \mathbb{Z}$, a nie $n + 1$, jakby to wynikało z liczby współczynników opisujących wielomian stopnia n . Zbiór wszystkich funkcji sklejanych spełniających powyższe warunki będzie oznaczany $S^n(\mathbb{Z})$.

4.5.1 Bazowe funkcje sklelane

Punktem wyjścia do zdefiniowania funkcji sklejanych jest *bazowa (przyczynowa) funkcja sklejana zerowego rzędu*

$$\alpha^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych } t, \end{cases} \quad (4.142)$$

która jest również nazywana *funkcją bramkową*. Dla $n > 0$ bazowa (przyczynowa) funkcja sklejana rzędu n jest określona rekurencyjnie jako splot bazowej funkcji sklejaney rzędu $n - 1$ z bazową funkcją sklejaną rzędu zerowego, tj.

$$\alpha^n(t) = \alpha^{n-1} * \alpha^0(t). \quad (4.143)$$

⁷W monografii [32] użyto terminu *funkcje gięte*.

Poniżej wymienione są podstawowe własności bazowych funkcji sklejanya [32]:

$$\alpha^n(t) > 0 \quad \text{dla } t \in (0, n+1), \quad (4.144)$$

$$\text{supp } \alpha^n(t) = [0, n+1], \quad (4.145)$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha^n(t-k) = 1, \quad (4.146)$$

$$\alpha^n((n+1)/2-t) = \alpha^n((n+1)/2+t) \quad \text{dla } t \in \mathbb{R}, \quad (4.147)$$

$$\frac{d}{dt} \alpha^{n+1}(t) = \alpha^n(t) - \alpha^n(t-1), \quad (4.148)$$

gdzie supp oznacza nośnik funkcji. Ważną własnością bazowych funkcji sklejanya rzędu n jest to, że każdą funkcję $f(t)$ należącą do $S^n(\mathbb{Z})$ można jednoznacznie przedstawić jako kombinację liniową translacji całkowitoliczbowych bazowej funkcji sklejanya n -tego rzędu [32]

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a[k] \alpha^n(t-k). \quad (4.149)$$

Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ w powyższej sumie mamy co najwyżej $(n+1)$ niezerowych składników. Dowodzi się, że zbiór translacji całkowitoliczbowych bazowej funkcji sklejanya rzędu n $\{\alpha^n(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ jest ciągiem Rieszsa w $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, a przestrzenie $S^n(2^j\mathbb{Z}) \cap \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, gdzie odległość między węzłami wynosi 2^j , $j \in \mathbb{Z}$, są podprzestrzeniami domkniętymi przestrzeni $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ [32].

Zdefiniowane wyżej bazowe funkcje sklejanya są funkcjami przyczynowymi i są symetryczne względem prostej $t = (n+1)/2$. W obliczeniach wygodnie jest używać bazowych funkcji sklejanya symetrycznych w zerze. Będą one oznaczane symbolem $\beta^n(t)$ i zdefiniowane jako

$$\beta^n(t) = \alpha^n(t + (n+1)/2). \quad (4.150)$$

Transformatę Fouriera bazowej funkcji sklejanya $\beta^n(t)$ wyraża wzór:

$$B^n(\omega) = \left[\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right]^{n+1}. \quad (4.151)$$

Najczęściej będzie wykorzystywana bazowa funkcja sklejana rzędu 3, która dalej będzie nazywana kubiczną bazową funkcją sklejaną i oznaczana

$$\beta^3(t) = \alpha^3(t+2). \quad (4.152)$$

Opis analityczny bazowej kubicznej funkcji sklejaney zawiera tablica 4.3.

Tablica 4.3: Wielomiany opisujące bazową kubiczną funkcję sklejaną $\beta^3(t)$

Przedział	$\beta^3(t)$
$t < -2$	0
$-2 \leq t < -1$	$(t+2)^3/6$
$-1 \leq t < 0$	$-t^3/2 - t^2 + 2/3$
$0 \leq t < 1$	$t^3/2 - t^2 + 2/3$
$1 \leq t < 2$	$(2-t)^3/6$
$t \geq 2$	0

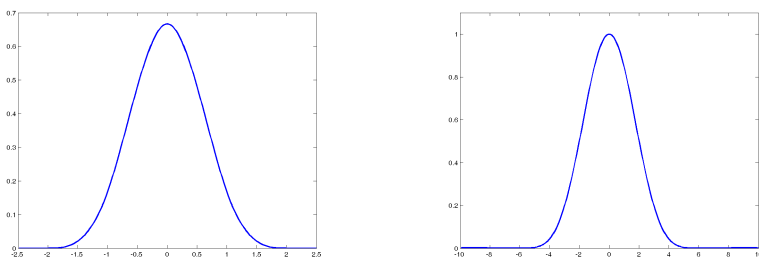
Bazowa kubiczna funkcja sklejana ma zwarty nośnik i dobrą lokalizację w dziedzinie częstotliwości, co ilustruje rysunek 4.7.

4.5.2 Falki w postaci kubicznych funkcji sklejaných

Równanie falkowe wyraża falkę rozszerzoną dwukrotnie za pomocą kombinacji liniowej translacji całkowitoliczbowych funkcji skalującej $\phi(t)$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_k g[k] \phi(t-k), \quad (4.153)$$

gdzie $g[n]$ są współczynnikami odpowiedzi impulsowej filtru górnoprzepustowego stowarzyszonego z falką [12]. Przyjmując, że translacje całko-



Rysunek 4.7: Bazowa kubiczna funkcja sklejana $\beta^3(t)$ (z lewej) i moduł jej transformaty Fouriera (z prawej)

witoliczbowe funkcji skalującej $\{\phi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ tworzą bazę podprzestrzeni związanej ze skalą $s = 1$, lewą stronę równania (4.153) można traktować jako definicję falki w skali $s = 2$. W dalszym ciągu falka ta będzie oznaczana symbolem $\psi_2(t)$.

Zgodnie z własnością (4.148) pochodna bazowej funkcji skleianej jest kombinacją liniową translacji bazowych funkcji sklejanych niższego rzędu. Poniżej pokazano, jak wykorzystując tę własność, skonstruować najprostsz falki kubiczne.

Falka kubiczna w postaci pierwszej pochodnej bazowej funkcji skleianej rzędu czwartego

Najprostszą falką kubiczną jest pierwsza pochodna bazowej funkcji skleianej czwartego rzędu

$$\psi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(\frac{t}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{dt} \beta^4(t). \quad (4.154)$$

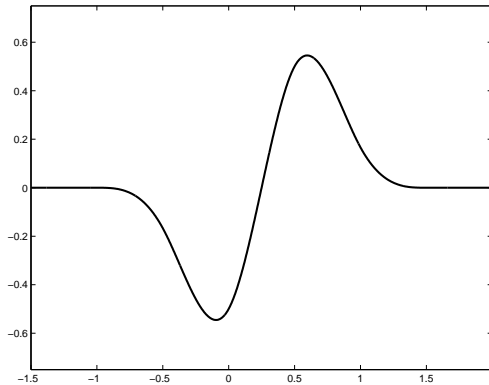
Uwzględniając (4.148) i (4.150), otrzymujemy

$$\psi_2(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \beta^3(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \beta^3(t-1). \quad (4.155)$$

Nośnikiem falki $\psi_2(t)$ jest przedział $[-2, 3]$. Falka matka

$$\psi(t) = \sqrt{2} \psi_2(2t) = -\beta^3(2t) + \beta^3(2t - 1) \quad (4.156)$$

jest pokazana jest na rysunku 4.8.



Rysunek 4.8: Falka kubiczna w postaci pierwszej pochodnej bazowej funkcji sklejaney czwartego rzędu

Porównując rysunki 4.8 i 4.5, łatwo zauważyć podobieństwo (z dokładnością do znaku) falki kubicznej, będącej pierwszą pochodną bazowej funkcji sklejaney rzędu czwartego, z falką będącą pierwszą pochodną funkcji Gaussa.

Współczynniki filtru $g[n]$ w równaniu (4.153) dla falki $\psi_2(t)$ są równe

$$g[0] = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad g[1] = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4.157)$$

i zestawione zostały w tablicy 4.4.

Transmitacja tego filtru ma postać

$$G(e^{i\omega}) = -\sqrt{2} i e^{-i\omega/2} \sin \frac{\omega}{2}, \quad (4.158)$$

co oznacza, że filtr wprowadza przesunięcie fazowe $-\omega/2$.

Tablica 4.4: Współczynniki filtru g odpowiadającego falce kubicznej w postaci pierwszej pochodnej bazowej funkcji sklejaney rzędu 4

n	0	1
$g[n]$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

Falka kubiczna w postaci drugiej pochodnej bazowej funkcji sklejaney piątego rzędu

Inną falką w postaci kubicznej funkcji sklejaney jest falka będąca drugą pochodną bazowej funkcji sklejaney piątego rzędu

$$\psi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(\frac{t}{2}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{d^2}{dt^2} \beta^5(t). \quad (4.159)$$

Uwzględniając (4.148) i (4.150), otrzymujemy

$$\psi_2(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \beta^3(t+1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \beta^3(t) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \beta^3(t-1). \quad (4.160)$$

Nośnikiem falki $\psi_2(t)$ jest przedział $[-3, 3]$. Falka matka

$$\psi(t) = \sqrt{2} \psi_2(2t) = \frac{1}{2} \beta^3(2t+1) - \beta^3(t) + \frac{1}{2} \beta^3(2t-1) \quad (4.161)$$

pokazana jest na rysunku 4.9.

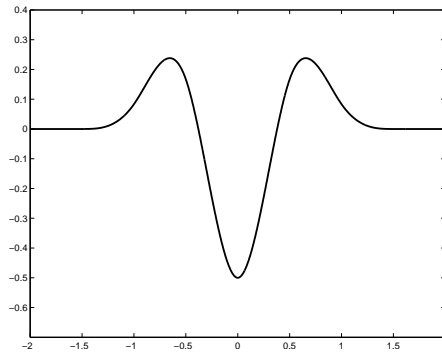
Porównując rysunki 4.9 i 4.6, łatwo zauważyć podobieństwo falki kubicznej, będącej drugą pochodną bazowej funkcji sklejaney rzędu piątego z falką *kapelusza meksykańskiego*.

Współczynniki filtru $g[n]$ w równaniu (4.153) dla falki $\psi_2(t)$ są równe

$$g[-1] = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad g[0] = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad g[1] = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (4.162)$$

i zestawione zostały w tablicy 4.5.

Filtr ma symetryczną w zerze odpowiedź impulsową i tym samym nie przesuwa fazy filtrowanego sygnału.



Rysunek 4.9: Falka kubiczna w postaci drugiej pochodnej bazowej funkcji sklejanej piątego rzędu

Tablica 4.5: Współczynniki filtru g odpowiadającego falce kubicznej w postaci drugiej pochodnej bazowej funkcji sklejanej rzędu 5

n	-1	0	1
$g[n]$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$

5 Ciągła transformata falkowa

Ciągła transformata falkowa jest efektywnym narzędziem analizy sygnałów, w szczególności analizy sygnałów niestacjonarnych, lokalizowania gwałtownych zmian sygnału i charakteryzowania osobliwości sygnałów. Znajduje zastosowanie w analizie sygnałów biomedycznych, w redukcji szumów, w analizie fraktalnej, w detekcji i lokalizacji uszkodzeń materiałowych.

Z definicji ciągła transformata falkowa sygnału $f(\tau)$ i falki $\psi(\tau)$ w punkcie $\tau = t$ i w skali s jest iloczynem skalarnym sygnału i falki [12]:

$$Wf(t, s) = \langle f(\tau), \psi_{t,s}(\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \psi_{t,s}(\tau) d\tau, \quad (5.1)$$

gdzie

$$\psi_{t,s}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{\tau - t}{s}\right) d\tau. \quad (5.2)$$

Ciągłą transformatę falkową można także wyrazić za pomocą splotu sygnału i falki rewersyjnej $\bar{\psi}(\tau)$:

$$Wf(t, s) = f * \bar{\psi}_s(t), \quad (5.3)$$

gdzie

$$\bar{\psi}_s(\tau) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{-\tau}{s}\right). \quad (5.4)$$

Ciągła transformata falkowa funkcji jednej zmiennej jest funkcją dwóch zmiennych: czasu i skali. Pomimo ciągłego charakteru może być obliczana

tylko numerycznie i wymaga dużych nakładów obliczeniowych. Dlatego istnieje zainteresowanie szybkimi metodami obliczania ciągłej transformaty falkowej, które za cenę pewnych ograniczeń, na przykład wyboru określonych skal i postaci falek, redukują złożoność obliczeniową do liniowej. Przykładem takiego algorytmu jest nazywany z francuskiego *algorithme à trous* dla skal diadycznych, tj. będących wielokrotnościami 2^j , $j = 1, 2, 3, \dots$, np. 2, 4, 8, 16, \dots [12] [8]. Skala diadyczna mocno „rozrzedza” się dla większych skal i to ogranicza zastosowania algorytmu *à trous*. Algorytm *à trous* jest opisany w punkcie 5.1.1 tego rozdziału.

