

# MECHANIKA LOTU ŚMIGŁOWCÓW

Wiesław Łucjanek  
Krzysztof Sibilski  
Andrzej Żyłuk  
Krzysztof Cur  
Mirośław Kowalski  
Paweł Szczepaniak  
Paweł Stężycki



---

WYDAWNICTWO INSTYTUTU TECHNICZNEGO WOJSK LOTNICZYCH

WARSZAWA 2023

## RECENZENCI

*dr hab. inż. Andrzej Majka, prof. Politechniki Rzeszowskiej*  
*dr hab. inż. Stanisław Kachel, prof. WAT*

## REDAKCJA TECHNICZNA

*mgr inż. Krzysztof Bubrzyk*

## ADIUSTACJA I KOREKTA

*mgr Magdalena Malczewska*  
*mgr Wioletta Gramek*

## OPRACOWANIE GRAFICZNE

*Tomasz Grochowski*

## ŁAMANIE TEKSTU

*Tomasz Grochowski*

## PROJEKT OKŁADKI

*Piotr Tarasiewicz*

Zdjęcie na okładce: Sławek hesja Krajniewski

Zdjęcia: z archiwum autorów, jeśli nie podpisano inaczej.

© Copyright by Instytut Techniczny Wojsk Lotniczych

ISBN 978-83-61021-47-6

WYDAWNICTWO INSTYTUTU TECHNICZNEGO WOJSK LOTNICZYCH  
01-494 Warszawa 46, ul. Księcia Bolesława 6

---

Drukowano w Instytucie Technicznym Wojsk Lotniczych

**„Idea statku powietrznego,  
który potrafilby wykonać lot pionowo startując z ziemi,  
a następnie wykonać zawis,  
narodziła się prawdopodobnie w tym samym czasie,  
gdy powstały marzenia o wykonaniu lotu”.**

***Igor Sikorski***





# SPIS TREŚCI

<b>Wstęp.....</b>	<b>9</b>
<b>CZĘŚĆ I</b>	
<b>Aerodynamika i osiągi śmigłowca .....</b>	<b>11</b>
<b>Spis ważniejszych oznaczeń w części I .....</b>	<b>13</b>
<b>1. Wiadomości wstępne.....</b>	<b>17</b>
1.1. Miejsce śmigłowca wśród statków powietrznych .....	17
1.2. Rys historyczny rozwoju śmigłowców .....	18
1.3. Układy konstrukcyjne śmigłowców.....	28
1.3.1. Zalety i wady podstawowych układów konstrukcyjnych śmigłowców .....	30
1.3.1.1. Układ jednowirnikowy ze śmigłem ogonowym.....	30
1.3.1.2. Układ podłużny zwany również układem tandem (układ Piaseckiego) .....	31
1.3.1.3. Dwuwirnikowy układ poprzeczny .....	32
1.3.1.4. Dwuwirnikowy układ współosiowy.....	34
1.3.1.5. Układ z krzyżującymi się wirnikami (układ Fletnera) .....	35
1.3.1.6. Układy śmigłowców wielowirnikowych .....	37
1.3.1.7. Układy śmigłowców odrzutowych (z bezpośrednim napędem wirnika nośnego) .....	40
1.3.1.8. Układy śmigłowców zespolonych (wirowców).....	43
1.3.1.9. Układy wirolotów .....	46
<b>2. Podstawy aerodynamiki śmigłowca .....</b>	<b>49</b>
2.1. Lot pionowy śmigłowca .....	49
2.1.1. Teoria strumienia .....	50
2.1.1.1. Prędkość i ciśnienie w strudze wirnika .....	50
2.1.1.2. Prędkość indukowana w zawisie .....	51
2.1.1.3. Straty idealne i rzeczywiste .....	52
2.1.1.4. Współczynnik jakości wirnika nośnego .....	53
2.1.2. Teoria elementu łopaty .....	55
2.1.2.1. Ciąg wirnika nośnego w zawisie .....	56
2.1.2.2. Moment oporowy .....	58
2.1.2.3. Wpływ prędkości końców łopat i współczynnika wypełnienia na doskonałość wirnika nośnego śmigłowca ...	61
2.1.2.4. Analiza charakterystyk w zawisie i locie pionowym .....	62
2.1.2.5. Prędkość indukowana w locie pionowym .....	62
2.1.2.6. Straty brzegowe .....	66

2.1.2.7. Ciąg i moment oporowy wirnika nośnego w locie pionowym.....	67
2.1.2.8. Wpływ wybranych parametrów na charakterystyki wirnika w zawisie locie pionowym .....	72
2.1.2.9. Wpływ Ziemi na charakterystyki wirnika nośnego .....	77
2.1.2.10. Metodyka obliczania charakterystyk wirnika nośnego ....	78
2.1.3. Autorotacja wirnika nośnego śmigłowca.....	80
2.1.3.1. Rodzaje strumieni przepływających przez tarczę wirnika nośnego.....	84
2.1.3.2. Wyznaczenie charakterystyk wirnika nośnego przy pionowym opadaniu .....	85
2.1.3.3. Opór wirnika nośnego przy opadaniu pionowym .....	89
2.2. Lot postępowy śmigłowca – wprowadzenie .....	90
2.2.1. Wahanie łopat i fizyczna interpretacja szeregu Fouriera.....	92
2.2.2. Sterowanie wirnikiem nośnym w locie do przodu .....	97
2.2.2.1. Określenie osi.....	102
<b>3. Siły i moment oporowy wirnika nośnego w ustalonym locie postępowym... 105</b>	
3.1. Prędkość indukowana i kąt natarcia wirnika nośnego w ustalonym locie postępowym .....	105
3.2. Ciąg wirnika nośnego w locie postępowym .....	110
3.3. Współczynniki szeregu Fouriera wahań łopaty w ustalonym locie postępowym .....	112
3.4. Moment wirnika nośnego w ustalonym locie postępowym .....	116
3.5. Siła podłużna wirnika nośnego w ustalonym locie postępowym .....	117
3.6. Prostoliniowy ustalony lot śmigłowca – analiza założeń .....	120
<b>4. Metodyka obliczania osiągow śmigłowca ..... 123</b>	
4.1. Moc rozporządzalna.....	123
4.2. Moc niezbędna .....	124
4.3. Prędkość wznoszenia śmigłowca .....	129
4.4. Barogram wznoszenia.....	133
4.5. Zestawienie mocy i charakterystyczne zakresy lotu .....	134
4.6. Zasięg i długotrwałość lotu.....	136
4.7. Ograniczenia maksymalnej prędkości śmigłowca.....	137
<b>Literatura do części I..... 139</b>	
<b>CZĘŚĆ II</b>	
<b>Dynamika lotu śmigłowca ..... 141</b>	
<b>Spis ważniejszych oznaczeń w części II ..... 143</b>	

<b>5. Równania ruchu śmigłowca .....</b>	<b>149</b>
5.1. Model fizyczny śmigłowca.....	149
5.2. Układy współrzędnych .....	152
5.3. Związki kinematyczne .....	163
5.3.1. Parametry Eulera–Rodriguesa.....	164
5.3.1.1. Sformułowanie związków kinematycznych za pomocą parametrów Eulera–Rodriguesa .....	166
5.4. Równania ruchu śmigłowca .....	168
5.4.1. Wektorowa metoda wyprowadzenia równań ruchu .....	169
5.4.2. Wyprowadzenie dynamicznych równań ruchu śmigłowca w oparciu o zasady mechaniki analitycznej .....	174
5.4.2.1. Wyprowadzenie równań ruchu z wykorzystaniem zasady Hamiltona.....	174
5.4.2.2. Wykorzystanie równań Boltzmanna–Hamela do generacji równań ruchu .....	180
5.4.2.3. Wykorzystanie równań Apela–Gibbsa do wyprowadzenia równań ruchu śmigłowca .....	182
5.4.3. Uwagi ogólne o generacji równań ruchu obiektów latających .....	186
<b>6. Modelowanie dynamiki zespołu napędowego śmigłowca.....</b>	<b>193</b>
6.1. Identyfikacja modelu śmigłowcowego silnika turbinowego.....	196
<b>7. Stateczność dynamiczna śmigłowca .....</b>	<b>201</b>
7.1. Podstawy teoretyczne analizy stateczności dynamicznej śmigłowca ....	201
7.2. Jakościowa analiza stateczności.....	205
7.3. Stateczność dynamiczna śmigłowca .....	207
7.3.1. Pochodne aerodynamiczne śmigłowca .....	208
7.3.2. Linearyzacja równań ruchu względem małych zaburzeń lotu ustalonego .....	210
7.3.2.1. Bezwymiarowa postać równań zaburzonego ruchu śmigłowca .....	212
7.3.2.2. Rozwiązanie zlinearyzowanego układu równań zaburzonego ruchu śmigłowca.....	215
7.3.2.3. Ilościowa analiza stateczności dynamicznej śmigłowca ..	217
<b>8. Obciążenia aerodynamiczne śmigłowca .....</b>	<b>223</b>
8.1. Obciążenia aerodynamiczne kadłuba śmigłowca .....	223
8.2. Obciążenia aerodynamiczne wirnika nośnego śmigłowca .....	227
8.2.1. Niestacjonarne obciążenia profilu łopaty wirnika nośnego śmigłowca ..	231
8.2.2. Zmodyfikowana metoda Theodorsena.....	233
<b>9. Pochodne aerodynamiczne śmigłowca .....</b>	<b>237</b>
9.1. Wprowadzenie.....	237

9.2. Pochodne aerodynamiczne sił i momentów wirnika nośnego działających w umownej płaszczyźnie symetrii śmigłowca.....	238
9.3. Pochodne aerodynamiczne asymetrycznych sił i momentów wirnika nośnego.....	244
9.4. Pochodne aerodynamiczne śmigła ogonowego.....	247
9.5. Pochodne współczynników wahań łopaty wirnika nośnego .....	249
9.5.1. Prędkość opływu elementu łopaty wirnika nośnego.....	249
9.5.2. Równanie różniczkowe wahań łopaty wirnika nośnego .....	252
9.5.3. Moment aerodynamiczny łopaty względem osi przegubu poziom.....	254
9.5.4. Współczynniki wahań łopaty w locie ustalonym śmigłowca .....	259
9.6. Współczynniki aerodynamiczne wirnika nośnego śmigłowca.....	262
9.7. Pochodne aerodynamiczne wirnika nośnego, śmigła ogonowego i kadłuba.....	267
9.7.1. Pochodne współczynnika przepływu wirnika nośnego .....	271
9.7.2. Pochodne współczynników aerodynamicznych wirnika nośnego .....	274
9.7.3. Pochodne współczynników aerodynamicznych śmigła ogonowego .....	275
9.7.4. Pochodne współczynników aerodynamicznych kadłuba .....	277
9.8. Obliczanie pochodnych aerodynamicznych metodą przyrostów skończonych .....	283
<b>10. Parametry lotu ustalonego śmigłowca .....</b>	<b>287</b>
10.1. Wstęp.....	287
10.2. Podłużna równowaga śmigłowca .....	287
10.3. Boczna równowaga śmigłowca .....	291
10.4. Obliczanie parametrów ustalonego lotu śmigłowca metodą kolejnych przybliżeń.....	294
10.4.1. Porównanie obliczeń warunków równowagi metodami przybliżoną i dokładną.....	294
<b>11. Sterowność śmigłowca .....</b>	<b>297</b>
11.1. Wstęp.....	297
11.2. Subiektywna ocena sterowności .....	298
11.2.1. Skala Coopera-Harpera.....	298
11.2.2. Subiektywne kryteria sterowności.....	299
11.3. Obiektywne kryteria sterowności.....	301
<b>Literatura do części II .....</b>	<b>307</b>