Zagęścić skalę do skal parzystych można poprzez wykorzystanie falek skonstruowanych w postaci funkcji sklejanych. Algorytm obliczania ciągłej transformaty falkowej w skalach parzystych z wykorzystaniem falek w postaci kubicznych funkcji sklejanych i z interpolacją sygnału za pomocą kubicznych funkcji sklejanych przedstawiony jest w punkcie 5.2 tego rozdziału.

W ostatnim punkcie opisano zastosowanie szybkiego dyskretnego przekształcenia Fouriera do obliczania ciągłej transformaty falkowej.

5.1 Diadyczne przekształcenie falkowe

Diadyczna transformata falkowa jest zbiorem funkcji jednej zmiennej $\{Wf_j(t)\}_{j \in \mathbb{Z}}$, zdefiniowanych następująco

$$Wf_j(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{\tau - t}{2^j}\right) d\tau. \quad (5.5)$$

Funkcja $Wf_j(t)$ jest iloczynem skalarnym sygnału $f(t)$ i falki przeskalowanej do skali $s_j = 2^j$, $j \in \mathbb{Z}$ i przesuniętej o t na osi czasu $\psi_{t,2^j}(\tau) = \sqrt{2^{-j}} \psi\left(\frac{\tau - t}{2^j}\right)$.

Dyskretna diadyczna transformata falkowa obliczana jest dla chwil

czasowych $t_n = nT$, $n \in \mathbb{Z}$, $T > 0$ - krok dyskretyzacji.

$$Wf_j[n] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \frac{1}{\sqrt{2^k}} \psi\left(\frac{\tau - t_n}{2^j}\right) d\tau. \quad (5.6)$$

Oś czasu t jest dyskretyzowana liniowo z takim samym krokiem dla wszystkich skal. Oś skali dyskretyzowana jest diadycznie, tj. $s_j = 2^j$, $j \in \mathbb{Z}$.

Istotną cechą dyskretnego diadycznego przekształcenia falkowego jest istnienie szybkiego algorytmu *à trous* obliczania transformaty [8] [24] [12].

5.1.1 Szybkie diadyczne przekształcenie falkowe

Szybki algorytm dotyczy falek $\psi(t)$ spełniających równanie falkowe, dla których jest określona funkcja skalująca $\phi(t)$ spełniająca równanie dy-latacyjne. Jeżeli filtry $\bar{h}[n]$ i $\bar{g}[n]$ występujące w równaniach falkowym i dy-latacyjnym nie są filtrami ortogonalnymi, to do rekonstrukcji sygnału potrzebna jest dodatkowa para filtrów $\tilde{h}[n]$ i $\tilde{g}[n]$, biortogonalnych do filtrów $\bar{h}[n]$ i $\bar{g}[n]$.

Wstępnie należy określić prostokąt $[t_{min}, t_{max}] \times [s_{min}, s_{max}]$, w którym będą obliczane wartości transformaty falkowej. Standardowo są używane dwa prostokąty: $[0, N - 1] \times [2, s_{max}]$ albo $[0, 1) \times [s_{min}, 1]$, gdzie $N = 2^J$. W przypadku prostokąta $[0, N - 1] \times [2, s_{max}]$ wartości transformaty falkowej obliczane są w punktach $(n, 2^j)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$, dla $j = 1, 2, \dots, J$, gdzie $J = \log_2 N$. W przypadku prostokąta $[0, 1) \times [s_{min}, 1]$ wartości transformaty falkowej obliczane są w punktach $(n/N, 2^j)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$, dla $j = -(J - 1), -(J - 2), \dots, 0$. W dalszym ciągu ograniczymy się do prostokąta $[0, N - 1] \times [2, s_{max}]$ na płaszczyźnie czas-częstotliwość.

Algorytm umożliwia obliczanie współczynników

$$d_j[n] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{\tau-n}{2^j}\right) d\tau \quad (5.7)$$

$$= \langle f(\tau), \psi_{2^j}(\tau-n) \rangle \quad (5.8)$$

$$= f * \bar{\psi}_{2^j}(n) \quad (5.9)$$

i

$$a_j[n] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{\tau-n}{2^j}\right) d\tau \quad (5.10)$$

$$= \langle f(\tau), \phi_{2^j}(\tau-n) \rangle \quad (5.11)$$

$$= f * \bar{\phi}_{2^j}(n) \quad (5.12)$$

dla $j \in \mathbb{Z}$, $j > 0$, $n \in \mathbb{Z}$, które stanowią dyskretną diadyczną reprezentację falkową sygnału $f(t)$.

Zastosowanie algorytmu *à trous* do obliczenia transformaty falkowej wymaga znajomości reprezentacji cyfrowej sygnału $f(t)$ w najmniejszej skali, tj. skali $s = 2^0 = 1$. Reprezentacją tą są współczynniki rzutu sygnału $f(t)$ na podprzestrzeń rozpiętą przez translacje całkowitoliczbowe funkcji skalującej $\{\phi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, tj.

$$a_0[n] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \phi(\tau-n) d\tau = \langle f(\tau), \phi(\tau-n) \rangle = f * \bar{\phi}(n), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.13)$$

Ciąg $a_0[n]$ stanowi dane wejściowe dla algorytmu *à trous*.

Algorithme à trous

W algorytmie wykorzystuje się filtry z „dziurami”, tj. filtry $\bar{h}_j, \bar{g}_j, \tilde{h}_j, \tilde{g}_j$, $j \geq 0$, które powstają z filtrów $\bar{h}, \bar{g}, \tilde{h}, \tilde{g}$ w wyniku wstawienia pomiędzy każdą parę współczynników zer w liczbie $2^j - 1$. Współczynniki na przykład filtru $h_j[n]$ można zapisać następująco

$$h_j[n] = \begin{cases} h[k] & \text{jeśli } n = 2^j k \\ 0 & \text{jeśli } n \neq 2^j k. \end{cases}$$

Transformata Fouriera filtru h_j może być wyrażona za pomocą transformaty Fouriera filtru h

$$H_j(e^{i\omega}) = \sum_n h_j[n] e^{-i\omega n} \quad (5.14)$$

$$= \sum_k h[k] e^{-i\omega 2^j k} \quad (5.15)$$

$$= H(e^{i2^j \omega}). \quad (5.16)$$

Analogiczne zależności dotyczą pozostałych filtrów.

Twierdzenie 5.1.1 Dla $j \geq 0$

$$d_{j+1}[n] = a_j * \bar{g}_j[n], \quad (5.17)$$

$$a_{j+1}[n] = a_j * \bar{h}_j[n] \quad (5.18)$$

i

$$a_j[n] = \frac{1}{2}(a_{j+1} * \tilde{h}_j[n] + d_{j+1} * \tilde{g}_j[n]). \quad (5.19)$$

Dowód równania (5.17)

Ciąg $d_{j+1}[n]$, $j \geq 0$ jest, zgodnie z (5.9), wynikiem próbkowania sygnału $f * \bar{\psi}_{2^{j+1}}(t)$. Transformata Fouriera sygnału $f * \bar{\psi}_{2^{j+1}}(t)$ jest $F(\omega) \Psi_{2^{j+1}}^*(\omega)$, więc transformata Fouriera ciągu $d_{j+1}[n]$ jest ¹

$$D_{j+1}(e^{i\omega}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} F(\omega + k2\pi) \Psi_{2^{j+1}}^*(\omega + k2\pi). \quad (5.20)$$

Na podstawie równania falkowego w dziedzinie częstotliwości

$$\Psi(\omega) = \sqrt{2^{-1}} G(e^{i\omega/2}) \Phi(\omega/2), \quad (5.21)$$

¹Dowodzi się, że jeżeli sygnał dyskretny $f[n]$ jest wynikiem próbkowania sygnału czasu ciągłego $f(t)$, tzn. $f[n] = f(nT)$, $T > 0$, to transformata Fouriera sygnału dyskretnego $f[n]$ jest równa $F(e^{i\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(\omega + k2\pi/T)$, gdzie $F(\omega)$ jest transformata Fouriera sygnału $f(t)$ [15], [12].

zastępując ω przez $2^{j+1}\omega$, otrzymujemy

$$\Psi(2^{j+1}\omega) = \sqrt{2^{-1}} G(e^{i2^j\omega}) \Phi(2^j\omega). \quad (5.22)$$

Mnożąc obie strony powyższego równania przez $\sqrt{2^{j+1}}$, otrzymujemy równanie

$$\Psi_{2^{j+1}}(\omega) = G(e^{i2^j\omega}) \Phi_{2^j}(\omega). \quad (5.23)$$

Wstawiając prawą stronę powyższego równania do równania (5.20), otrzymujemy

$$D_{j+1}(e^{i\omega}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} F(\omega + k2\pi) G^*(e^{i2^j(\omega+k2\pi)}) \Phi_{2^j}^*(\omega + k2\pi). \quad (5.24)$$

Transmitancja filtru cyfrowego $G(e^{i\omega})$, jako transformata Fouriera sygnału czasu dyskretnego, jest funkcją okresową zmiennej ω o okresie 2π . Uwzględniając okresowość $G(e^{i\omega})$, można wyłączyć czynnik $G^*(e^{i2^j\omega})$ przed znak sumowania

$$D_{j+1}(e^{i\omega}) = G^*(e^{i2^j\omega}) \sum_{k \in \mathbb{Z}} F(\omega + k2\pi) \Phi_{2^j}^*(\omega + k2\pi). \quad (5.25)$$

$G(e^{i2^j\omega}) = G_j(e^{i\omega})$, a $\sum_{k \in \mathbb{Z}} F(\omega + k2\pi) \Phi_{2^j}^*(\omega + k2\pi)$ jest transformatą Fouriera ciągu $a_j[n]$, zatem otrzymujemy

$$D_{j+1}(e^{i\omega}) = A_j(e^{i\omega}) G_j^*(e^{i\omega}), \quad (5.26)$$

co dowodzi słuszności wzoru (5.17).

Dowód równania (5.18)

Dowód tego równania jest analogiczny do dowodu równania (5.17), z tą różnicą, że zamiast równania falkowego należy skorzystać z równania dylatacyjnego, które w dziedzinie częstotliwości ma postać

$$\Phi(\omega) = \sqrt{2^{-1}} H(e^{i\omega/2}) \Phi(\omega/2). \quad (5.27)$$

Dowód równania (5.19)

Transformata Fouriera prawej strony równania (5.19) ma postać

$$\frac{1}{2} [A_{j+1}(e^{i\omega}) \tilde{H}_j(e^{i\omega}) + D_{j+1}(e^{i\omega}) \tilde{G}_j(e^{i\omega})]. \quad (5.28)$$

Powyższe wyrażenie można przekształcić do postaci

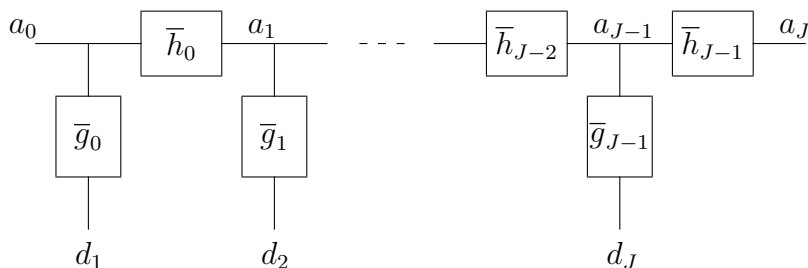
$$\frac{1}{2} A_j(e^{i\omega}) [H_j^*(e^{i\omega}) \tilde{H}_j(e^{i\omega}) + G_j^*(e^{i\omega}) \tilde{G}_j(e^{i\omega})]. \quad (5.29)$$

Układ filtrów \bar{h} , \bar{g} , \tilde{h} , \tilde{g} powinien spełniać warunek doskonałej rekonstrukcji sygnału [19]

$$H_j^*(e^{i\omega}) \tilde{H}_j(e^{i\omega}) + G_j^*(e^{i\omega}) \tilde{G}_j(e^{i\omega}) = 2, \quad (5.30)$$

co zapewnia równość lewej i prawej strony równania (5.19).

Na rysunku 5.1 pokazany jest układ filtrów dekompozycji diadycznej sygnału.



Rysunek 5.1: Bank filtrów dekompozycji sygnału algorytmu *à trous*

Zakładając, że liczba współczynników filtru \bar{h} wynosi $L_{\bar{h}}$, a liczba współczynników filtru \bar{g} , $L_{\bar{g}}$, obliczenie jednego współczynnika $d_{j+1}[n]$ i jednego współczynnika $a_{j+1}[n]$ wymaga $L_{\bar{h}} + L_{\bar{g}}$ mnożeń i dodawań, niezależnie od skali (wstawianie zer do filtrów \bar{h}_j i \bar{g}_j nie zwiększa liczby

mnożeń ani dodawań). Obliczenie wszystkich współczynników dla jednej skali przy długości sygnału N wymaga $(L_{\tilde{h}} + L_{\tilde{g}})N$ mnożeń i dodawań. Liczba możliwych skal wynosi $\log_2 N$, wobec czego pełna dekompozycja diadyczna sygnału wymaga $(L_{\tilde{h}} + L_{\tilde{g}})N \log_2 N$ mnożeń i dodawań. W analogiczny sposób można pokazać, że liczba mnożeń i dodawań przy rekonstrukcji sygnału wynosi $(L_{\tilde{h}} + L_{\tilde{g}})N \log_2 N$, gdzie $L_{\tilde{h}}$ i $L_{\tilde{g}}$ odpowiednio długości filtrów \tilde{h} i \tilde{g} .

Reprezentacja sygnału w postaci dyskretnej diadycznej transformaty falkowej jest reprezentacją redundancyjną. Jeżeli transformowany sygnał ma długość N próbek, to transformata może liczyć $N \log_2 N$ współczynników falkowych i N współczynników sygnału zgrubnego (wygładzonego).

5.1.2 Detekcja zboczy sygnałów

Ciągła transformata falkowa jest efektywnym narzędziem wspomagającym detekcję i lokalizację zboczy sygnału. Zbocze sygnału jest miejscem, w którym sygnał zmienia gwałtownie wartość. W miejscach takich moduł pochodnej sygnału osiąga duże wartości i lokalizując takie miejsca, znajduje się położenie zboczy sygnału. Jednakże obliczanie pochodnej sygnału, w szczególności sygnału czasu dyskretnego, może być zagadnieniem źle uwarunowanym i prowadzić do błędnych wyników. Pomocne w uniknięciu trudności obliczeniowych może być wstępne wygładzenie sygnału i różniczkowanie sygnału wygładzonego. Wygładzenie sygnału polega na uśrednianiu wagowym jednorodnym sygnału $f(t)$ za pomocą funkcji wygładzającej (wagowej) $\theta(t)$ spełniającej warunek

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) dt \neq 0 \quad (5.31)$$

i o nośniku dużo mniejszym niż przedział, w którym rozpatrywany jest sygnał $f(t)$. Symbolicznie operację wygładzania sygnału można zapisać

następująco

$$\tilde{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \theta(\tau - t) d\tau. \quad (5.32)$$

Celowe może być wygładzenie sygnału przeskalowaną funkcją wygładzającą $\theta_s(t)$

$$\theta_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \theta\left(\frac{t}{s}\right), \quad s > 0 \quad (5.33)$$

i wówczas

$$\tilde{f}_s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \theta_s(\tau - t) d\tau. \quad (5.34)$$

Zboczom w sygnale $f(t)$ odpowiadają punkty przegięcia w sygnale wygładzonym $\tilde{f}(t)$. Pierwsza pochodna sygnału wygładzonego przyjmuje ekstrema lokalne w punktach przegięcia. Lokalizując ekstrema, znajduje się położenia zboczy.

Pierwszą pochodną sygnału wygładzonego przeskalowaną funkcją wygładzającą można zapisać następująco

$$\frac{d}{dt} \tilde{f}_s(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \theta_s(\tau - t) d\tau \quad (5.35)$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \frac{1}{\sqrt{s}} \theta\left(\frac{\tau - t}{s}\right) d\tau \quad (5.36)$$

$$= -\frac{1}{s} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \frac{1}{\sqrt{s}} \theta'\left(\frac{\tau - t}{s}\right) d\tau \quad (5.37)$$

$$= -\frac{1}{s} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \theta'_s(\tau - t) d\tau, \quad (5.38)$$

gdzie $\theta'(t) = \frac{d}{dt} \theta(t)$, $\theta'_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \theta'(t/s)$.

Definiując przeskalowaną falkę $\psi_s(t)$

$$\psi_s(t) = -\theta'_s(t) \quad (5.39)$$

otrzymujemy na podstawie (5.38) równanie

$$s \frac{d}{dt} \tilde{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \psi_s(\tau - t) d\tau, \quad (5.40)$$

którego prawą stroną jest ciągła transformata falkowa $W_1 f(t, s)$ sygnału $f(t)$ w skali s z falką $\psi(t)$

$$\psi(t) = -\frac{d}{dt}\theta(t), \quad (5.41)$$

co można zapisać symbolicznie następująco

$$s \frac{d}{dt} \tilde{f}(t) = W_1 f(t, s). \quad (5.42)$$

Ostatnia równość oznacza, że zbocza sygnału $f(t)$ można lokalizować, określając położenie ekstremów lokalnych ciągłej transformaty falkowej sygnału. Indeks $_1$ oznacza, że falką jest pierwsza pochodna funkcji wygładzającej. W praktyce poszukuje się położenia miejsc, w których moduł ciągłej transformaty falkowej przyjmuje lokalne maksima.

Przyjmując jako funkcję wygładzającą $\theta_s(t)$ w skali $s = 2$ bazową funkcję sklejaną rzędu czwartego [16]

$$\theta_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta^4(t), \quad (5.43)$$

otrzymujemy falkę w skali $s = 2$ opisaną w punkcie 4.5.2

$$\psi_2(t) = -\frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{2}} \beta^4(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \beta^3(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \beta^3(t-1). \quad (5.44)$$

Cechą charakterystyczną punktów przegięć jest zerowanie się w nich drugiej pochodnej. Dlatego alternatywnym sposobem detekcji zboczy sygnału jest lokalizowanie miejsc zerowych drugiej pochodnej sygnału wygładzonego.

Druga pochodna sygnału wygładzonego ma postać

$$\frac{d^2}{dt^2} \tilde{f}_s(t) = \frac{d^2}{dt^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \theta_s(\tau - t) d\tau \quad (5.45)$$

$$= \frac{d^2}{dt^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \frac{1}{\sqrt{s}} \theta\left(\frac{\tau - t}{s}\right) d\tau \quad (5.46)$$

$$= \frac{1}{s^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \frac{1}{\sqrt{s}} \theta''\left(\frac{\tau - t}{s}\right) d\tau \quad (5.47)$$

$$= \frac{1}{s^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \theta_s''(\tau - t) d\tau, \quad (5.48)$$

gdzie $\theta''(t) = \frac{d^2}{dt^2} \theta(t)$, $\theta_s''(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \theta''(t/s)$.

Definiując przeskalowaną falkę $\psi_s(t)$ jako

$$\psi_s(t) = \theta_s''(t), \quad (5.49)$$

otrzymujemy na podstawie (5.48) równanie

$$s^2 \frac{d}{dt} \tilde{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \psi_s(\tau - t) d\tau, \quad (5.50)$$

którego prawą stroną jest ciągła transformata falkowa $W_2 f(t, s)$ sygnału $f(t)$ w skali s z falką

$$\psi(t) = \frac{d^2}{dt^2} \theta(t), \quad (5.51)$$

co można zapisać symbolicznie w postaci

$$s^2 \frac{d}{dt} \tilde{f}(t) = W_2 f(t, s). \quad (5.52)$$

Ostatnia równość oznacza, że zbocza sygnału $f(t)$ można lokalizować, określając położenie miejsc zerowych ciągłej transformaty falkowej sygnału. Indeks $_2$ oznacza, że falką jest druga pochodna funkcji wygładzającej.

Przyjmując jako funkcję wygładzającą $\theta_s(t)$ w skali $s = 2$ bazową funkcję sklejaną rzędu piątego

$$\theta_2(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \beta^5(t), \quad (5.53)$$

otrzymujemy falę w skali $s = 2$ opisaną w punkcie 4.5.2

$$\psi_2(t) = \frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{2\sqrt{2}} \beta^5(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \beta^3(t+1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \beta^3(t) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \beta^3(t-1). \quad (5.54)$$

Zastosowanie algorytmu *à trous* do obliczania diadycznej transformaty falkowej wymaga znajomości filtra dolnoprzepustowego $h[n]$ stowarzyszonego z funkcją skalującą $\phi(t)$. Filtr $h[n]$ można obliczyć na podstawie równania dylatacyjnego w dziedzinie częstotliwości

$$\Phi(2\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} H(e^{i\omega}) \Phi(\omega), \quad (5.55)$$

skąd

$$H(e^{i\omega}) = \sqrt{2} \frac{\Phi(2\omega)}{\Phi(\omega)}. \quad (5.56)$$

Naturalną funkcją skalującą w przypadku falek kubicznych jest bazowa kubiczna funkcja sklejana, tj.

$$\phi(t) = \beta^3(t), \quad (5.57)$$

której transformatą Fouriera jest

$$\Phi(\omega) = \left[\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right]^4. \quad (5.58)$$

Transmitancja filtra stowarzyszonego z funkcją skalującą w postaci bazowej kubicznej funkcji sklejaney, obliczona na podstawie wzoru (5.56), ma postać

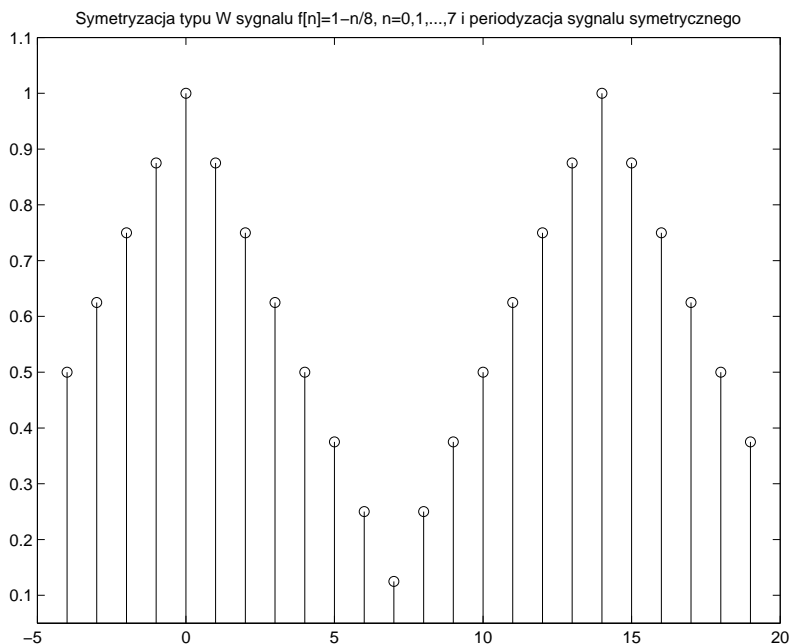
$$H(e^{i\omega}) = \frac{\sqrt{2}}{16} (e^{i2\omega} + 4e^{i\omega} + 6 + 4e^{-i\omega} + e^{-i2\omega}). \quad (5.59)$$

Współczynniki filtra zestawiono w tablicy 5.1.

Poniżej przedstawiono wyniki dwóch przykładów obliczeniowych diadycznej transformaty falkowej. Aby uniknąć nieciągłości na końcach sygnału, sygnał został „odbity lustrzanie” i potraktowany jako okresowy, co ilustruje rysunek 5.2 [20].

Tablica 5.1: Współczynniki filtra h odpowiadające funkcji skalującej w postaci bazowej kubicznej funkcji sklejaney

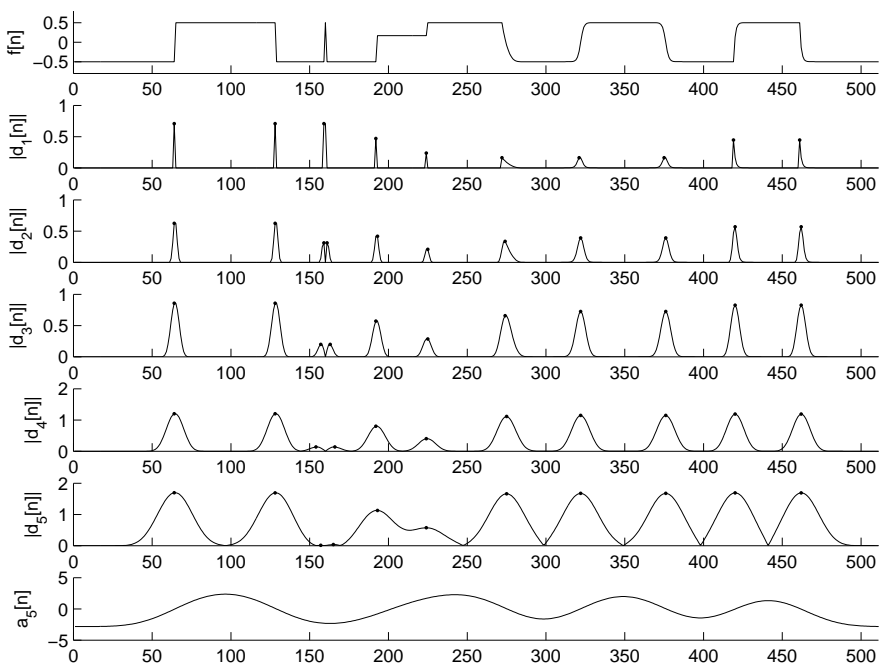
n	-2	-1	0	1	2
$h[n]$	$\frac{\sqrt{2}}{16}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{3\sqrt{2}}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{16}$