# WSTĘP

Publikacje książkowe w języku polskim poświęcone mechanice lotu śmigłowców należą do rzadkości. Oprócz wydanego ponad 20 lat temu polskiego tłumaczenia książki Garetha Padfielda *Helicopter Flight Dynamics: the theory and application of flying qualities and simulation modelling* i wydanej także ponad 20 lat temu monografii Grzegorza Kowaleczki *Nielinowa dynamika ruchu śmigłowca*, oraz wydanych na przestrzeni ostatnich 60 lat bodajże czterech skryptów akademickich poświęconych mechanice lotu śmigłowców, jak dotąd nie ukazała się polska publikacja książkowa poświęcona tej tematyce. Przedstawiona Czytelnikom monografia powinna, w myśl założeń Autorów, wypełnić tę lukę.

Książka składa się z dwóch części. Część I, zatytułowana „Aerodynamika i osiągi śmigłowca”, ma charakter podręcznika akademickiego przeznaczonego głównie dla studentów kierunku lotnictwo i kosmonautyka wyższych uczelni technicznych. Na wstępie przedstawiono krótki rys historyczny rozwoju śmigłowców, ich miejsce wśród innych statków powietrznych oraz zaprezentowano klasyfikację i opis układów śmigłowców. W dalszych rozdziałach części I przedstawiono elementarny wykład aerodynamiki wirnika nośnego. Omówiono szczegółowo teorię strumieniową oraz teorię elementu łopaty. Opisano problemy lotu na autorotacji wirnika nośnego oraz omówiono przeznaczenie przegubów wirnika nośnego. Wyprowadzono zależności pozwalające na wyznaczenie podstawowych charakterystyk wirnika nośnego. Część I kończy przedstawienie metody obliczania podstawowych osiągow śmigłowca.

W części II, zatytułowanej „Dynamika lotu śmigłowca”, przedstawiono w sposób kompleksowy problemy modelowania dynamiki lotu śmigłowca. Kolejne rozdziały traktują o sposobach modelowania śmigłowca jako bryły, sztywnego układu wieloczołowego, a także odkształcalnego układu wieloczołowego. Zdefiniowano stosowane w dynamice lotu śmigłowców układy współrzędnych oraz opisano metody wyprowadzania równań ruchu śmigłowca. Przedstawiono także sposoby budowy modeli matematycznych zespołu napędowego śmigłowca. Kolejne rozdziały traktują o problemach stateczności dynamicznej śmigłowca, obciążeniach aerody-

namicznych śmigłowca oraz o sposobach linearyzacji tych obciążeń, koncentrując się na metodach obliczania pochodnych aerodynamicznych. Część II kończą rozważania o sposobach wyznaczania parametrów lotu ustalonego oraz wybranych problemach sterowności śmigłowca.

Część II monografii jest adresowana do inżynierów zajmujących się problematyką śmigłowców, doktorantów i studentów studiów magisterskich, a także wymagających Czytelników, którzy chcieliby pogłębić swoją wiedzę na temat mechaniki lotu śmigłowców.

Na zakończenie pragniemy wspomnieć o współautorze tej publikacji, śp. pamięci docencie Wiesławie Łucjanku. Niestety docent Łucjanek nie doczekał publikacji książki, zmarł 20 stycznia 2023 r., przeżywszy 88 lat. Był wybitnym naukowcem i znakomitym nauczycielem akademickim. Prawie do końca życia był czynnym wykładowcą, prowadząc na Wydziale Mechanicznym Energetyki i Lotnictwa wykłady z mechaniki ogólnej w języku angielskim. W latach 1973–1978 był prodziekanem i dziekanem Wydziału Mechanicznego Energetyki i Lotnictwa oraz wieloletnim kierownikiem Zakładu Automatyki i Osprzętu Lotniczego Instytutu Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej Politechniki Warszawskiej. Był autorem wielu książek, licznych publikacji naukowych, a także wychowawcą i promotorem wielu inżynierów lotnictwa oraz pracowników naukowych.

Tę publikację poświęcamy Jego Pamięci.

Krzysztof Sibilski

# CZĘŚĆ I

**Aerodynamika i osiągi śmigłowca**





# SPIS WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ W CZĘŚCI I

## Charakterystyki geometryczne

$D$	–	średnica wirnika nośnego [m]
$R = \frac{D}{2}$	–	promień wirnika nośnego [m]
$r$	–	promień przekroju łopaty [m]
$\bar{r} = \frac{r}{R}$	–	promień względny przekroju łopaty [-]
$c$	–	cięciwa przekroju łopaty [m]
$c_A$	–	cięciwa zastępcza [m]
$n$	–	liczba łopat wirnika nośnego
$\Theta$	–	kąt nastawienia przekroju łopaty (zawarty pomiędzy linią zerowej siły nośnej $C_z$ a płaszczyzną obrotu wirnika nośnego [rad]
$\beta_*$	–	kąt względnego przepływu profilu łopaty wirnika nośnego
$\beta$	–	kąt wahań pionowych łopaty wirnika nośnego [rad]
$\gamma$	–	kąt wahań poziomych łopaty wirnika nośnego [rad]
$\Psi, \psi$	–	kąt azymutu łopaty [rad, deg.]
$\alpha_{wN}$	–	kąt natarcia wirnika nośnego [rad, deg.]
$\alpha_r$	–	kąt natarcia przekroju łopaty [rad, deg.]
$\Theta_w$	–	kąt wznoszenia śmigłowca [rad, deg.]
$A_{wN} = \pi R^2$	–	powierzchnia tarczy wirnika [m <sup>2</sup> ]

## Charakterystyki kinematyczne, masowe i dynamiczne

- $V$  – prędkość postępową lotu [m/s, km/h]  
 $W$  – prędkość pionowa (wznoszenia, opadania) [m/s]  
 $w$  – prędkość przepływu przez wirnik [m/s]  
 $v_i$  – prędkość indukowana w płaszczyźnie tarczy wirnika [m/s]  
 $\Omega$  – prędkość kątowna wirnika [ $s^{-1}$ ]  
 $\rho$  – gęstość powietrza [ $kg/m^3$ ]  
 $m$  – masa śmigłowca [kg]  
 $Q=mg$  – ciężar śmigłowca [N]  
 $T$  – ciąg wirnika nośnego [N]  
 $T_i$  – ciąg jednej łopaty [N]  
 $P_z$  – siła nośna [N]  
 $P_x$  – opór [N]  
 $N$  – moc [W]  
 $M$  – moment oporowy [Nm]  
 $M_i$  – moment oporowy od oporu indukowanego [Nm]  
 $M_p$  – moment oporowy od oporu profilowego [Nm]  
 $N_n$  – moc niezbędna do lotu poziomego [W]  
 $N_r$  – moc rozporządzania [W]  
 $N_w$  – moc wykorzystywana na wznoszenie [W]  
 $N_h$  – moc niezbędna do wykonania zawisu [W]  
 $H$  – wysokość lotu [m, km]

## Parametry i współczynniki

$$\sigma = \frac{n c_A}{\pi R} - \text{współczynnik wypełnienia wirnika nośnego}$$

$$\mu = \frac{V \cos \alpha_{wN}}{\Omega R} \approx \frac{V}{\Omega R} - \text{współczynnik prędkości, posuw wirnika nośnego} \\ \text{(charakterystyka zakresu pracy wirnika)}$$

$$\lambda = \frac{V \sin \alpha_{wN} + v_i}{\Omega R} = \frac{w}{\Omega R} - \text{współczynnik przepływu}$$

$$C_T = \frac{T}{\frac{1}{2} \rho (\Omega R)^2 \pi R^2} - \text{współczynnik ciągu}$$

$$t_c = \frac{T}{\frac{1}{2} \rho \sigma (\Omega R)^2 \pi R^2} = C_T \sigma \quad - \text{współczynnik ciągu}$$

$$C_M \frac{M}{\frac{1}{2} \rho (\Omega R^2) \pi R^3} \quad - \text{współczynnik momentu}$$

$$\eta_M = \frac{1}{2} \frac{C_T^{\frac{3}{2}}}{C_M} \quad - \text{współczynnik jakości wirnika nośnego}$$

$$p = \frac{Q}{A_{wN}} \quad - \text{obciążenia jednostkowe tarczy wirnika [N/m^2]}$$

$$q = \frac{Q}{N} \quad - \text{obciążenia jednostkowe tarczy wirnika [W/m^2]}$$

$$a_0, a_1, a_2, b_1, b_2 \quad - \text{współczynniki wahań łopaty wirnika nośnego}$$

$$C_{X_p} \quad - \text{współczynnik oporu profilowego [-]}$$

$$C_Z \quad - \text{współczynnik siły nośnej profilu łopaty [-]}$$

$$C_h = \left[ \frac{m_{pal}}{t} \right] \quad - \text{godzinowe zużycie paliwa, ilość paliwa spalana przez silnik w ciągu godziny pracy [kg/godz.]}$$

$$C_e = \left[ \frac{m_{pal}}{Nt} \right] \quad - \text{jednostkowe zużycie paliwa, ilość paliwa zużywana na wytworzenie 1 kW mocy w ciągu godziny [kg/kWh]}$$

$$C_k = \left[ \frac{m_{pal}}{L} \right] \quad - \text{kilometrowe zużycie paliwa, ilość paliwa spalana przez silnik podczas przelotu 1 km [kg/km]}$$



## WIADOMOŚCI WSTĘPNE

### 1.1. Miejsce śmigłowca wśród statków powietrznych

Statkiem latającym nazywamy każde urządzenie zdolne w zasadzie do wielokrotnego lotu w atmosferze lub poza nią.

Statek powietrzny jest to statek latający służący do lotu w atmosferze. Jeżeli zasada lotu urządzenia jest aerostaticzna mamy do czynienia z *aerostatem*, natomiast jeżeli lot jest aerodynamiczny wówczas mamy do czynienia z *aerodynamą*.