Rysunek 5.2: Ilustracja symetryzacji i periodyzacji sygnału $f[n] = 1 - n/8$, $n = 0, 1, \dots, 7$; sygnał po symetryzacji i periodyzacji ma w okresie 14 próbek

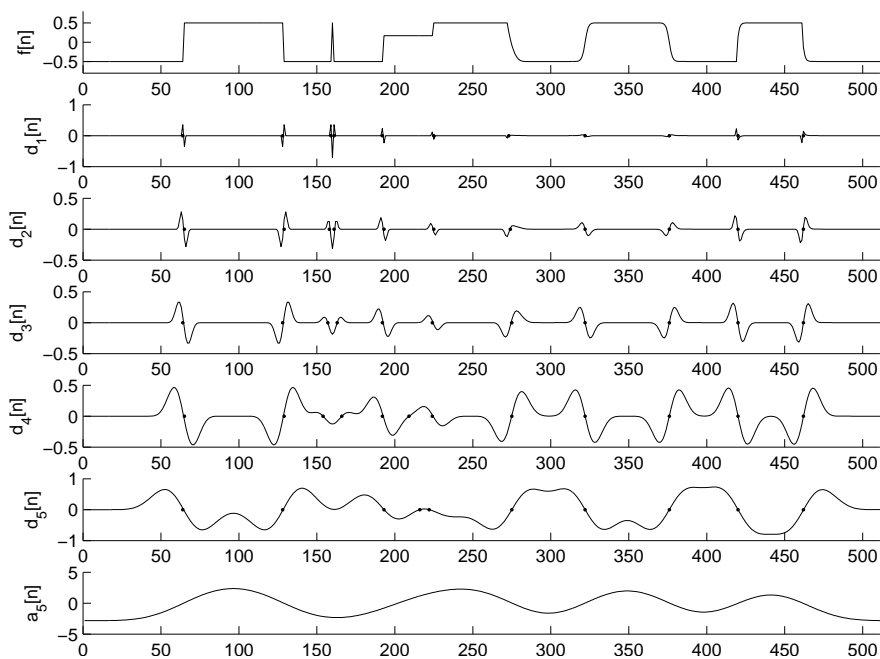
Na rysunku 5.3 pokazano przykładowy sygnał $f[n]$ i moduły sygnałów szczegółowych $|d_j[n]|$, $1 \leq j \leq 5$. Sygnały pokazano po korekcie przesunięć fazowych wynikających z zastosowania falki, która nie jest symetryczna w zerze. Zbocza sygnału odpowiadają maksimum lokalnym modułów sygnałów szczegółowych. Kropki na sygnałach pokazują poło-

żenie maksymów lokalnych.



Rysunek 5.3: Przykład 5-skalowej dekompozycji diadycznej sygnału z wykorzystaniem falki kubicznej w postaci pierwszej pochodnej bazowej funkcji sklepanej rzędu czwartego

Na rysunku 5.4 pokazano przykładowy sygnał $f[n]$ i sygnały szczegółowe $d_j[n]$, $1 \leq j \leq 5$. Zbocza sygnału odpowiadają miejscom, w których sygnały szczegółowe zerują się. Kropki na sygnałach pokazują miejsca zerowe transformat falkowych.



Rysunek 5.4: Przykład 5-skalowej dekompozycji diadycznej sygnału z wykorzystaniem falki kubicznej w postaci drugiej pochodnej bazowej funkcji sklejanej rzędu piątego

5.2 Ciągła transformata falkowa w skalach parzystych

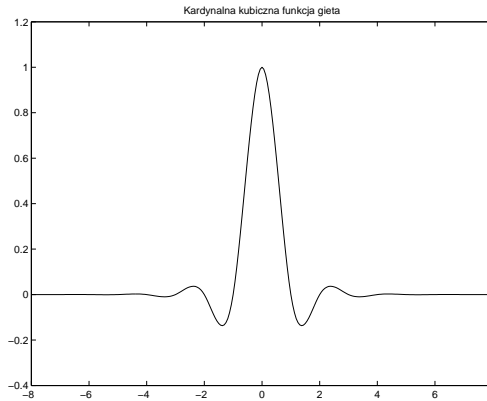
Celem niniejszego punktu jest przedstawienie szybkiego algorytmu numerycznego obliczania ciągłej transformaty falkowej w skalach całkowitoliczbowych parzystych, w przestrzeni funkcji sklejanых trzeciego rzędu. Algorytm zawiera krok polegający na interpolacji sygnału kubicznymi funkcjami sklejanymi, wykorzystuje falki w postaci kubicznych funkcji sklejanых i wykorzystuje tożsamość określającą, że splot bazowych funkcji sklejanых jest bazową funkcją sklejaną, co pozwala przedstawić ciągłą transformatę falkową w postaci funkcji sklejaney.

5.2.1 Interpolacja sygnału funkcjami sklejanymi rzędu trzeciego

Wśród funkcji sklejanых rzędu 3 wyróżnia się kardynalną funkcję sklejaną $\eta^3(t)$, która jest funkcją interpolującą, tj. spełnia warunek $\eta^3(n - k) = \delta[n - k]$ dla $n \in \mathbb{Z}$ i $k \in \mathbb{Z}$. Ponadto translacje całkowitoliczbowe $\{\eta^3(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tworzą bazę ortogonalną przestrzeni funkcji sklejanых 3 rzędu. Nośniki kardynalnych funkcji sklejanых są nieskończone, ale funkcje zanikają szybko, a mianowicie wykładniczo [29]. Kardynalna kubiczna funkcja sklejana pokazana jest na rysunku 5.5.

Z wymienionych wyżej własności kardynalnych funkcji sklejanых wynika, że możliwa jest za ich pomocą interpolacja funkcji, której wartości dane są w postaci próbek zmierzonych z krokiem jednostkowym $f[n] = f(nT)$, $T = 1$, $n \in \mathbb{Z}$

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n] \eta^3(t - n). \quad (5.60)$$

Rysunek 5.5: Kardynalna kubiczna funkcja sklejana $\eta^3(t)$

Efektywne obliczeniowo są funkcje o zwartych nośnikach. Do takich funkcji należą bazowe funkcje sklejane. Jak wiadomo translacje całkowitoliczbowe kubicznej bazowej funkcji sklejaney tworzą bazę Riesz podprzestrzeni kubicznych funkcji sklejaney całkownych z kwadratem. Można zatem za ich pomocą wyrazić kardynalną kubiczną funkcję sklejaną

$$\eta^3(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} p[m] \beta^3(t - m), \quad (5.61)$$

gdzie $p[m]$ są współczynnikami rozwinięcia funkcji $\eta^3(t)$ w bazie $\{\beta^3(t - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$. Translacje całkowitoliczbowe kardynalnej kubicznej funkcji sklejaney w bazie $\{\beta^3(t - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ wyraża wzór

$$\eta^3(t - n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} p[m] \beta^3(t - n - m). \quad (5.62)$$

Wykorzystując powyższe rozwinięcie i wzór (5.60) otrzymujemy roz-

winięcie $\tilde{f}(t)$ w bazie $\{\beta^3(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] \sum_{m=-\infty}^{\infty} p[m] \beta^3(t-n-m) \quad (5.63)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] p[m] \beta^3(t-n-m) \quad (5.64)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] p[k-n] \right) \beta^3(t-k) \quad (5.65)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f * p[k] \beta^3(t-k). \quad (5.66)$$

Z powyższego widać, że kluczem do rozwiązania zadania interpolacji sygnału $f(t)$ za pomocą translacji całkowitoliczbowych kubicznych bazowych funkcji sklejanych jest znajomość współczynników $p[k]$. Współczynniki te można otrzymać w następujący sposób:

$$\eta^3(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[k] \beta^3(t-k), \quad (5.67)$$

skąd dla całkowitoliczbowych wartości $t = n, n \in \mathbb{Z}$

$$\eta^3(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[k] \beta^3(n-k). \quad (5.68)$$

Definiując ciąg $b^3[n]$

$$b^3[n] = \beta^3(n) \quad (5.69)$$

i uwzględniając własność interpolacyjną funkcji $\eta^3(t)$, otrzymujemy

$$\eta^3(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[k] \beta^3(n-k) = p * b^3[n] = \delta[n]. \quad (5.70)$$

Zatem związek pomiędzy znanym ciągiem $b^3[n]$ i nieznanym ciągiem $p[n]$ ma postać

$$p * b^3[k] = \delta[k]. \quad (5.71)$$

W języku filtracji cyfrowej oznacza to, że filtr p jest filtrem odwrotnym do filtru b^3 . Współczynniki filtru b^3 podano w tablicy 5.2. Jest to filtr o skończonej odpowiedzi impulsowej.

Tablica 5.2: Współczynniki odpowiedzi impulsowej filtru b^3

n	-1	0	1
$b[n]$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$

Filtr odwrotny do filtru o skończonej odpowiedzi impulsowej jest filtrem o nieskończonej odpowiedzi impulsowej.

Bazowy filtr kubiczny

Na podstawie równania (5.71) otrzymuje się równanie w dziedzinie transformacji Z dla ciągów $p[n]$ i $b^3[n]$

$$P(z) B^3(z) = 1, \quad (5.72)$$

skąd

$$P(z) = \frac{1}{B^3(z)}. \quad (5.73)$$

Transformatą Z filtru b^3 jest

$$B^3(z) = \frac{1}{6}z + \frac{4}{6} + \frac{1}{6}z^{-1}, \quad (5.74)$$

zatem transformata Z filtru p ma postać

$$P(z) = \frac{1}{B^3(z)} \quad (5.75)$$

$$= \frac{6}{z + 4 + z^{-1}} \quad (5.76)$$

$$= \frac{6z}{(z - a)(z - a^{-1})}, \quad (5.77)$$

gdzie $a = \sqrt{3} - 2$. Prawą stronę równania (5.77) można przekształcić do postaci

$$P(z) = \frac{6}{1-a^2} \left(\frac{-a^2}{z-a} + \frac{1}{z-a^{-1}} \right) \quad (5.78)$$

$$= \frac{-6a}{1-a^2} \left(\frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-az} - 1 \right). \quad (5.79)$$

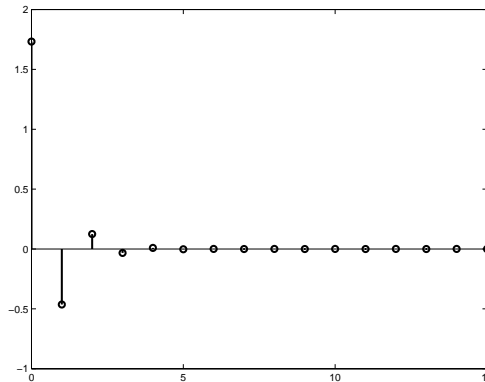
Łatwo sprawdzić, że

$$\frac{1}{1-az^{-1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n z^{-n}, \quad \text{jeśli } |z| > |a|. \quad (5.80)$$

Oznacza to, że w podanym obszarze zbieżności szereg powyższy jest transformatą Z ciągu $\{a^n u[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$, gdzie

$$u[n] = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } n < 0 \\ 1 & \text{jeśli } n \geq 0. \end{cases}$$

Ciąg $\left\{ \frac{-6a}{1-a^2} a^n u[n] \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ jest składową przyczynową odpowiedzi impulsowej filtru p pokazaną na rysunku 5.6.



Rysunek 5.6: Składowa przyczynowa filtru p

Drugi składnik prawej strony równania (5.79) jest transformatą Z ciągu $\{a^{-n} u[-n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ w obszarze $|z| > |a^{-1}|$ (składowa antyprzyczynowa). Obszar wspólny obu transformat $|a| < |z| < |a^{-1}|$, gdzie $a =$

-0.267949 , zawiera okrąg jednostkowy i uwzględniając trzeci składnik prawej strony równania (5.79), otrzymuje się odpowiedź impulsową filtru p

$$p[n] = \frac{-6a}{1-a^2} \left(a^n u[n] + a^{-n} u[-n] - \delta[n] \right) \quad (5.81)$$

$$= \frac{-6a}{1-a^2} a^{|n|}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.82)$$

Współczynniki filtru zanikają wykładniczo i wystarczy uwzględnić w obliczeniach tylko kilka początkowych wyrazów ciągu $p[n]$, tj. zastąpić filtr p filtrem p_L zdefiniowanym następująco

$$p_L[n] = \begin{cases} p[n] & \text{jeśli } |n| < L \\ 0 & \text{jeśli } |n| \geq L. \end{cases}$$

Znajomość współczynników filtru p umożliwia przybliżenie sygnału $f(t)$ w bazie kubicznych bazowych funkcji sklejanych $\{\beta^3(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ za pomocą wzoru

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c[n] \beta^3(t-n), \quad (5.83)$$

gdzie

$$c[n] = f * p[n], \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.84)$$

Sposoby rekurencyjne interpolacji sygnału

Są dwa sposoby rekurencyjne obliczenia współczynników rozwinięcia sygnału w bazie translacji całkowitoliczbowych kubicznych bazowych funkcji sklejanych, tj. obliczenia współczynników $c[n] = f * p[n]$.

Pierwszy sposób polega na wykorzystaniu transformaty Z filtru p w postaci danej wzorem (5.79), w którym $a = -0.267949$. Transformata Z

ciągu $c[n]$ wyraża się wzorem

$$C(z) = P(z)F(z) \quad (5.85)$$

$$= \frac{-6a}{1-a^2} \left(\frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-az} - 1 \right) F(z) \quad (5.86)$$

$$= \frac{-6a}{1-a^2} \left(\frac{1}{1-az^{-1}} F(z) + \frac{1}{1-az} F(z) - F(z) \right). \quad (5.87)$$

Oznaczmy przez $C_1(z)$ pierwszy składnik w nawiasach i przez $C_2(z)$ drugi składnik w nawiasach. Z pierwszego składnika otrzymujemy

$$C_1(z) = az^{-1}C_1(z) + F(z), \quad (5.88)$$

co daje równanie rekurencyjne

$$c_1[n] = ac_1[n-1] + f[n], \quad (5.89)$$

na podstawie którego, mając $c_1[0]$, można obliczyć $c_1[n]$ dla $n = 1, 2, \dots, N-1$. Zakładając, że przyjęto rozszerzenie sygnału jak na rysunku 5.2, przybliżoną wartość współczynnika $c_1[0]$ można obliczyć ze wzoru

$$c_1[0] = \sum_{l=0}^{L-1} p[l]f[l] = \sum_{l=0}^{L-1} a^l f[l]. \quad (5.90)$$

Drugi składnik w równaniu (5.87) daje równanie rekurencyjne

$$c_2[n] = ac_1[n+1] + f[n], \quad (5.91)$$

które umożliwia, mając $c_2[N-1]$, obliczenie $c_2[n]$ dla $n = N-2, N-3, \dots, 1, 0$. Łatwo sprawdzić, że w związku z przyjętym rozszerzeniem sygnału

$$c_2[N-1] = c_1[N-1]. \quad (5.92)$$

Ostatecznie

$$c[n] = \frac{-6a}{1-a^2} (c_1[n] + c_2[n] - f[n]). \quad (5.93)$$

Drugi sposób polega na wykorzystaniu transformaty Z filtru p w postaci następującej

$$C(z) = P(z)F(z) \quad (5.94)$$

$$= \frac{6}{z + 4 + z^{-1}} F(z) \quad (5.95)$$

$$= 6 \frac{1}{1 - az^{-1}} \frac{-a}{1 - az} F(z) \quad (5.96)$$

$$= \frac{1}{1 - az^{-1}} 6F(z) \frac{-a}{1 - az}, \quad (5.97)$$

gdzie $a = -0.267949$. Pierwszy ułamek jest transformatą Z filtru przyczynowego, któremu odpowiada równanie rekurencyjne

$$c_1[n] = ac_1[n - 1] + 6f[n], \quad n = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (5.98)$$

z warunkiem początkowym

$$c_1[0] = 6 \sum_{l=0}^{L-1} p[l]f[l] = 6 \sum_{l=0}^{L-1} a^l f[l]. \quad (5.99)$$

Drugi ułamek jest transformatą Z filtru antyprzyczynowego, któremu odpowiada równanie rekurencyjne

$$c[n] = a(c[n + 1] - c_1[n]), \quad n = N - 2, N - 3, \dots, 1, 0 \quad (5.100)$$

z warunkiem początkowym

$$c[N - 1] = \frac{6a}{1 - a^2} (c_1[N - 1] + ac_1[N - 2]). \quad (5.101)$$

5.2.2 Dylatacje całkowitoliczbowe falek kubicznych

Obliczenie ciągłej transformaty falkowej w skalach całkowitoliczbowych parzystych ze wzoru

$$Wf(t, s) = f * \psi_s(t) \quad (5.102)$$

wymaga obliczenia falki w skali $s = 2m$, gdzie $m = 1, 2, 3, \dots$. Falkę w skali $s = 2m$ można otrzymać z równania falkowego, zastępując zmienną t zmienną t/m

$$\frac{1}{\sqrt{2m}} \psi\left(\frac{t}{2m}\right) = \sum_k g[k] \phi\left(\frac{t - km}{m}\right), \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (5.103)$$

Lewa strona powyższego równania jest oznaczana jako $\psi_{2m}(t)$.

Definiując filtr „z dziurami” $g_{(m)}[k]$

$$g_{(m)}[n] = \begin{cases} g[k], & \text{jeśli } n = km \\ 0, & \text{dla pozostałych } n, \end{cases} \quad (5.104)$$

falki w skalach parzystych $2m$, $m = 1, 2, 3, \dots$ można zapisać następująco

$$\psi_{2m}(t) = \sum_n g_{(m)}[n] \phi_m(t - n), \quad (5.105)$$

gdzie $\phi_m(t)$ jest rozszerzoną m -krotnie funkcją skalującą. Filtr $g_{(m)}[n]$ powstaje z filtru $g[n]$ poprzez wstawienie pomiędzy każdą parę sąsiednich elementów filtru $g[n]$ $m - 1$ zer.

Kolejnym krokiem w konstrukcji algorytmu jest zdefiniowanie dyatacji całkowitoliczbowych funkcji skalującej $\phi_m(t)$, $m = 1, 2, 3, \dots$. W związku z interpolacją sygnału translacjami całkowitoliczbowymi bazej kubicznej funkcji sklejaney $\beta^3(t)$ i wykorzystaniu falek w postaci kubicznych funkcji sklejaney jako funkcję skalującą należy wybrać kubiczną bazową funkcję sklejaną

$$\phi(t) = \beta^3(t). \quad (5.106)$$

Zagadnienie sprowadza się zatem do zagadnienia skalowania całkowitoliczbowego bazowych funkcji sklejaney.

Dylatacje całkowitoliczbowe bazowych funkcji sklejanych

Zgodnie z definicją bazowej (przyczynowej) funkcji sklejanej zerowego rzędu (rozdział 3) całka oznaczona z tej funkcji od $-\infty$ do $+\infty$ jest równa 1. Dylatacja całkowitoliczbowa przyczynowej bazowej funkcji sklejanej z zachowaniem wartości całki oznaczonej jest opisana następująco

$$\alpha_m^0(t) = \begin{cases} 1/m & \text{jeśli } t \in [0, m) \\ 0 & \text{jeśli } t \notin [0, m). \end{cases} \quad (5.107)$$

Funkcję powyższą można zapisać w postaci kombinacji liniowej translacji całkowitoliczbowych bazowej funkcji sklejanej rzędu zerowego

$$\alpha_m^0(t) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \alpha^0(t-k). \quad (5.108)$$

Współczynniki wagowe w powyższej kombinacji liniowej są równe 1. W dalszych rozważaniach użyteczne będzie operowanie ciągiem liczbowym utworzonym ze współczynników wagowych we wzorze (5.108)

$$\alpha_m^0(t) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u_m^0[k] \alpha^0(t-k), \quad (5.109)$$

gdzie

$$u_m^0[k] = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } 0 \leq k < m \\ 0 & \text{dla pozostałych } k. \end{cases} \quad (5.110)$$

Przykładowo u_2^0 jest ciągiem $\{\dots, 0, \underline{1}, 1, 0, \dots\}$, gdzie element podkreślony ma numer 0. Dalej wyrazy tego typu ciągu równe zeru przed elementem o numerze 0 i za elementem o numerze $m-1$ nie będą pokazywane, a ciąg, dla skrócenia zapisu, będzie oznaczany jako $u_2^0 = \{\underline{1}, 1\}$.

Zgodnie z definicją bazowych funkcji sklejanych

$$\alpha^n(t) = \alpha^{n-1} * \alpha^0(t). \quad (5.111)$$

Zastępując w powyższym wzorze t przez t/m i wykorzystując definicję splotu funkcji, otrzymuje się następujący wzór dotyczący dylatacji całkowitoliczbowych bazowych funkcji sklejaných

$$\alpha_m^n(t) = \frac{1}{m} \alpha_m^{n-1} * \alpha_m^0(t). \quad (5.112)$$

Korzystając z powyższego wzoru, można wyrazić dylatacje całkowitoliczbowe funkcji bazowych wyższego rzędu za pomocą translacji całkowitoliczbowych tych funkcji. Dla przykładu wyrażmy m -tą dylatację bazowej funkcji sklejaney pierwszego rzędu za pomocą kombinacji liniowej translacji całkowitoliczbowych tej funkcji. Zgodnie z (5.112) i (5.109)

$$\begin{aligned} \alpha_m^1(t) &= \frac{1}{m} \alpha_m^0 * \alpha_m^0(t) \\ &= \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i u_m^0[i] \alpha^0(\tau - i) \sum_k u_m^0[k] \alpha^0(t - \tau - k) d\tau \\ &= \frac{1}{m} \sum_i \sum_k u_m^0[i] u_m^0[k] \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^0(\tau - i) \alpha^0(t - k - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Wprowadzając nową zmienną $n = i + k$, ostatnią podwójną sumę można wyrazić za pomocą jednej sumy i splotu ciągów

$$\alpha_m^1(t) = \frac{1}{m} \sum_n u_m^0 * u_m^0[n] \alpha^1(t - n). \quad (5.113)$$

Powyższe rozwinięcie można zapisać w postaci

$$\alpha_m^1(t) = \frac{1}{m} \sum_n u_m^1[n] \alpha^1(t - n), \quad (5.114)$$

gdzie

$$u_m^1[n] = u_m^0 * u_m^0[n]. \quad (5.115)$$

Dla na przykład $m = 2$, $u_2^1 = \{\underline{1}, 1\} * \{\underline{1}, 1\} = \{\underline{1}, 2, 1\}$.

W analogiczny sposób jak wyżej można pokazać, że

$$\alpha_m^2(t) = \frac{1}{m^2} \sum_n u_m^1 * u_m^0[n] \alpha^2(t - n), \quad (5.116)$$

czyli że

$$\alpha_m^2(t) = \frac{1}{m^2} \sum_n u_m^2[n] \alpha^2(t-n), \quad (5.117)$$

gdzie

$$u_m^2[n] = u_m^1 * u_m^0[n] = u_m^0 * u_m^0 * u_m^0[n]. \quad (5.118)$$

Dla na przykład $m = 2$, $u_2^2 = \{1, 2, 1\} * \{1, 1\} = \{1, 3, 3, 1\}$.

Dylatację całkowitoliczbową kubicznej (przyczynowej) bazowej funkcji sklejanej wyraża wzór

$$\alpha_m^3(t) = \frac{1}{m^3} \sum_n u_m^2 * u_m^0[n] \alpha^3(t-n), \quad (5.119)$$

czyli że

$$\alpha_m^3(t) = \frac{1}{m^3} \sum_n u_m^3[n] \alpha^3(t-n), \quad (5.120)$$

gdzie

$$u_m^3[n] = u_m^2 * u_m^0[n] = u_m^0 * u_m^0 * u_m^0 * u_m^0[n]. \quad (5.121)$$

Dla na przykład $m = 2$, $u_2^3 = \{1, 3, 3, 1\} * \{1, 1\} = \{1, 4, 6, 4, 1\}$.

Rozwinięcie

$$\alpha_m^3(t) = \frac{1}{m^3} \sum_n u_m^0 * u_m^0 * u_m^0 * u_m^0[n] \alpha^3(t-n) \quad (5.122)$$

ma duże znaczenie praktyczne w kontekście obliczania spłotu sygnału z przeskalowaną kubiczną funkcją sklejaną. Widać z niego, że spłot sygnału z dylatacją całkowitoliczbową kubicznej bazowej funkcji sklejanej może być zastąpiony czterema spłotami sygnału z przyczynowymi filtrami uśredniającymi u_m^0 . Filtrację sygnału czasu dyskretnego $f[n]$ filtrem $u_m^0[n]$ opisuje wzór

$$y[n] = f * u_m^0[n] = \sum_{k=0}^{m-1} f[n-k]. \quad (5.123)$$

Przekształcając ten wzór w sposób następujący

$$y[n] = \sum_{k=-1}^{m-2} f[n-1-k] \quad (5.124)$$

$$= f[n] + \sum_{k=0}^{m-1} f[n-1-k] - f[n-m] \quad (5.125)$$

$$= y[n-1] + f[n] - f[n-m], \quad (5.126)$$

otrzymujemy postać rekurencyjną filtracji, z której wynika, że do obliczenia jednej próbki wymagane jest jedno dodawanie i jedno odejmowanie. Wykorzystanie tego wzoru wymaga znajomości wartości pierwszej próbki sygnału $y[0]$. Jeżeli sygnał $f[n]$ rozpoczyna się od ciągu zer o długości co najmniej m , to $y[0] = 0$.