Podstawową różnicą między aerostatem a aerodynamą jest to, że aerostat może unosić się w powietrzu bez potrzeby ruchu względem ośrodka, gdyż siła nośna równoważąca siłę ciężkości powstaje na zasadzie prawa Archimedesesa. W przypadku aerodynamy niezbędnym warunkiem lotu jest ruch, a siła nośna równoważąca siłę ciężkości jest funkcją prędkości. Najbardziej rozpowszechnionymi aerodynamami są *stałopłaty*, które charakteryzują się sztywnym powiązaniem powierzchni nośnych – skrzydeł – z resztą struktury statku. Lot stałopłatów uwarunkowany jest wykonywaniem ruchu względem ośrodka z większą od pewnego minimum prędkością.

Inaczej ma się rzecz ze śmigłowcami należącymi do *wiropłatów*. Tu powierzchnie nośne mają postać smukłych łopatek, wirujących wokół w przybliżeniu pionowej osi. Przepływ powietrza względem wirujących łopatek warunkujący powstanie siły nośnej wywołany jest wymuszonym przez silnik ruchem obrotowym. W tym przypadku powstanie siły nośnej równoważącej siłę ciężkości jest uwarunkowane odpowiednim ustawieniem łopatek i osiągnięciem wystarczająco dużej prędkości obrotowej.

Śmigłowiec zwany również helikopterem, (z języka greckiego *hélikos*, *hélikos* – skręcony; *pterón* – skrzydło), jest zatem w stanie startować z miejsca pionowo i lądować bez dobiegu. Może także zawisnąć w powietrzu lub poruszać się w dowolnym kierunku z określoną prędkością poziomą. Śmigłowiec nie potrzebuje lotniska przy starcie i lądowaniu.

Zespół wirujących łopat wytwarzających siłę nośną nazywa się *wirnikiem nośnym* (WN). Pochylenie wirnika nośnego powoduje powstanie ciągu potrzebnego do postępowego ruchu śmigłowca. Śmigłowiec nie jest jedynym wiroplatem. Do tej kategorii należą także inne statki powietrzne różniące się od śmigłowca sposobem napędu wirnika i realizacją siły ciągu. W klasycznym śmigłowcu całość mocy silnika dostarczana jest na wirnik nośny, na którym powstaje zarówno siła nośna równoważąca siłę ciężkości statku powietrznego, jak i siła ciągu. Wirnik nośny jest przy tym narzędziem sterowania śmigłowcem. W innych wiroplatach napęd wirnika, źródła siły nośnej, sposób realizacji siły ciągu i sposób sterowania są realizowane inaczej.

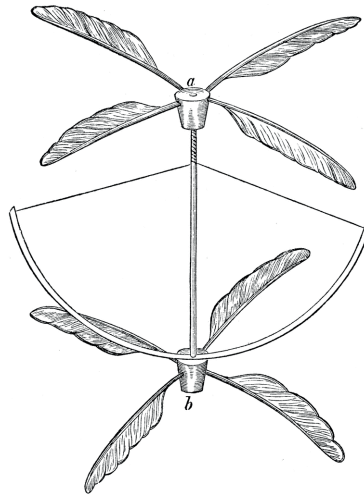
Nazwy wiroplatów innych niż śmigłowiec nie są dotychczas w języku polskim jednoznacznie ustalone, śmigłowiec z ciągiem dodatkowym próbowano nazwać *wirowcem*, zaś śmigłowiec ze skrzydłem – *wirolotem*. Możliwa z technicznego punktu widzenia kombinacja obu tych wiroplatów (kilkakrotnie już zresztą do celów badawczych zrealizowana), czyli śmigłowiec ze skrzydłem i ciągiem dodatkowym bywa nazywany śmigłowcem zespolonym lub *wirowcem*.

Wiropląt, w którym wirnik nośny nie jest w ogóle napędzany, a cała moc jest przeznaczona do wytworzenia ciągu do przodu nazywa się *wiatrakowcem* (dawne terminy *autogiro* lub *autożyro* nie są w chwili obecnej stosowane). Wiatrakowiec bez napędu nosi nazwę *wiroszybowca*.

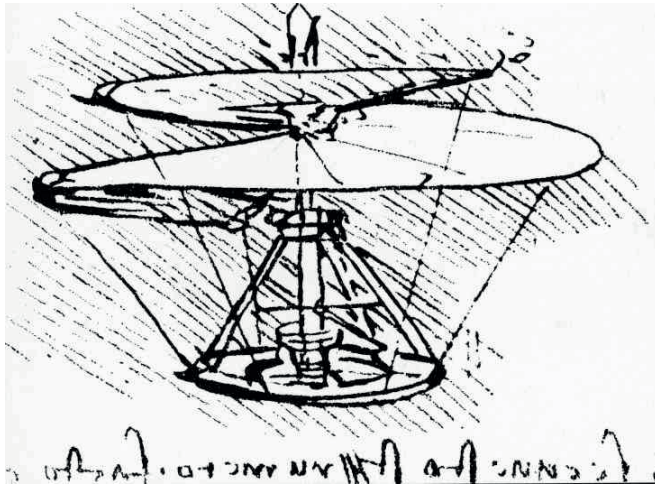
Wiropląt z przekręcanymi wirnikami nośnymi nazywany jest *zmiennowirnikowcem*. W chwili obecnej seryjnie produkowanym zmiennowirnikowcem jest Bell-Boeing V-22 Osprey.

## 1.2. Rys historyczny rozwoju śmigłowców [1.8, 1.10]

Chociaż największa uwaga historyków lotnictwa zwrócona jest na badanie rozwoju samolotu, to jednak śmigłowiec (a w zasadzie jego model) był pierwszym urządzeniem zbudowanym przez człowieka, który wykonał udany lot. Około 320 roku przed Chrystusem chiński alchemik Ko Hung wynalazł zabawkę nazwaną „bączkiem chińskim” (rys. 1.1). Ptasie pióra wbite w korek, napędzane energią zmagazynowaną w łuku umożliwiały lot zabawki. Bączek chiński przywędrował do Europy dzięki znanemu podróżnikowi Marco Polo. Kilkaset lat później genialny Włoch Leonardo da Vinci naszkicował latającą maszynę, która miała „wkręcać się” w powietrze dzięki śrubie Archimedesza (rys. 1.2).

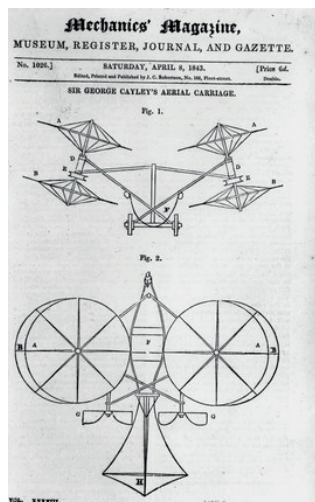


Rys. 1.1. Bączek chiński [fot. etc.usf.edu]



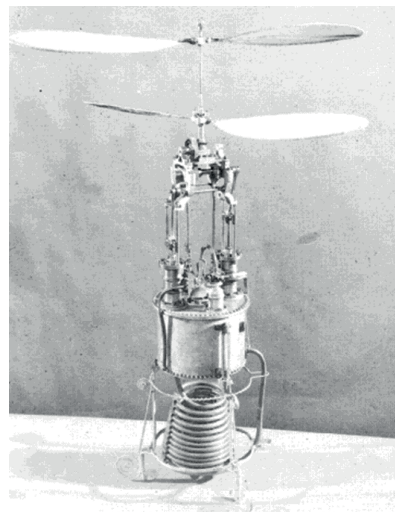
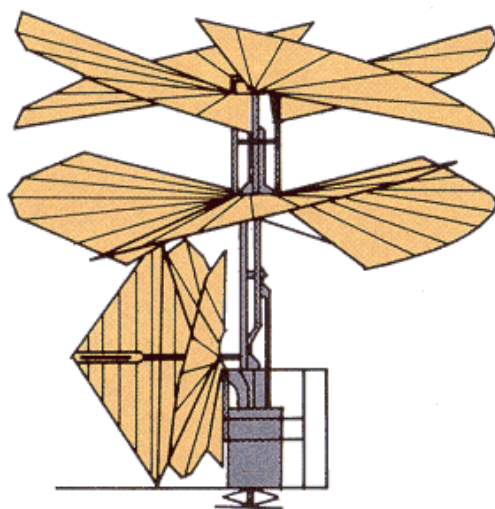
Rys. 1.2. Szkic śmigłowca pomysłu genialnego Włocha Leonarda da Vinci  
[fot. wikimedia.org]

Można powiedzieć, że rozwój lotnictwa w jego początkowej fazie to w dużej części dzieło pionierów, którzy działali zgodnie z zasadą „krok do przodu, dwa kroki w tył”. Szczególnie mocno widoczne jest to w rozwoju śmigłowców. Chociaż koncepcja śmigłowca była znana od stuleci, a szczegółowe szkice maszyny podał jeszcze pod koniec XVIII w. sir George Cayley (rys. 1.3), to w pełni sprawne śmigłowce pojawiły się prawie 40 lat po udanych konstrukcjach samolotów.



Rys. 1.3. Śmigłowiec sir George'a Cayleya, 1796 [1.4]

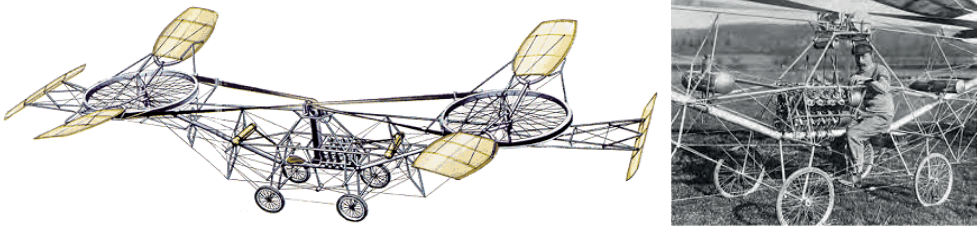
Pierwszy wiropląt napędzany parą został skonstruowany w 1862 r. przez Francuza Gustawa de Ponton d'Amecourt, Jego maszyna miała dwa wirniki obracające się w przeciwnych kierunkach wokół wspólnej osi (rys. 1.4). Jednak stosunek mocy do masy był zbyt mały, aby unieść śmigłowiec w powietrze, więc wykonywał on jedynie skoki na ziemi. Niewątpliwą zasługą hrabiego d'Amecourt było wprowadzenie słowa „helikopter” na określenie swojej maszyny.