Filtracja sygnału $f[n]$ filtrem przyczynowym $u_m^0[n]$ wprowadza przesunięcie fazowe sygnału. Przesunięcie to może być w łatwy sposób obliczone.

Założmy, że filtr uśredniający $u_m^0[n]$ ma nieparzystą liczbę współczynników, przy czym $m = 2[(m-1)/2] + 1$. Filtr taki można przesunąć w lewo o $(m-1)/2$ próbek. Tak przesunięty filtr ma symetryczną względem zera odpowiedź impulsową i nie wprowadza przesunięcia fazowego sygnału. Zatem filtr przyczynowy $u_m^0[n]$, gdzie m jest liczbą nieparzystą, przesuwa sygnał w prawo o $(m-1)/2$ próbek. Ponieważ spłot z dylatacją kubicznej funkcji sklejaney wymaga czterech filtracji filtrem $u_m^0[n]$, więc całkowite przesunięcie sygnału wynosi $2(m-1)$ próbek.

W drugim przypadku, tj. gdy liczba współczynników filtru $u_m^0[n]$ jest parzysta, można rozważyć dwie podwójne filtracje, tj.

$$x[n] = (u_m^0 * u_m^0) * f[n] \quad (5.127)$$

i

$$y[n] = (u_m^0 * u_m^0) * x[n]. \quad (5.128)$$

Filtr $u_m^0 * u_m^0[n]$ ma nieparzystą liczbę współczynników równą $m+m-1 = 2(m-1)+1$. Współczynniki filtru można przesunąć w lewo o $m-1$ próbek, otrzymując filtr symetryczny w zerze, który nie przesuwają sygnału. Zatem w wyniku dwukrotnej filtracji podwójnym filtrem przyczynowym $u_m^0 * u_m^0[n]$ sygnał zostanie przesunięty w prawo o $2(m-1)$. Z powyższych rozważań wynika, że niezależnie od tego, czy liczba współczynników filtru $u_m^0[n]$ jest parzysta, czy nieparzysta, po czterokrotnej filtracji sygnał zostanie przesunięty w prawo o $2(m-1)$ próbek.

5.2.3 Ciągła transformata falkowa w przestrzeni kubicznych funkcji sklejanых

Zgodnie z definicją ciągła transformata falkowa w skali s i w punkcie $\tau = t$ sygnału $f(\tau)$ i falki $\psi_s(\tau)$ jest równa

$$Wf(t, s) = f * \bar{\psi}_s(t), \quad (5.129)$$

gdzie $\bar{\psi}_s(\tau) = \psi_s(-\tau)$.

Niech $\tilde{f}(\tau)$ będzie interpolacją kubiczną sygnału $f(\tau)$ w bazie $\{\beta^3(\tau - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, tj.

$$\tilde{f}(\tau) = \sum_k c[k] \beta^3(\tau - k). \quad (5.130)$$

Sposób obliczenia współczynników $c[k]$ podany został w punkcie 5.2.1.

Przyjmując jako funkcję skalującą bazową kubiczną funkcję sklejaną i odkładając zagadnienie korekty przesunięć fazowych wprowadzanych przez filtry przyczynowe do końcowego kroku algorytmu, na podstawie wyników podpunktu 5.2.2 możemy zapisać

$$\phi_m(t) = \beta_m^3(t) = \frac{1}{m^3} \sum_i u_m^3[i] \beta^3(t - i) \quad (5.131)$$

i

$$\psi_{2m}(t) = \frac{1}{m^3} \sum_k g_{(m)}[k] \sum_i u_m^3[i] \beta^3(t - k - i) \quad (5.132)$$

$$= \frac{1}{m^3} \sum_n g_{(m)} * u_m^3[n] \beta^3(t - n) \quad (5.133)$$

$$= \sum_n q_m[n] \beta^3(t - n), \quad (5.134)$$

gdzie

$$q_m[n] = \frac{1}{m^3} g_{(m)} * u_m^3[n]. \quad (5.135)$$

Ponieważ $\bar{\psi}_{2m}(\tau) = \psi_{2m}(-\tau)$, więc wprowadzając oznaczenie $\bar{q}[n] = q[-n]$, otrzymujemy

$$\bar{\psi}_{2m}(\tau) = \sum_i q_m[i] \beta^3(-\tau - i) \quad (5.136)$$

$$= \sum_i q_m[-i] \beta^3(-\tau + i) \quad (5.137)$$

$$= \sum_i \bar{q}_m[i] \beta^3(-(\tau - i)) \quad (5.138)$$

$$= \sum_i \bar{q}_m[i] \beta^3(\tau - i). \quad (5.139)$$

$$W\tilde{f}(t, 2m) = \tilde{f} * \bar{\psi}_{2m}(t) \quad (5.140)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_k c[k] \beta^3(\tau - k) \sum_i \bar{q}_m[i] \beta^3(t - \tau - i) d\tau$$

$$= \sum_k \sum_i c[k] \bar{q}_m[i] \int_{-\infty}^{+\infty} \beta^3(\tau - k) \beta^3(t - \tau - i) d\tau$$

$$= \sum_k \sum_i c[k] \bar{q}_m[i] \int_{-\infty}^{+\infty} \beta^3(\tau) \beta^3(t - \tau - i - k) d\tau$$

$$= \sum_p \sum_k c[k] \bar{q}_m[p - k] \int_{-\infty}^{+\infty} \beta^3(\tau) \beta^3(t - p - \tau) d\tau$$

$$= \sum_p c * \bar{q}_m[p] \beta^3 * \beta^3(t - p). \quad (5.141)$$

Wykorzystując tożsamość $\beta^k * \beta^l(t) = \beta^{k+l+1}$ oraz uwzględniając (5.135), otrzymujemy

$$W\tilde{f}(t, 2m) = \frac{1}{m^3} \sum_p c * \bar{g}_{(m)} * \bar{u}_m^3[p] \beta^7(t - p). \quad (5.142)$$

Niech $t = n$, $n \in \mathbb{Z}$, wówczas

$$W\tilde{f}(n, 2m) = \frac{1}{m^3} \sum_p c * \bar{g}_{(m)} * \bar{u}_m^3[p] b^7[n - p] \quad (5.143)$$

$$= \frac{1}{m^3} c * \bar{g}_{(m)} * \bar{u}_m^3[p] * b^7[n], \quad (5.144)$$

gdzie

$$b^7[n] = \beta^7(n). \quad (5.145)$$

Wartości współczynników ciągu $b^7[n]$ pokazane są w tabelicy 5.3.

Tablica 5.3: Wartości niezerowych współczynników filtra b^7

$ n $	0	1	2	3
$b^7[n]$	$\frac{2416}{5040}$	$\frac{1191}{5040}$	$\frac{120}{5040}$	$\frac{1}{5040}$

Proces obliczania współczynników falkowych

$$d_{2m}[n] = W\tilde{f}(n, 2m) \quad (5.146)$$

można rozbić na kilka etapów, opisanych poniżej.

- Obliczyć ciąg współczynników $c[n]$ interpolacji sygnału $f(t)$ w bazie $\{\beta(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, tj. $\tilde{f}(t) = \sum_n c[n] \beta^3(t - n)$. Szybkie algorytmy obliczania współczynników $c[n]$ opisane są w punkcie 5.2.1.
- Obliczyć ciąg pomocniczy $v[n] = c * b^7[n]$ jako wynik filtracji ciągu $c[n]$ filtrem $b^7[n]$, który jest filtrem symetrycznym o skończonej i krótkiej odpowiedzi impulsowej podanej w tabelicy 5.3.

- Obliczyć pomocniczy ciąg $r[n] = \bar{u}_m^3 * v[n]$, stosując szybki algorytm opisany w punkcie 5.2.2, tj. według schematu $r[n] = \bar{u}_m^0 * (\bar{u}_m^0 * (\bar{u}_m^0 * (\bar{u}_m^0 * (\bar{u}_m^0 * v[n])))$.
- Obliczyć ciąg współczynników falkowych $d_{2m}[n] = \frac{1}{m^3} r * \bar{g}_{(m)}[n]$, czyli przefiltrować ciąg $r[n]$ filtrem z „dziurami” $\bar{g}_{(m)}[n]$, który powstaje z filtru falkowego $g[n]$ poprzez wstawienie pomiędzy każdą sąsiadującą parę współczynników filtru $g[n]$ $m - 1$ zer.
- Przeprowadzić korektę fazową współczynników falkowych poprzez przesunięcie ciągu $d_{2m}[n]$ cyklicznie w prawo o $2(m - 1)$ pozycji plus przesunięcie wprowadzane przez filtr $\bar{g}_{(m)}[n]$.

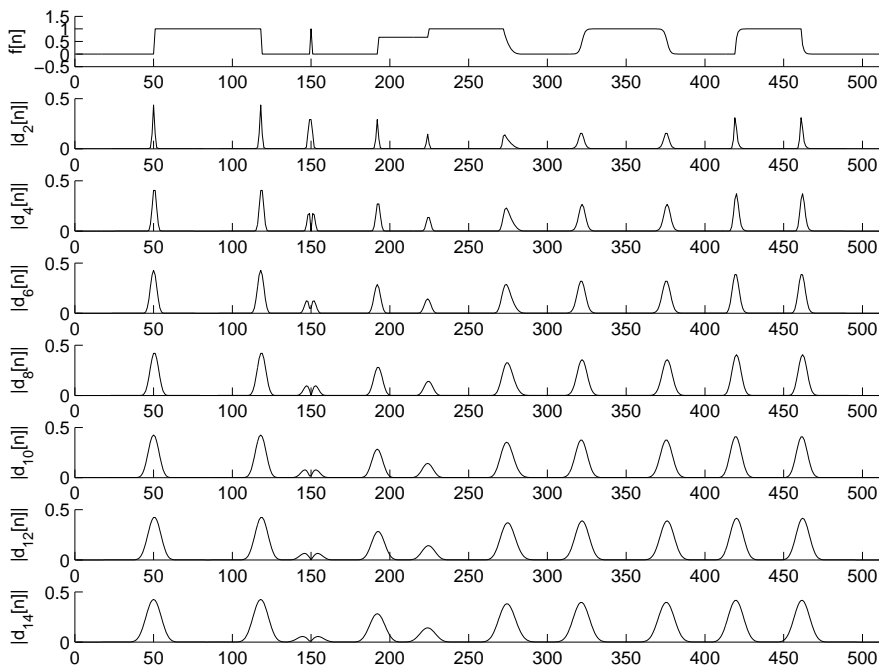
5.2.4 Przykłady obliczeniowe ciągłej transformaty falkowej w skalach parzystych

Poniżej zamieszczono wyniki dwóch przykładów obliczania ciągłej transformaty falkowej sygnału sztucznego o długości 512 próbek zawierającego różnego rodzaju zbocza. Pierwsze dwa zbocza to zbocze narastające i opadające impulsu prostokątnego. Następne zbocze jest „szpilką”, tj. deltą Diraca. Kolejne dwa zbocza są stromymi zboczami narastającymi. Następujące po nich są zboczami kubycznymi. Przedostatnie zbocze jest zboczem signomodalnym, a ostatnie wykładniczym. Aby uniknąć nieciągłości na końcach sygnału, sygnał został „odbity lustrzanie” i potraktowany jako okresowy, co ilustruje rysunek 5.2 [20].

Przykład 1

Na rysunku 5.7 pokazano wykresy ciągłej transformaty falkowej omówionego wyżej sygnału w skalach 2, 4, 6, 8, 10, 12. Transformaty były obliczone z wykorzystaniem falki w postaci pierwszej pochodnej bazowej

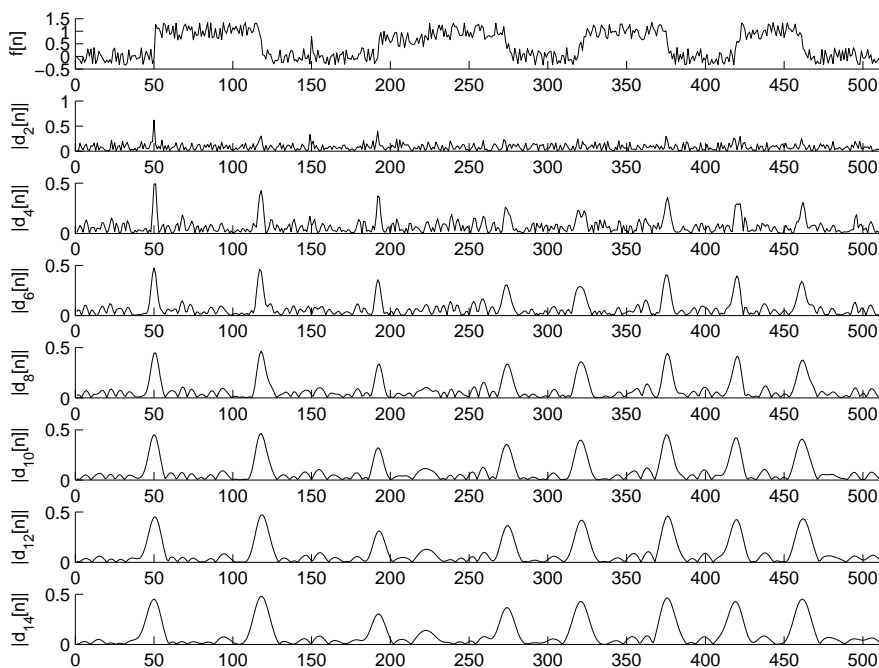
funkcji sklejanej rzędu czwartego. Ponieważ falka jest pierwszą pochodną funkcji wygładzającej, to zboczom sygnału odpowiadają lokalne maksima modułów transformaty falkowej $d_k[n]$. Filtr cyfrowy stowarzyszony z użytą falką nie jest symetryczny ani antysymetryczny w zerze i dlatego współczynniki falkowe są przesunięte w fazie w stosunku do sygnału; na rysunku pokazano współczynniki falkowe po odpowiedniej korekcji fazowej. Ciągła transformata falkowa w wielu skalach pozwala identyfikować i lokalizować zbocza sygnału.



Rysunek 5.7: Moduły ciągłej transformaty falkowej sygnału sztucznego w skalach 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14: maksima modułu transformaty odpowiadające zboczom sygnału; falka w postaci pierwszej pochodnej bazowej funkcji sklejanej rzędu czwartego

Przykład 2

Przykład ten (rysunek 5.8) dotyczy sygnału z przykładu 1 dodatkowo zaszumionego. Transformaty zostały obliczone w tych samych skalach i z wykorzystaniem tej samej falki jak w przykładzie 1. Ciągła transformata falkowa w wielu skalach pozwala identyfikować zbocza w dużych skalach i ułatwia ich lokalizację w małych skalach.



Rysunek 5.8: Moduły ciągłej transformaty falkowej sztucznego sygnału zaszumionego w skalach 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14: maksima modułu transformaty odpowiadające zboczom sygnału; falka ma postać pierwszej pochodnej bazowej funkcji sklejaney rzędu czwartego

5.3 Obliczanie ciągłej transformaty falkowej za pomocą FFT

Ciągła transformata falkowa może być obliczona za pośrednictwem przekształceń Fouriera. Zgodnie z (5.3) ciągła transformata falkowa w skali s jest splotem sygnału i przeskalowanej do skali s falki rewersyjnej. Splotowi sygnałów w dziedzinie czasu odpowiada iloczyn transformat Fouriera w dziedzinie częstotliwości, czyli

$$\mathcal{F}\{Wf(t, s)\} = F(\omega) \Psi_s^*(\omega), \quad (5.147)$$

gdzie $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(\tau)\}$, $\Psi_s^*(\omega) = \mathcal{F}\{\bar{\psi}_s(\tau)\}$, skąd

$$Wf(t, s) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega) \Psi_s^*(\omega)\}. \quad (5.148)$$

Najczęściej mamy do czynienia nie z sygnałem czasu ciągłego $f(t)$, ale z sygnałem zdyskretyzowanym w skończonym przedziale czasu $f[n]$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$ ². W takim przypadku przybliżoną wartość ciągłej transformaty falkowej możemy obliczyć za pośrednictwem dyskretnej transformaty Fouriera.

Założmy, że nośnikiem falki $\psi(t)$ jest przedział $[K1, K2]$. Nośnikiem przeskalowanej falki $\psi_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t}{s}\right)$, $s > 0$ jest wówczas przedział $[sK1, sK2]$. Zakres skal $s_{min} \leq s \leq s_{max}$, dla których można obliczać transformaty falkowe w przypadku falek o zwartym nośniku, można wyznaczyć w sposób następujący. Liczba próbek $\psi[n]$ w przedziale $[K1, K2]$ może być niewystarczająca dla reprezentowania falki $\psi(t)$ i najczęściej przyjmuje się $s_{min} = 2$, gdyż w tym przypadku nośnikiem falki $\psi_2(t)$

²Domyślnie przyjęto, że dyskretyzacji dokonano w przedziale czasu $[0, N]$ z krokiem $\Delta T = 1$. Jeżeli przetwarzany sygnał $\check{f}(t)$ określony jest w przedziale $[a, b]$ i został zdyskretyzowany z krokiem ΔT , to sygnał należy wstępnie przeskalować i przesunąć tak, żeby otrzymać sygnał $f[n]$ określony jak wyżej.

jest przedział $[2K1, 2K2]$ i liczba próbek $\psi_2[n]$, przy dyskretyzacji falki z takim samym krokiem, z jakim zdyskretyzowany został sygnał, jest wystarczająca do reprezentowania falki $\psi_2(t)$. Skala maksymalna ograniczona jest szerokością nośnika falki $\psi_{s_{max}}(t)$, którym jest przedział $[s_{max}K1, s_{max}K2]$, gdyż powinien być spełniony warunek $s_{max}(K2 - K1) \leq N$.

Schemat postępowania przy obliczaniu ciągłej transformaty falkowej za pośrednictwem dyskretnych przekształceń Fouriera może być następujący:

- Obliczyć reprezentację dyskretną falki z krokiem $\Delta T = 1$:

$$\psi_s[n] = \psi_s(n), \quad n = L1, L1 + 1, \dots, L2 - 1, L2, \quad (5.149)$$

gdzie $L1 = \lfloor sK1 \rfloor$, $L2 = \lfloor sK2 \rfloor$.

- Ustalić liczbę punktów dyskretnych transformat Fouriera. Przy założeniu, że sygnał $f[n]$ określony jest dla $0 \leq n < M$ (długość sygnału M próbek) i że falka dyskretna ma długość $L2 - L1 + 1$ próbek, liczba punktów transformat musi spełniać nierówność:

$$N \geq M + L2 - L1. \quad (5.150)$$

Jeżeli dyskretne transformaty Fouriera będą obliczane za pomocą algorytmów FFT, na przykład algorytmu radix-2, to dodatkowo N musi być potęgą dwójki.

- Utworzyć ciąg $a[n]$, $0 \leq n < N$ według wzoru:

$$a[n] = \begin{cases} f[n] & \text{jeśli } 0 \leq n < M \\ 0 & \text{jeśli } M \leq n < N. \end{cases}$$

Obliczyć N -punktową dyskretną transformatę Fouriera ciągu $a[n]$, $0 \leq n < N$:

$$A[k] = DFT\{a[n]\}, \quad 0 \leq k < N. \quad (5.151)$$

- Utworzyć ciąg $b[n]$, $0 \leq n < N$ według wzoru:

$$b[n] = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } 0 \leq n < N/2 + L1 \\ \psi_s[n - N/2] & \text{jeśli } N/2 + L1 \leq n \leq N/2 + L2 \\ 0 & \text{jeśli } N/2 + L2 < n < N. \end{cases} .$$

Obliczyć N -punktową dyskretną transformatę Fouriera ciągu $b[n]$, $0 \leq n < N$:

$$B[k] = DFT\{b[n]\}, \quad 0 \leq k < N. \quad (5.152)$$

- Obliczyć ciąg $C[k]$, $0 \leq k < N$

$$C[k] = A[k] B^*[k], \quad 0 \leq k < N. \quad (5.153)$$

Obliczyć N -punktową odwrotną dyskretną transformatę Fouriera ciągu $C[k]$:

$$c[n] = IDFT\{C[k]\}, \quad 0 \leq n < N. \quad (5.154)$$

Przesunąć cyklicznie w lewo o $N/2$ próbek ciąg $\{c[n]\}_{0 \leq n < N}$, który (po przesunięciu) jest wersją dyskretną ciągłej transformaty falkowej.

Złożoność obliczeniowa opisanej metody obliczania ciągłej transformaty falkowej, przy założeniu wykorzystania do obliczania dyskretnych transformat Fouriera szybkich algorytmów (FFT), jest rzędu $O(N \log_2 N)$.

W przypadku długich sygnałów, dla których utrudnione jest obliczanie dyskretnych transformat Fouriera całego sygnału, obliczenia można przeprowadzić, dzieląc sygnał na bloki i stosując na przykład metodę *nakładania z dodawaniem* (ang. *overlap-add*) splotu sygnałów [33] [26] [14].

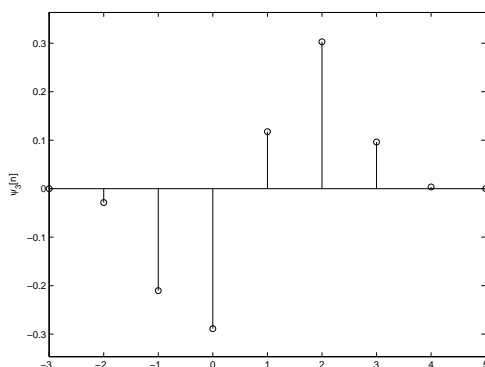
Poniżej podano wyniki dwóch przykładów obliczeniowych wspomagających detekcję zboczy sygnału z wykorzystaniem ciągłej transformaty falkowej i dyskretnych przekształceń falkowych.

Przykład 1

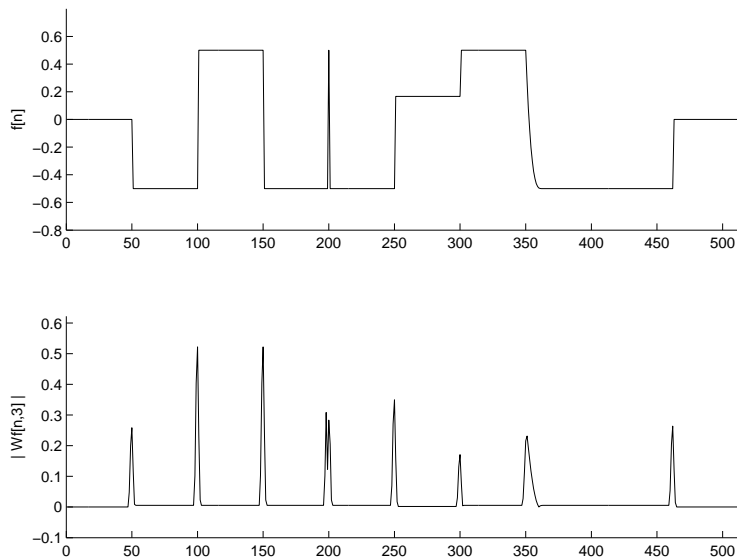
Przykład ten ilustruje wspomaganie detekcji zboczy sygnału metodą maksimum modułu (ang. *modulus maxima*) ciągłej transformaty falkowej. Jako falkę wybrano falkę kubiczną w postaci pierwszej pochodnej bazowej funkcji sklejaney czwartego rzędu, opisaną wzorem:

$$\psi(t) = -\beta^3(2t) + \beta^3(2t - 1), \quad (5.155)$$

gdzie $\beta^3(t)$ - bazowa kubiczna (symetryczna) funkcja sklejana. Nośnikiem falki jest przedział $[-1, 1, 5]$, a jej wersji przeskalowanej do skali $s = 3$ przedział $[-3, 4, 5]$. Wersję dyskretną falki w skali $s = 3$ pokazano na rysunku 5.9. Za pomocą algorytmu FFT obliczono 512-punktowe dyskretne transformaty Fouriera falki w skali $s = 3$, sygnału $f[n]$ pokazanego na rysunku 5.10, oraz odwrotną transformatę Fouriera iloczynu transformaty falki i sygnału. Wynik w postaci wersji dyskretny modułu ciągłej transformaty falkowej $|Wf[n, 3]|$ pokazano na rysunku 5.10. Ponieważ falka jest pierwszą pochodną bazowej funkcji sklejaney rzędu czwartego, którą można wykorzystać jako funkcję wygładzającą, zatem zbocza sygnału odpowiadają maksimum modułu ciągłej transformaty falkowej.