Rys. 1.4. Napędzany silnikiem parowym helikopter hrabiego Gustawa de Ponton d'Amecourt [fot. helistart.com]

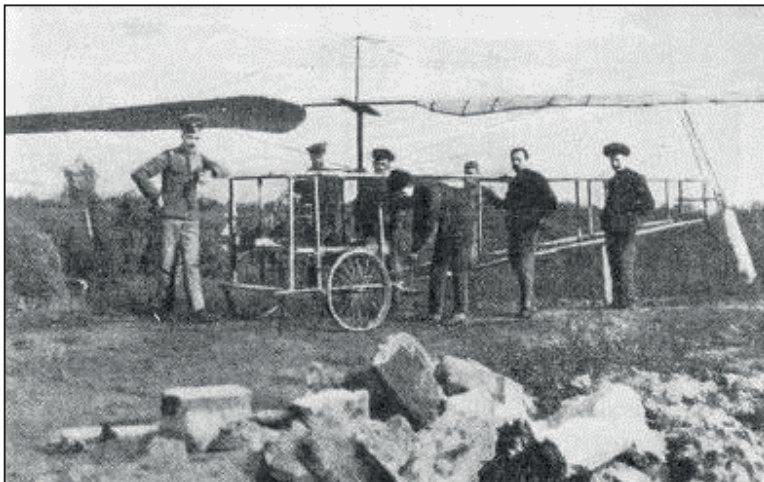


Cztery lata po debiucie lotniczym braci Wright, w 1907 r., nastąpił przełom w dziedzinie lotów wiroplątów [1.12]. Francuz Paul Cornu skonstruował dwuwirnikowy śmigłowiec napędzany silnikiem spalinowym (rys. 1.5). Umieszczone z przodu i na końcu kadłuba wirniki połączone były pasami transmisyjnymi, a do sterowania lotem wykorzystywano wychylane wiatraczki, umieszczone pod każdym z wirników. Słaby silnik o mocy ok. 18 kW oraz nierównomierna praca śmigieł nośnych spowodowana ślizganiem się pasów transmisyjnych, (co destabilizowało lot), spowodowały, że wykonany na wysokości 30 cm lot śmigłowca Paula Cornu był bardzo krótki (trwał 20 s). Jednak powyższe niedogodności nie zmieniają faktu, że był to pierwszy sprawny, samodzielnie latający, załogowy wiropląt na świecie [1.12].



**Rys. 1.5.** Śmigłowiec Paula Cornu [fot. C. Gablehouse: Helicopters and Autogiros, 1969; [wikimedia.org](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Paul_Cornu_helicopter.jpg)]

W roku 1910 w Rosji Borys Juriew zaprojektował śmigłowiec jednowirnikowy z umieszczonymi na końcu belki ogonowej kadłuba śmigłem równoważącym moment reakcyjny wirnika nośnego (rys. 1.6). W tym śmigłowcu Juriew wykorzystał swój patent sterowania okresowego wirnika nośnego za pomocą tarczy sterującej [1.16].



**Rys. 1.6.** Śmigłowiec Juriewa w układzie jednowirnikowym ze śmigłem ogonowym [1.5]

Asymetria rozkładu siły nośnej powodująca pojawienie się silnego momentu przechylającego, była przyczyną szeregu niepowodzeń wczesnych konstrukcji tych maszyn. Problem ten uniemożliwiał efektywny lot śmigłowca aż do momentu wynalezienia tarczy sterującej. Dopiero wprowadzenie tarczy wraz z mechanizmem cyklicznej zmiany kąta nastawienia łopaty wirnika nośnego umożliwiło wyrównoważenie śmigłowca. Jednakowoż, pozostało wiele innych problemów technicznych, które na tym poziomie rozwoju technologii były niemożliwe do rozwiązania [1.4].

Śmigłowce uzyskują całą siłę nośną i ciąg z łopat wirnika. Powierzchnie nośne wiroplata obracają się, więc nie ma konieczności poruszania całego statku w celu wytworzenia względnego ruchu powietrza, niezbędnego do generowania siły nośnej. Jednym z efektów obracania się łopat wirnika śmigłowca wokół osi jest zjawisko nierównomierności rozkładu siły nośnej. Różna prędkość względna powietrza opływającego łopaty w pobliżu osi obrotu i przy ich końcówkach powoduje, że poruszające się szybciej końce łopat wytwarzają większą siłę nośną. Poruszanie się śmigłowca do przodu powoduje, że ta strona wirnika, która obraca się zgodnie z kierunkiem lotu maszyny, ma większą prędkość względną niż strona wirnika obracająca się w przeciwnym kierunku. Asymetrię rozkładu siły nośnej zaobserwował po raz pierwszy w latach 20. Juan de la Cierva y Cordonía podczas prób swoich wiatrakowców. Efekt ten, o ile nie zostanie skompensowany, powoduje tendencję wiroplatów do pochylania się na bok. Cierva zaproponował bardzo prosty sposób wyeliminowania tego momentu, a mianowicie zaproponował przegubowe mocowanie łopat do piasty wirnika nośnego. W konstrukcjach wiroplatowych Juana da la Ciervy wirnik nośny nie miał napędu. Obracał się on swobodnie pod wpływem przepływającego przez płaszczyznę wirnika powietrza. Postępowy ruch wiatrakowca w powietrzu powodował, że wirnik zaczynał się obracać i wytwarzać siłę nośną. Do nadania maszynie prędkości wykorzystywano ciąg konwencjonalnego śmigła. Wiatrakowiec nie był zdolny do zawisu, ale jego droga startu była krótsza, niż klasycznego samolotu (rys. 1.7).



**Rys. 1.7.** Wiatrakowiec Juana da la Ciervy C 30A [fot. [www.dws.org.pl](http://www.dws.org.pl)]

Praktyczne wykorzystanie śmigłowca nastąpiło za sprawą niemieckiego naukowca dr Heinricha Karla Johanna Focke. Zbudowany dla Trzeciej Rzeszy Focke-Achgelis Fa 61 (rys. 1.8) wykonał swój pierwszy lot 26 czerwca 1936 r. Fa 61 był jednomiejscowym wiroplątem z dwoma trójłopatowymi wirnikami umieszczonymi po bokach kadłuba i klasycznym śmigłem wytwarzającym ciąg poziomy. Wirniki nośne i śmigło napędzał jeden silnik.



**Rys. 1.8.** Pierwsza udana konstrukcja śmigłowca – Focke-Achgelis Fa 61 [fot. wikipedia.org]

Inny projekt tego konstruktora Focke-Achgelis Fa 233 Drache (rys. 1.9) był pierwszym na świecie śmigłowcem transportowym. Drache zabierał sześciu pasażerów i był zdolny do przenoszenia ładunku podwieszonego na linie.



**Rys. 1.9.** Pierwszy śmigłowiec transportowy Focke-Achgelis Fa 233 Drache [fot. valka.cz]

Za pierwszy na świecie śmigłowiec wojskowy uważa się F1 282 Kolibri (rys. 1.10) zaprojektowany przez Niemca Antona Flettnera. Kolibri miał dwa wirniki, których płaszczyzny obrotu się krzyżowały. W 1942 r. śmigłowiec ten został wprowadzony do służby na niemieckich okrętach na Morzu Śródziemnym, Morzu Egejskim i Bałtyku. Po modyfikacji służył do zwalczania okrętów podwodnych.



**Rys. 1.10.** Pierwszy operujący z okrętów uzbrojony śmigłowiec – F1 282 Kolibri  
[fot. [www.aviastar.org](http://www.aviastar.org)]

W USA Sikorsky Aircraft Company Igora Sikorskiego otrzymała od US Army zamówienie na dwumiejscowy śmigłowiec obserwacyjny. Oblatany w styczniu, a przekazany armii w maju 1942 r. R-4 pobił praktycznie wszystkie istniejące światowe rekordy śmigłowcowe. W konstrukcji R-4 wykorzystano pojedynczy trójpłatowy wirnik i śmigło ogonowe, równoważące moment głównego wirnika. Pod koniec II wojny światowej w siłach lądowych, marynarce i morskiej straży granicznej USA oraz w marynarce brytyjskiej i RAF-ie służyło ponad 400 maszyn koncernu lotniczego Sikorskiego. Śmigłowiec R-4 Igora Sikorskiego przedstawiony został na rys. 1.11.



**Rys. 1.11.** Śmigłowiec R-4 konstrukcji Igora Sikorskiego zbudowany w układzie jednowirnikowym ze śmigłem ogonowym [fot. [www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org)]



W okresie międzywojennym polska zakupiła wiatrakowiec Cierva C.30A (rys. 1.7). Zakup wiatrakowca Ciervy w zamyśle władz wojskowych Polski miał na celu zbadanie możliwości zastąpienia przez ten typ statku powietrznego obserwacyjnych balonów na uwięzi. Ale już podczas II wojny światowej polski wkład w rozwój techniki wiroplątowej był znaczący.

Należy tu wspomnieć o grupie polskich inżynierów, emigrantów politycznych, którzy nie chcąc się pogodzić z komunistycznym reżimem wprowadzonym w Polsce po 1945 r., pozostali na emigracji w USA. Grupa ta, złożona z Tadeusza Tarczyńskiego, Jana Solaka, Zbysława Ciołkosza, Szczepana Grzeszczyka i Wiesława Stępniewskiego, wniosła w latach 1945–1955 znaczący wkład w rozwój dwuwirnikowych śmigłowców układu podłużnego konstrukcji Franka Nicholasa Piasseckiego [12]. Dwaj inni polscy inżynierowie stali się znani ze swych osiągnięć na polu wiroplątów w Anglii: Jerzy Kazimierz Zbrożek, który pracując w RAE w Farnborough wniósł cenny wkład m.in. w zbadanie wpływu Ziemi na osiągi śmigłowców, i Tadeusz Leopold Ciastuła, główny konstruktor przedstawionego na rys. 1.12 śmigłowca Saunders-Roe Skeeter.



**Rys. 1.12.** Śmigłowiec Saunders-Roe Skeeter [fot. [www.en.wikipedia.org](http://www.en.wikipedia.org)]

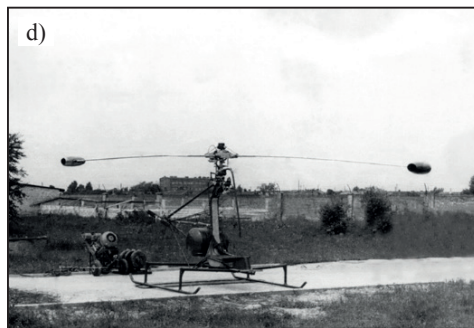
Inny emigrant z Polski Bernard Sznycer zbudował w latach 1946–1950 w Kanadzie i USA kilka śmigłowców eksperymentalnych, w tym dwusilnikowy „łatający dźwig” Omega BS-12D, którego patent został sprzedany firmie Sikorsky, stając się tam podstawą budowy słynnych maszyn dźwigowych S-60 i S-64 Sky Crane. We Francji pionierem śmigłowcowych silników turbinowych stał się mieszkający tam Polak Joseph Szydłowski, twórca i właściciel firmy Turbomeca.



**Rys. 1.13.** Śmigłowiec konstrukcji inż. Bernarda Szyncera BS-12 Omega [fot. Howard Levy, [www.1000aircraftphotos.com](http://www.1000aircraftphotos.com)]

Jako ciekawostkę można podać, że polskie korzenie miał również Nikołaj Karmow, „ojciec” rosyjskich śmigłowców współosiowych, którego matka Helena Langlebień była Polką z Warszawy [1.12].

Polski wkład we wczesny etap rozwoju śmigłowców to budowa maszyn eksperymentalnych, w tym SP-GIL z awangardowym rezonansowym tłumikiem drgań [1.12]. W 1956 r. Polska weszła do wąskiego klubu znaczących wytwórców tych maszyn. Wyszukoleni zostali także pierwsi polscy piloci śmigłowcowi, a pierwsze śmigłowce trafiły do wojsk lotniczych oraz lotnictwa cywilnego. W Świdniku uruchomiona została wytwórnia licencyjnych i własnych śmigłowców. Skonstruowane i produkowane w Polsce śmigłowce przedstawione zostały na rys. 1.14.





**Rys. 1.14.** Śmigłowce skonstruowane bądź budowane w Polsce: a) eksperymentalny śmigłowiec GIL; b) śmigłowiec konstrukcji mgr. inż. Bronisława Żurakowskiego BŻ-4 Żuk; c) produkowany w WSK Świdnik na radzieckiej licencji śmigłowiec Mi-1; d) eksperymentalny śmigłowiec z bezpośrednim napędem wirnika nośnego konstrukcji dr. inż. Jerzego Kotlińskiego JK-1 Trzmiel; e) śmigłowiec konstrukcji dr. inż. Jerzego Kotlińskiego SM-2, Łątka; f) produkowany na radzieckiej licencji w WSK Świdnik śmigłowiec Mi-2; g) skonstruowany w Polsce i produkowany w WSK Świdnik śmigłowiec PZL W-3 Sokół; h) skonstruowany i produkowany w WSK Świdnik śmigłowiec PZL SW-4 Puszczyc; i) prototyp bezzałogowego śmigłowca ILX-27; j) produkowany w Mielcu śmigłowiec Black Hawk [fot. a) [www.polska-zbrojna.pl](http://www.polska-zbrojna.pl), b) [www.sklejmy.com](http://www.sklejmy.com), c) [www.ruslet.webnode.cz](http://www.ruslet.webnode.cz), d) „85 lat Instytutu Lotnictwa”, Institute of Aviation Publishing Houses, Warsaw, 2011, e) [www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org), f) [www.hesja.pl](http://www.hesja.pl), g) [www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org), h) Karol Placha Hetman, polot.net, i) [www.semanticscholar.org](http://www.semanticscholar.org), j) [www.zbiam.pl](http://www.zbiam.pl)]

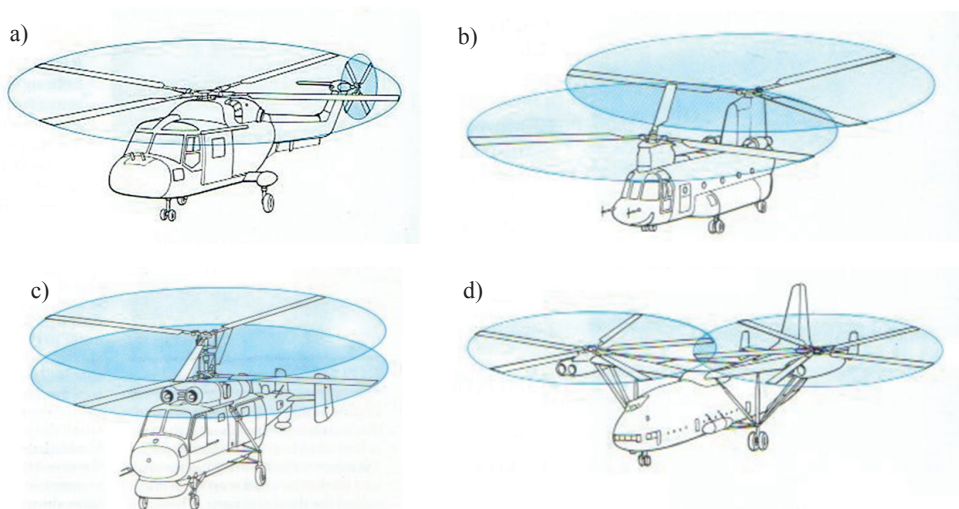


### 1.3. Układy konstrukcyjne śmigłowców

Koncepcja klasycznego śmigłowca polega na tym, że moc napędu jest kierowana na wirnik nośny, który jest jednocześnie źródłem siły nośnej, siły ciągu i narzędziem sterowania. Koncepcja ta może być realizowana na wiele sposobów. Różnica między nimi polega przede wszystkim na zastosowanej metodzie eliminacji momentu reakcyjnego, oddziałującego na kadłub śmigłowca.

Śmigłowce, w których w ten sam sposób rozwiązano zrównoważenie momentu reakcyjnego, należą do tego samego układu konstrukcyjnego, niezależnie od swej wielkości i przeznaczenia.

Najprostszym i jednocześnie najbardziej rozpowszechnionym układem konstrukcyjnym śmigłowca jest układ jednowirnikowy, ze śmigłem ogonowym (rys. 1.15a). Ponad 90% wszystkich latających śmigłowców jest zbudowanych w tym układzie. Zastosowany tu sposób zrównoważenia momentu reakcyjnego polega na tym, że na końcu wydłużonego do tyłu kadłuba jest umieszczone niewielkie śmigło wytwarzające ciąg w bok. Powstały w ten sposób moment służy zarówno zrównoważeniu momentu reakcyjnego, jak i sterowaniu śmigłowca wokół pionowej osi. Leżąca w płaszczyźnie pionowej tarcza śmigła polepsza ponadto kierunkową stateczność śmigłowca.



**Rys. 1.15.** Główne układy konstrukcyjne śmigłowców: a) jednowirnikowy; b) dwuwirnikowy podłużny (tandem); c) dwuwirnikowy współosiowy; d) dwuwirnikowy poprzeczny [fot. [www.vtol.org](http://www.vtol.org)]

Istnieją także układy konstrukcyjne, w których moment reakcyjny na kadłubie nie występuje z założenia. Najważniejsze spośród nich to trzy układy dwuwirni-



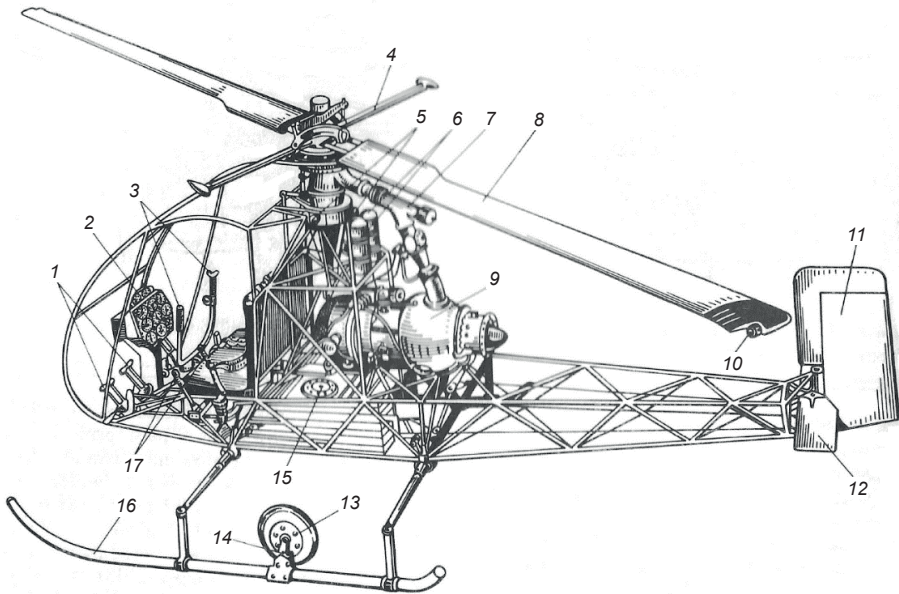
kowe: układ podłużny (rys. 1.15b), układ współosiowy (rys. 1.15c) oraz układ poprzeczny (rys. 1.15d). Moment reakcyjny na kadłubie śmigłowców zbudowanych w tych układach eliminowany jest dzięki dwu czynnikom:

- równemu rozdziałowi nocy między obydwoma wirnikami nośnymi;
- przeciwnemu kierunkowi obrotów obu wirników.

Wszystkie wymienione układy dwuwirnikowe są stosowane w praktyce i stanowią uzupełnienie dominującego układu jednowirnikowego.

Likwidacja momentu reakcyjnego jest również możliwa w dwuwirnikowym układzie krzyżowym (Fletnera) i układach wielowirnikowych. Układy te szerzej zostaną opisane w podrozdziale 2.1.

Bardzo ciekawym sposobem eliminacji momentu reakcyjnego na kadłubie śmigłowca jednowirnikowego jest zastosowanie bezpośredniego napędu wirnika przez strumieniowe silniki odrzutowe umieszczone na końcach łopat lub przez wydmuch sprężonych gazów z umieszczonych na końcach łopat dysz (rys. 1.16).



**Rys. 1.16.** Zaprojektowany i budowany we Francji śmigłowiec SO 1221 Djinn – przykład konstrukcji śmigłowca odrzutowego z napędem ciśnieniowym (bez spalania paliwa w dyszach odrzutowych): 1 – pedały do sterowania nożnego; 2 – tablica pokładowa; 3 – dźwignie skoku okresowego; 4 – pręt ustępczy; 5 – uchwyty do zamocowania głowicy wirnika; 6 – zbiorniki oleju; 7 – przewód powietrzny; 8 – łopata wirnika nośnego; 9 – silnik; 10 – dysza odrzutowa; 11 – ster kierunku; 12 – statecznik poziomy; 13 – koło podwozia; 14 – uchwyt korbowy koła; 15 – zbiornik paliwa; 16 – podwozie płozone; 17 – dźwignie skoku ogólnego [1.4]

W opisanych powyżej układach były budowane śmigłowce w niewielkich seriach, jednak nie przyjęły się głównie ze względu na wysoki poziom wytwarzanego hałasu i wysokie zużycie paliwa spowodowane niską sprawnością silników strumieniowych na prędkościach poddźwiękowych.