Rysunek 5.9: Falka kubiczna w postaci pierwszej pochodnej bazowej funkcji sklejaney rzędu czwartego w skali $s = 3$ po dyskretyzacji



Rysunek 5.10: Przykładowy sygnał (na górze) i moduł transformaty falkowej z falką w postaci pierwszej pochodnej bazowej funkcji sklejaney rzędu czwartego w skali $s = 3$ obliczony za pomocą algorytmu FFT (na dole)

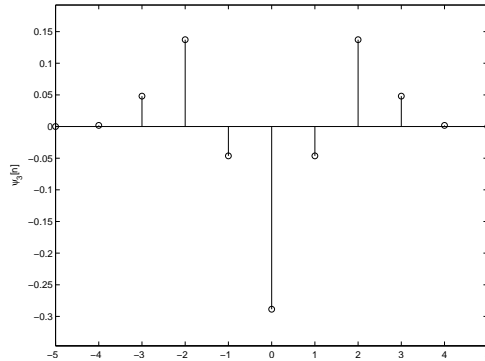
Przykład 2

Przykład ten ilustruje wspomaganie detekcji zboczy sygnału metodą zerowania się (ang. *zero-crossings*) ciągłej transformaty falkowej. Jako falkę wybrano falkę kubiczną w postaci drugiej pochodnej bazowej funkcji sklejaney piątego rzędu, opisaną wzorem:

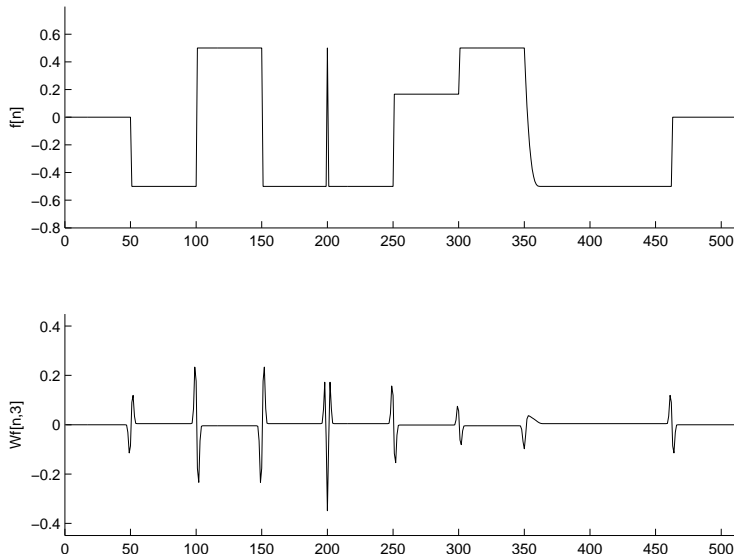
$$\psi(t) = \frac{1}{2} \beta^3(2t + 1) - \beta^3(2t) + \frac{1}{2} \beta^3(2t - 1). \quad (5.156)$$

Nośnikiem falki jest przedział $[-1, 5, 1, 5]$, a jej wersji przeskalowanej do skali $s = 3$ przedział $[-4, 5, 4, 5]$. Wersję dyskretną falki w skali $s = 3$ pokazano na rysunku 5.11. Obliczono dyskretne transformaty Fouriera analogiczne do tych z przykładu 1. Wynik w postaci wersji dyskretny ciągłej transformaty falkowej $Wf[n, 3]$ pokazano na rysunku 5.12. Ponieważ falka jest drugą pochodną bazowej funkcji sklejaney rzędu piątego,

którą można wykorzystać jako funkcję wygładzającą, to zbrocza sygnału odpowiadają miejscom zerowym ciągłej transformaty falkowej.



Rysunek 5.11: Falka kubiczna w postaci drugiej pochodnej bazowej funkcji sklejanej rzędu piątego w skali $s = 3$ po dyskretyzacji



Rysunek 5.12: Przykładowy sygnał (na górze) i transformata falkowa z falką w postaci drugiej pochodnej bazowej funkcji sklejanej rzędu piątego w skali $s = 3$ obliczony za pomocą algorytmu FFT (na dole)

Bibliografia

- [1] M. Antonini, M. Barlaud, P. Mathieu, and I. Daubechies. Image coding using wavelet transform. *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 2(1), April 1992, pp. 205-220.
- [2] J. T. Białasiewicz. *Falki i aproksymacje*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 2000.
- [3] A. Cohen, I. Daubechies, and J.-C. Feauveau. Biorthogonal Bases of Compactly Supported Wavelets. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 45, 1992, pp. 485-560.
- [4] I. Daubechies. Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 41, 1988, pp. 909-996.
- [5] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, 1992.
- [6] D. Esteban and C. Galan. Application of quadrature mirror filters to split band voice coding schemes. In *Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, Signal Processing*, pp. 191-195, Hartford, Connecticut, USA, 1977.

- [7] A. Grossmann and J. Morlet. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM J. MATH. ANAL.*, Vol. 15, No. 4, July 1984.
- [8] M. Holschneider, R. Kronland-Martinet, J. Morlet, and P. Tchamitchian. A real-time algorithm for signal analysis with help of the wavelet transform. In *Wavelets, Time-Frequency Methods and Phase Space*, Springer-Verlag, 1989.
- [9] D. Le Gall and Tabatabai A. Subband coding of digital images using symmetric short kernel filters and arithmetic coding techniques. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Volume 2*, pp. 761-765, New York, USA, April 1988.
- [10] R. G. Lyons. *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 1999.
- [11] S. Mallat. A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 11, No. 7, July 1989, pp. 674-693.
- [12] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing: The Sparse Way, Third Edition*. Academic Press, 2009.
- [13] Y. Meyer. Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algèbres d'opérateurs. In *Seminaire Bourbaki, 1985/86 (662): 209-223*. 1987.
- [14] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer. *Discrete-Time Signal Processing*. Pearson, 2010.
- [15] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and S. H. Nawab. *Signals and Systems*. Prentice-Hall International, Inc., 2/E, 1997.

-
- [16] W. Rakowski. Application of cubic box spline wavelets in the analysis of signal singularities. *Int J Appl Math Comput Sci*, 2015;25:927–941.
- [17] W. Rakowski. Wavelet Approach to Damage Detection of Mechanical systems and Structures. *Procedia Engineering* 182 (2017) 594–601.
- [18] W. Rakowski. *Metody falkowe kompresji obrazów z obszarami zainteresowania*. Rozprawy Naukowe Nr 99, Wydawnictwo Politechniki Białostockiej, Białystok, 2002.
- [19] W. Rakowski. A proof of the necessary condition for perfect reconstruction of signals using the two-channel wavelet filter bank. *Bulletin of the Polish Academy of Science, Technical Science*, Vol. 51, No. 1, pp. 14-23, 2003.
- [20] W. Rakowski. Prefiltering in wavelet analysis applying cubic B-splines. *Int. Journal of Electronics and Telecommunications*, Vol. 60, No. 4, pp. 331-340, 2014.
- [21] S. Rapuano and F. J. Harris. An introduction to fft and time domain windows. *IEEE Instrumentation and Measurement Magazine*, December 2007, pp. 32-44.
- [22] W. Rudin. *Podstawy analizy matematycznej*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2012.
- [23] I. W. Selesnick. Short-time fourier transform and its inverse. 2009. <http://eeweb.poly.edu/iselesni/EL713/STFT/stft-inverse.pdf>.

- [24] M. J. Shensa. The discrete wavelet transform: Wedding the a trous and mallat algorithms. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 40, no. 10, pp. 2464-2482, 1992.
- [25] M. J. T. Smith and T. P. Barnwell III. Exact reconstruction techniques for tree-structured subband coders. *IEEE Trans. on ASSP*, Vol. 34, 1986, pp. 434-441.
- [26] S. W. Smith. *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów - Praktyczny poradnik dla inżynierów i naukowców*. Wydawnictwo BTC, Warszawa, 2007.
- [27] G. Strang and T. Nguyen. *Wavelets and Filter Banks*. Wellesley - Cambridge Press, 1996.
- [28] J. Szabatin. *Podstawy teorii sygnałów*. WKŁ Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2000.
- [29] M. Unser, A. Aldroubi, and M. Eden. B-spline signal processing: Part i - theory. *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 41, No. 2, pp. 821-833, 1993.
- [30] M. Unser and T. Blu. Mathematical properties of the JPEG 2000 wavelet filters. *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 12, no. 9, pp. 1080-1090, 2003.
- [31] M. Vetterli and J. Kovacević. *Wavelets and Subband Coding*. Prentice Hall PTR, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.
- [32] P. Wojtaszczyk. *Teoria falek*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2000.
- [33] T. P. Zieliński. *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów - Od teorii do zastosowań*. WKŁ Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2005.

Indeks

- algorytm
 - à trous*, 162
 - kaskadowy, 130
- analiza wieloskalowa, 15, 65
- banki filtrów biortogonalnych, 103
- banki filtrów ortogonalnych, 92
- baza
 - ortonormalna, 26, 30
 - przestrzeni, 26
- bazowa funkcja sklejana, 152
- bazowa kubiczna funkcja sklejana, 154
- bazy biortogonalne, 32
- ciągła transformata falkowa, 159
- ciągłe przekształcenie falkowe, 13
- delta Diraca, 40
 - właściwość filtracji, 41
- delta Kroneckera, 42
- detekcja zboczy sygnału, 166
- diadyczna transformata falkowa, 160
- dyskretna transformata falkowa, 18, 92
- dyskretna transformata Fouriera, 48
- dyskretne przekształcenie falkowe, 92
- falka, 11
 - Haara, 73
 - kapelusz meksykański, 150
 - kubiczna, 155, 157
 - Morleta, 12
 - ortogonalna, 81
 - o zwartym nośniku, 125
- falki biortogonalne, 97
- filtry kwadraturowe odmienione, 95
- filtry lustrzane kwadraturowe, 95
- funkcja skalująca, 78
 - ortogonalna, 84
- funkcje sklejane, 152
- iloczyn skalarny
 - ciągów, 22
 - funkcji, 22

- nośnik zwarty, 62
- norma
 - ciagu, 23
 - funkcji, 22
- odwrotna transformata Fouriera, 36, 49
- okienkowanie sygnału, 56
- okienkowe przekształcenie Fouriera, 56
- przekształcenie falkowe, 115
- równanie
 - dylatacyjne, 78, 86
 - falkowe, 79
- równość Parsewala, 36
- reprezentacja falkowa sygnału, 80
- reprezentacja wieloskalowa sygnału, 75
- rozdzielczość, 65
- rozpięcie, 28, 33
- skala, 65
- spektrogram, 59
- splot
 - ciągów, 41
 - funkcji, 39
 - kołowy, 50, 51
- szereg falkowy, 14, 75
- szybkie biortogonalne przekształcenie falkowe, 96
- szybkie ortogonalne przekształcenie falkowe, 87, 91
- transformata
 - falkowa, 115
 - Fouriera, 35
- warunek biortogonalności, 29
- warunki doskonałej rekonstrukcji sygnału, 94, 98
- wielomian Hermite'a, 148
- zasada nieoznaczoności, 38, 118
- znikające momenty, 120

Streszczenie

W książce omówiono przekształcenia falkowe w ujęciu algorytmicznym ze szczególnym uwzględnieniem aspektów obliczeniowych w przetwarzaniu sygnałów. Ujęcie materiału adresowane jest głównie do inżynierów zajmujących się przetwarzaniem sygnałów, ale starano się zachować ścisłość matematyczną wymaganą przez osoby zainteresowane matematyką stosowaną, do której teoria falek należy.

Implementacje metod falkowych przetwarzania sygnałów wykorzystują klasyczne algorytmy cyfrowego przetwarzania sygnałów takie jak filtracja sygnałów. Konstrukcja i właściwości falkowych filtrów cyfrowych wynikają z koncepcji aproksymacji wieloskalowej sygnałów czasu ciągłego o skończonej energii i dlatego, dla wyjaśnienia właściwości przekształceń falkowych, niezbędne było przedstawienie stosownego aparatu matematycznego.

W książce zamieszczono omówienie podstaw matematycznych metod falkowych, w szczególności aproksymacji sygnałów za pomocą baz ortogonalnych, baz biortogonalnych i rozpięć. Przytoczono wybrane przekształcenia Fouriera i związane z nimi metody obliczeniowe. Wyjaśniono w sposób nieformalny analizę wieloskalową sygnałów oraz podano ujęcie aksjomatyczne analizy wieloskalowej. Pokazano algorytmy szybkich przekształceń falkowych oraz ich implementacje za pomocą banków filtrów cyfrowych. Przedstawiono konstrukcję i właściwości podstawowych falek takich jak falki o zwartym nośniku, falki jako pochodne funkcji Gaussa i falki w postaci funkcji sklejaných. Opisano ciągłą transformatę falkową i jej szybkie algorytmy obliczeniowe. Pokazano wykorzystanie ciągłej transformaty falkowej do detekcji zbroczy sygnałów. Wybrane algorytmy przedstawiono w postaci programów w środowisku obliczeniowym MATLAB.

Summary

This book describes an algorithmic approach to wavelet transforms with particular emphasis on computational aspects of wavelet transforms in signal processing. The book is intended for engineers working in the subject of digital signal processing as well as for persons interested in applied mathematics to which the wavelet theory belongs.

Implementations of wavelet methods of signal processing use classic digital signal processing algorithms such as signal filtration. The design and properties of wavelet digital filters result from the concept of multi-scale approximation of continuous time signals of finite energy, and therefore, to explain the properties of wavelet transforms, it was necessary to describe an appropriate mathematical apparatus.

The book includes a discussion of the mathematical foundations of wavelet methods, in particular approximation of signals by means of orthogonal bases, biorthogonal bases and frames. Selected Fourier transforms and associated calculation methods are quoted. Multiscale analysis of signals is explained in layman's terms and an axiomatic approach to multiscale analysis is presented. The construction and properties of basic wavelets such as compactly supported wavelets, wavelets as derivatives of the Gaussian function and spline wavelets are described. The continuous wavelet transform and its fast calculation algorithms are described. An application of the continuous wavelet transform for signal edge detection is shown. Selected algorithms are presented as programs in the MATLAB computing environment.