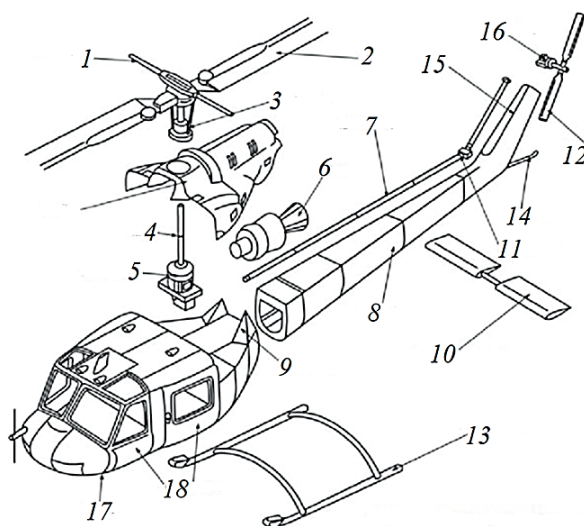
### 1.3.1. Zalety i wady podstawowych układów konstrukcyjnych śmigłowców

#### 1.3.1.1. Układ jednowirnikowy ze śmigłem ogonowym

Układ jednowirnikowy ze śmigłem ogonowym jest najprostszy mechanicznie i najtańszy w produkcji (rys. 1.15a, 1.17 i 1.18). Układ ten został zaproponowany w 1911 r. przez Borysa Juriewa (rys. 1.6).

Do zalet śmigłowców zbudowanych w tym układzie zaliczyć można:

- łatwość starannego opracowania aerodynamicznego;
- dobre osiągi, zwrotność i dużą uniwersalność operacyjną;
- prostotę konstrukcji;
- prostotę urządzeń sterowniczych;
- stosunkowo niski koszt.

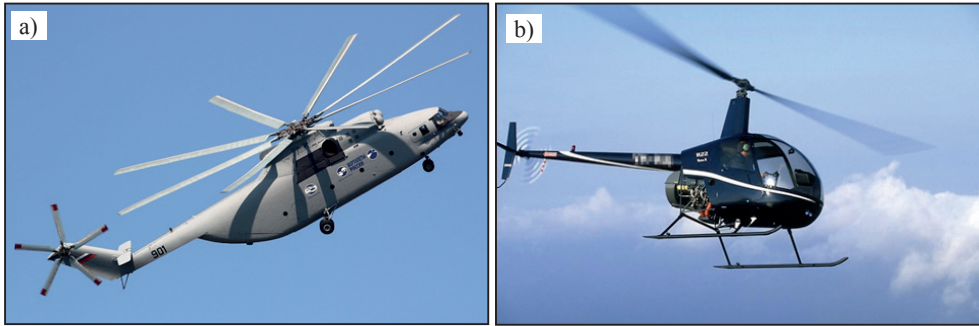


**Rys. 1.17.** Ogólny układ śmigłowca jednowirnikowego z dwułopatowym wirnikiem nośnym i prętem stabilizującym: 1 – belka stabilizująca wirnika nośnego, 2 – łopata wirnika nośnego, 3 – tarcza sterująca, 4 – wał wirnika nośnego, 5 – przekładnia główna, 6 – silnik, 7 – wał napędowy śmigła ogonowego, 8 – belka ogonowa, 9 – łożo silnika, 10 – statecznik poziomy, 11 – przekładnia kątowa napędu śmigła ogonowego, 12 – śmigło ogonowe, 13 – podwozie śmigłowca, 14 – płoza ogonowa, 15 – statecznik pionowy, 16 – przekładnia końcowa napędu śmigła ogonowego, 17 – kadłub śmigłowca, 18 – drzwi kadłuba kabin śmigłowca [1.4]

Jednocześnie układ ten wykazuje następujące wady:

- asymetryczność układu sił i momentów, co rzutuje m.in. na własności pilotażowe;
- stosunkowo dużą wrażliwość na położenie środka masy (wąski zakres możliwych wariantów wyrównoważenia);
- strata mocy na napęd śmigła ogonowego;
- długa część ogonowa kadłuba, zwiększająca wymiary śmigłowca.

W układzie jednowirnikowym ze śmigłem ogonowym budowane są zarówno śmigłowce olbrzymy (o maksymalnej masie startowej 56 000 kg, średnicy wirnika nośnego 32 m i mocy silników 17 000 kW – rys. 1.18a), jak i śmigłowce ultralekkie (np. dwumiejscowy Robinson R22 o masie startowej 590 kg, średnicy wirnika 7,7 m i mocy silnika 91 kW – rys. 1.18b)



**Rys. 1.18.** Śmigłowce w układzie jednowirnikowym ze śmigłem ogonowym: a) Mi-26 – największy śmigłowiec świata zbudowany w tym układzie konstrukcyjnym; b) jeden z najmniejszych śmigłowców zbudowanych w tym układzie [fot. a) [www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org); b) [www.abc.net.au](http://www.abc.net.au)]

### 1.3.1.2. Układ podłużny zwany również układem tandem (układ Piaseckiego)

W układzie tandem dwa wirniki nośne położone są jeden za drugim wzdłuż kadłuba (rys. 1.15b i 1.19). Płaszczyzna obrotu tylnego wirnika położona jest zazwyczaj powyżej płaszczyzny obrotu wirnika przedniego. Niekiedy płaszczyzny obrotu obu wirników stanowią jedną pochyloną płaszczyznę; wówczas piastę tylnego wirnika umieszcza się powyżej piasty wirnika przedniego, a osie wirników pochyla się ku przodowi. Wirniki nośne obracają się w przeciwnych kierunkach z jednakową liczbą obrotów, zatem ich momenty oporowe równoważą się. Taki sposób równoważenia momentu oporowego wirników nośnych, jeśli one częściowo nie przesłaniają się wzajemnie, nie przyczynia się do straty mocy.

W przypadku przesłaniania się wirników nośnych powstaje strata mocy na skutek wzajemnego ich wpływu. W przypadku częściowego przesłaniania łopat wirników obroty są zawsze zsynchronizowane. W obszarze przesłonięcia łopata jednego wirnika powinna być zawsze położona pomiędzy dwiema łopatami wirnika drugiego. W żadnym wypadku łopaty jednego wirnika nie powinny stykać się z łopatami drugiego wirnika.

Zaletami tego układu są:

- dobra stateczność podłużna;
- szeroki zakres możliwości wyrównoważenia;
- wydajność masowa;
- duża objętość kadłuba (duża pojemność użytkowa).



**Rys. 1.19.** Boeing CH-47 Chinook – amerykański ciężki śmigłowiec transportowy zbudowany w układzie tandem [fot. [www.sentinelassam.com](http://www.sentinelassam.com)]

Do wad natomiast należą:

- skomplikowany układ przenoszenia napędu;
- opory indukowane w locie poziomym;
- konieczność niezawodnej synchronizacji obrotów wirników;
- skomplikowane lądowanie z lotu na autorotacji.

Obecnie jedynym produkowanym i użytkowanym przez wiele armii świata przedstawicielem śmigłowców zbudowanych w układzie tandem jest amerykański śmigłowiec transportowy Boeing CH-47 Chinook. Jego maksymalna masa startowa wynosi 22 668 kg, a udźwieg 8430 kg. Wirniki mają po 18,3 m średnicy i są napędzane przez dwa silniki, które rozwijają moc 5490 kW (rys. 1.19).

### 1.3.1.3. Dwuwirnikowy układ poprzeczny

W dwuwirnikowym układzie poprzecznym występują dwa wirniki nośne położone w jednej płaszczyźnie z obu stron kadłuba i obracające się w przeciwnych

kierunkach z jednakową prędkością (rys. 1.15d). Wobec tego momenty oporowe wirników nośnych równoważą się wzajemnie. Podobnie jak w dwuwirnikowym układzie podłużnym wirniki nośne w układzie poprzecznym mogą częściowo się przesłaniać, pod warunkiem zapewnienia niezawodnej synchronizacji obydwu wirników.

Układ ten ma następujące zalety:

- dobrą sterowność i wystarczającą stateczność podłużną i poprzeczną;
- mniejsze w porównaniu z innymi układami opory indukowane w locie poziomym ze względu na dodatni wpływ wirników, co pociąga za sobą większą ekonomiczność i wzrost zasięgu;
- dobre warunki do zapewnienia wygody załodze i pasażerom w przypadku zastosowania dwu silników i wyniesienia ich na boki kadłuba.

Do wad należą:

- skomplikowana konstrukcja;
- skomplikowane urządzenia sterownicze;
- konieczność niezawodnej synchronizacji obrotów wirników nośnych, szczególnie w przypadku ich przesłaniania się.

Dwuwirnikowy układ poprzeczny jest aerodynamicznie symetryczny, wpływa to dodatkowo na stateczność i sterowność śmigłowca zbudowanego w tym układzie.

Układ poprzeczny był popularny w początkowym okresie rozwoju śmigłowców, później zanikł na wiele lat. W początku lat 70. został użyty przez konstruktorów radzieckich w największym śmigłowcu świata – czterosilnikowym transportowym Mi-12 (rys. 1.20).



**Rys. 1.20.** Mi-12 – największy śmigłowiec świata [fot. [www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org)]

Maksymalna masa startowa śmigłowca Mi-12 wynosi 105 000 kg, udźwig ok. 40 000 kg. Łączna moc silników wynosi ok. 19 000 kW. Wirniki mają po 32 m średnicy.



#### 1.3.1.4 Dwuwirnikowy układ współosiowy

Dwuwirnikowy układ współosiowy charakteryzują dwa wirniki osadzone na wspólnej osi i obracające się w przeciwnych kierunkach z jednakową liczbą obrotów (rys. 1.15c).

Płaszczyzny obrotu wirników odsunięte są od siebie na taką odległość, że nie możliwe staje się zetknięcie łopat górnego i dolnego wirnika w jakichkolwiek warunkach lotu. Momenty oporowe wirników równoważą się wzajemnie.

Do zalet tego układu zalicza się:

- stosunkowo mały opór czołowy ze względu na krótki, właściwie ukształtowany kadłub;
- małe wymiary zewnętrzne;
- lepszy współczynnik wykorzystania masy (w porównaniu z innymi układami dwuwirnikowymi), co spowodowane jest brakiem systemu wałów sprzęgających; sprzężenie obrotów wirników jest zapewnione we wnętrzu przekładni.



**Rys. 1.21.** Ka-52 Aligator – śmigłowiec dwuwirnikowy w układzie współosiowym [fot. vala, [www.shutterstock.com](http://www.shutterstock.com)]

Do wad należy zaliczyć:

- skomplikowane urządzenia sterownicze i skomplikowany układ przenoszenia napędu;
- szkodliwe oddziaływanie wzajemne wirników nośnych;
- niewystarczająca stateczność kierunkowa;
- niebezpieczeństwo zderzenia się łopat obu wirników.

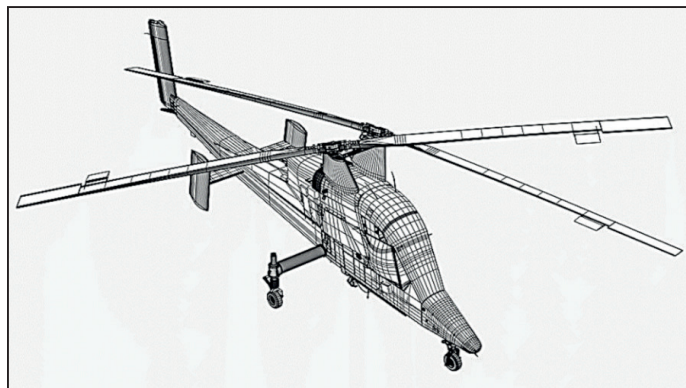


**Rys. 1.22.** S-96 – współosiowy dwuwirnikowy śmigłowiec z dodatkowym napędem śmigłem pchającym [fot. [www.sikorsky.com.au](http://www.sikorsky.com.au)]

Układ współosiowy jest obecnie stosowany właściwie już tylko w rosyjskich śmigłowcach pochodzących z biura konstrukcyjnego im. N. Kamowa. W lotnictwie cywilnym najbardziej znany jest uniwersalny dwusilnikowy śmigłowiec Ka-26 z wirnikami o średnicy 13 m, maksymalnej masie startowej 3250 kg i mocy silników 380 kW. Lotnictwo wojskowe Federacji Rosyjskiej użytuje inne śmigłowce tego układu. W układzie tym został także zbudowany śmigłowiec szturmowy Ka-52 Aligator (rys. 1.21) oraz opracowany przez amerykański koncern Sikorskiego amerykański śmigłowiec zespolony S-96 (rys. 1.22).

#### 1.3.1.5. Układ z krzyżującymi się wirnikami (układ Flettnera)

W układzie z krzyżującymi się wirnikami dwa wirniki umieszczone są z obu stron kadłuba (piasty ich znajdują się w niewielkiej odległości od siebie) (rys. 1.23). Osie wirników nośnych odchylone są na zewnątrz. Obroty wirników nośnych są zsynchronizowane (wirniki obracają się z jednakową prędkością kątową). Otrzymuje się jak gdyby zazębienie łopat wirników, oczywiście bez ich wzajemnego stykania się. Konstrukcja śmigłowca w układzie z krzyżującymi się wirnikami została opracowana w 1937 r. przez Antona Flettnera i zespół inżynierów z firmy Anton Flettner GmbH i została zastosowana w niemieckich helikopterach Kriegsmarine z czasów II wojny światowej: Flettner Fl 265 i Flettner Fl 282 (rys. 1.10). Od 1947 r. układ Flettnera jest stosowany i rozwijany w Stanach Zjednoczonych przez firmę Kaman.



**Rys. 1.23.** Schemat układu śmigłowca z krzyżującymi się wirnikami

Momenty oporowe wirników nośnych równoważą się tylko względem osi pionowej śmigłowca, natomiast ich składowe względem osi poprzecznej sumują się i oddziałują na śmigłowca w postaci momentu pochylającego, który należy uwzględnić przy obliczaniu równowagi i stateczności statycznej śmigłowca. W istocie swym układ ten stanowi graniczne zbliżenie dwu wirników nośnych układu poprzecznego z przesłaniającymi się wirnikami. Schemat śmigłowca z krzyżującymi się wirnikami nośnymi został przedstawiony na rys. 1.23.

Zaletami omawianego układu są:

- stosunkowo mały opór czołowy, dzięki krótkiemu opływowemu kadłubowi;
- niewielkie wymiary zewnętrzne.

Do wad układu należy zaliczyć:

- konieczność niezawodnej synchronizacji wirników nośnych;
- skomplikowany układ przenoszenia napędu;
- zagrożenie bezpieczeństwa ludzi i możliwość zaczepiania o ziemię końcami łopatek;
- powstawanie momentu pochylającego pochodzącego od momentów oporowych, co komplikuje sprowadzanie śmigłowca do równowagi.

Śmigłowce z krzyżującymi się wirnikami budowane były w niewielkich seriach. W układzie tym zbudowany został m.in. śmigłowiec Kaman K-MAX (rys. 1.24) o maksymalnej masie startowej 5443 kg. Układ Fletnera odznacza się dobrą wydajnością masową oraz dostateczną statecznością i sterownością.





**Rys. 1.24.** Zbudowany w układzie Fletnera śmigłowiec Kaman K-MAX [fot. George Melendez, [www.wikimedia.org](http://www.wikimedia.org)]

### 1.3.1.6. Układy śmigłowców wielowirnikowych

Śmigłowce o tych układach mogą mieć trzy, cztery lub więcej wirników nośnych. Do chwili obecnej nie zbudowano żadnego śmigłowca ciężkiego w układzie wielowirnikowym. Pojawiły się natomiast lekkie śmigłowce wielowirnikowe z napędem elektrycznym lub hybrydowym. Układ wielowirnikowy jest najpopularniejszym układem małych bezzałogowych statków powietrznych, zwanych popularnie dronami. Wirniki tych wiroplątów są z reguły śmigłami o stałym skoku, co bardzo upraszcza konstrukcję. Śmigła obracają się parami w przeciwnych kierunkach (w celu zrównoważenia momentów reakcyjnych). Sterowanie ciągiem w takim śmigłowcu odbywa się poprzez regulację prędkości obrotowych śmigieł, a nie, jak ma to miejsce w klasycznych śmigłowcach, poprzez realizowaną przez tarczę sterującą okresową zmianę kąta natarcia nastawienia łopat wirnika nośnego. Najbardziej popularne są mikrowiropłaty czterowirnikowe (tzw. quadrotory lub quadrokoptery), choć zdarzają się konstrukcje z sześcioma, ośmioma, a także większą liczbą wirników nośnych (rys. 1.25).



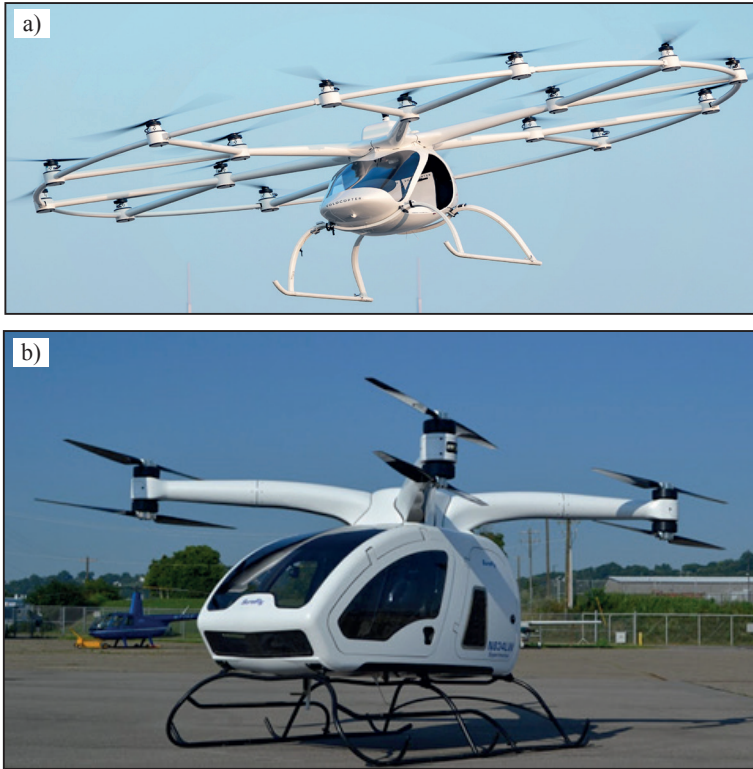
**Rys. 1.25.** Czterowirnikowy mikrowiropłat Atrax (ITWL) oraz przykład sześciowirnikowego śmigłowca bezzałogowego klasy mikro (Hexa-4) [fot. ITWL; Alexander Glinz, [www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org)]

Mimo pozornej prostoty idei sterowania wielowirnikowymi dronami (brak тарczy sterującej i okresowych zmian kąta nastawienia łopat wirników), do stabilizacji ich lotu niezbędne są zaawansowane, komputerowe systemy sterowania.

Oprócz małych bezzałogowych wielowirnikowych śmigłowców (o masie z rezerwy nie przekraczającej 30 kg), budowane są także cięższe śmigłowce wielowirnikowe z elektrycznym napędem wirników nośnych, służące do przewożenia 2–4 pasażerów. Takie śmigłowce mają spełniać funkcję autonomicznych taksówek powietrznych. Niektóre z tych konstrukcji są całkowicie elektryczne, zasilane za pomocą akumulatorów litowo-jonowych, lub są urządzeniami hybrydowymi. Przykładem może być śmigłowiec Volocopter 2X (rys. 1.26a). Volocopter 2X jest autonomicznym statkiem powietrznym, który może zabrać na pokład maksymalnie dwie osoby. Wiropląt ten jest napędzany silnikami elektrycznymi przekazującymi moc na 18 rotorów i przy prędkości 68 km/h pozwala przelecieć 27 km. Jego prędkość maksymalna wynosi 99 km/h, a przy prędkości 49 km/h można lecieć przez 27 min. Cała konstrukcja bez pasażerów waży 290 kg. Pełne naładowanie akumulatorów litowo-jonowych zajmuje 120 min. W sytuacji braku dostatecznej ilości czasu na ładowanie, rozładowaną baterię można wymienić na nową, wcześniej naładowaną.

Przykładem autonomicznej latającej taksówki o napędzie hybrydowym jest wiropłąt SureFly amerykańskiej firmy Workhorse (rys. 1.26b). SureFly jest zbudowany w układzie oktokoptyra (ośmiowirnikowca) i umożliwia transport dwóch osób. Jego konstrukcja obejmuje cztery ramiona z dwoma stałymi, przeciwbieżnymi śmigłami na każdym z nich. Hybrydowy napęd łączy silnik benzynowy z generatorem wytwarzającym energię elektryczną. Śmigłowiec posiada także akumulatory litowo-jonowe stanowiące dodatkowe źródło energii elektrycznej. Zasięg śmigłowca wynosi ok. 110 km. Wiropląt wyposażony jest także w spadochron balistyczny, który jest przeznaczony do bezpiecznej ewakuacji pasażerów w sytuacjach awaryjnych.

Bardzo ciekawy projekt superciężkiego śmigłowca transportowego i latającego dźwigu powstał w latach 80. ubiegłego stulecia w biurze konstrukcyjnym im. Michaiła Miła. Projekt oznaczono jako Mi-32. W wyniku przeprowadzonych obliczeń i eksperymentów konstruktorzy zdecydowali się na niekonwencjonalny schemat kadłuba maszyny. Kadłub śmigłowca Mi-32 miał kształt trójkątnej ramy. Na wierzchołkach trójkątnego kadłuba zainstalowano gondole z zespołem napędowym wirników nośnych (rys. 1.27). Takie rozmieszczenie zespołów napędowych znacznie zmniejszyło prawdopodobieństwo wystąpienia rezonansu powietrznego. Ponadto dzięki takiemu usytuowaniu wirników oraz ich napędów konstruktorzy uniknęli bardzo trudnej do realizacji technicznej synchronizacji wirników. Załogę śmigłowca miało stanowić dwóch pilotów, inżynier pokładowy i operator dźwigu. Stanowisko operatora było usytuowane w identyczny sposób jak w śmigłowcu Mi-10K, czyli w sposób zapewniający wystarczającą widoczność podczas wykony-



**Rys. 1.26.** Wielowirnikowe autonomiczne taksówki powietrzne: a) Volocopter 2X; b) SureFly [fot. a) [www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org); b) [www.urban-air-taxi.com](http://www.urban-air-taxi.com)]

wania prac dźwigowych i monitorowania ruchów podwieszonego pod śmigłowcem ładunku. Śmigłowiec Mi-32 miał wewnętrzny przedział ładunkowy (dla ładunków o małych gabarytach) oraz korytarz umożliwiający przemieszczanie załogi. Ładunek o masie do 80 ton miał być transportowany na zewnątrz śmigłowca za pomocą trzech lin zamocowanych do naroży trójkątnego kadłuba. Taka metoda podwieszenia ładunku praktycznie eliminowała oddziaływanie ruchów ładunku na dynamikę lotu śmigłowca. Ponieważ wszystkie wirniki nośne miały obracać się w tym samym kierunku, wypadkowy moment oporowy miał być równoważony przez odpowiednie pochylenie linii działania ciągu każdego z wirników nośnych. Składowe ciągi wirników tworzyłyby moment względem osi pionowej przechodzącej przez środek ciężkości śmigłowca, który równoważyłby wypadkowy moment oporowy wirników. Napęd śmigłowca stanowi sześć silników turbinowych typu D136 o łącznej mocy 51 MW. Silniki te są umieszczone parami w każdej z trzech gondol i napędzają za pomocą zmodernizowanej przekładni śmigłowca Mi-26 (VR-26) ośmiołopatowe wirniki nośne o średnicy 32 m. Silniki, piasty wirników, tarcze sterujące i łopaty wirników nośnych miały być identyczne jak w śmigłowcu Mi-26. Na

rys. 1.27 przedstawiono rysunek oraz zdjęcia makiety i modelu do badań w tunelu aerodynamicznym śmigłowca Mi-32.



**Rys. 1.27.** Projekt ciężkiego trójwirnikowego śmigłowca – latającego dźwigu Mi-32

Zaletami omawianego układu są:

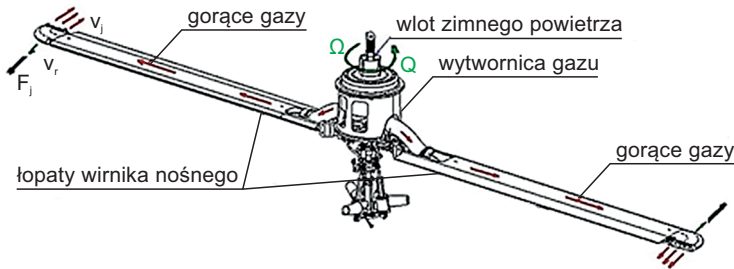
- dobra stateczność i sterowność;
- ten sam typ łopat i piast we wszystkich wirnikach;
- duży zakres możliwych odmian wyważenia.

Wadami są:

- skomplikowana i ciężka konstrukcja;
- duży opór czołowy;
- skomplikowane urządzenie sterownicze;
- duże wymiary zewnętrzne.

#### **1.3.1.7. Układy śmigłowców odrzutowych (z bezpośrednim napędem wirnika nośnego)**

Śmigłowcem odrzutowym nazywamy taki śmigłowiec, który posiada napęd odrzutowy do obracania wirnika nośnego. Przy napędzie tym moment wirnika nośnego pochodzący od oporu aerodynamicznego jest równoważony momentem wywołanym przez ciąg silników odrzutowych lub dysz umieszczonych zwykle na końcu łopat. Tak więc wypadkowy moment obrotowy na piąście wirnika nośnego w tym układzie jest równy zero. W śmigłowcu odrzutowym nie wymaga się stosowania śmigła ogonowego w odróżnieniu od śmigłowców jednowirnikowych z bezpośrednim napędem mechanicznym. Na niektórych śmigłowcach odrzutowych śmigło ogonowe wykorzystuje się jednak do sterowania kierunkowego. Idea bezpośredniego napędu łopat wirnika nośnego została przedstawiona na rys. 1.28.



**Rys. 1.28.** Schemat bezpośredniego napędu łopat wirnika nośnego [1.4]

Możliwe są trzy sposoby realizacji odrzutowego napędu wirnika nośnego:

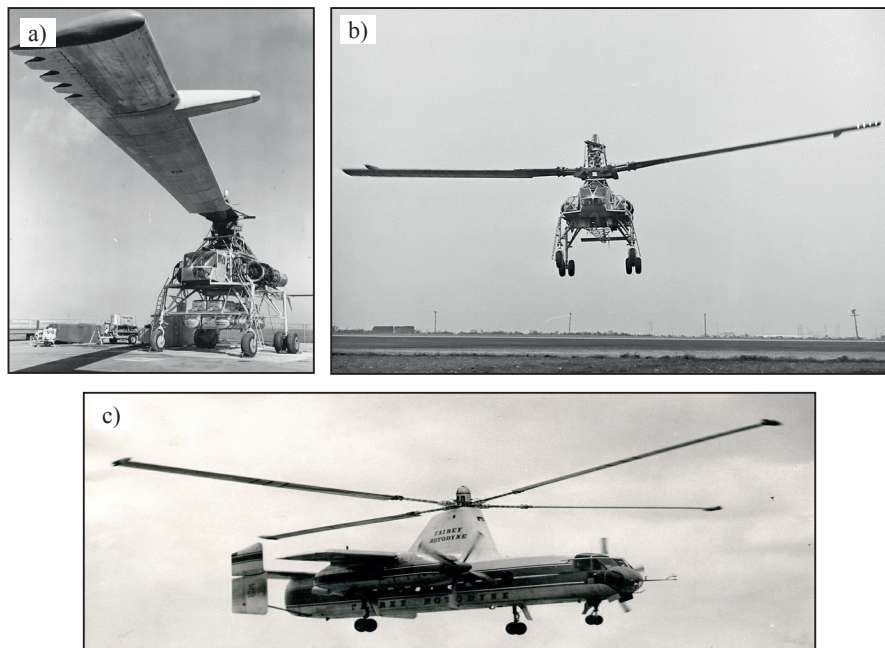
1. Przez umieszczenie na łopatach (zwykle na końcach łopat) silników strumieniowych lub pulsacyjnych. Paliwo do silników doprowadza się z kadłuba poprzez piastę i łopaty.
2. Poprzez umieszczenie na końcach łopat komór spalania dysz odrzutowych. Do komór spalania poprzez piastę i łopaty doprowadza się paliwo i sprężone powietrze pod ciśnieniem od 110 kPa do 450 kPa. Specjalna sprężarka napędzana jest silnikiem tłokowym albo strumieniowym, umieszczonym wraz z nią w kadłubie.
3. Przez umieszczenie na końcach łopat dysz odrzutowych lub szczelin wylotowych, przez które uchodzą gazy lub sprężone powietrze, doprowadzane poprzez piastę i łopaty z generatora gazu umieszczonego w kadłubie. W odróżnieniu od drugiego sposobu realizacji napędu odrzutowego, w tym przypadku paliwo nie spala się w łopatach, a zatem nie ma tu komór spalania.

Odpowiednio do powyższych trzech sposobów realizacji napędu odrzutowego wirników, przyjął się podział śmigłowców odrzutowych również na trzy następujące rodzaje:

1. śmigłowce odrzutowe z silnikami strumieniowymi lub pulsacyjnymi (rys. 1.14d, 1.30);
2. śmigłowce odrzutowe ze sprężarką i komorami spalania umieszczonymi na końcach łopat (rys. 1.29);
3. śmigłowce odrzutowe o napędzie ciśnieniowym z dyszami lub szczelinami wylotowymi (bez komór spalania) na końcach łopat (przykład takiej konstrukcji śmigłowca przedstawiono na rys. 1.16).

Sterowanie kierunkowe w jednowirnikowym śmigłowcu odrzutowym odbywa się albo za pomocą powierzchni sterującej umieszczonej w strumieniu wirnika nośnego, albo za pomocą specjalnego śmigła ogonowego lub też przez wykorzystanie reakcji strumienia gazów silnika turbospalinowego (w przypadku śmigłowca odrzutowego z napędem ciśnieniowym). Na rys. 1.14d, 1.29 i 1.30 przedstawiono przykładowe konstrukcje śmigłowców odrzutowych.





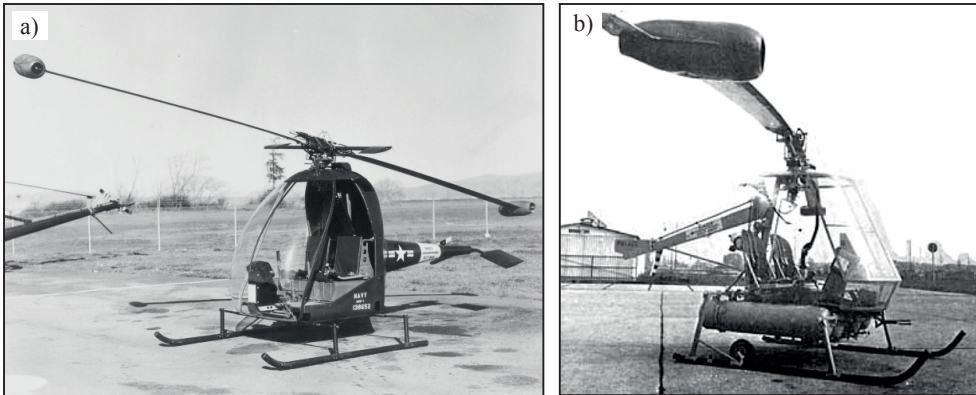
**Rys. 1.29.** Śmigłowce z bezpośrednim napędem wirnika nośnego z tzw. „obiegami gorącym” – na końcach łopat znajdują się komory spalania, paliwo i powietrze z za sprężarek silników dopływają do komór spalania przewodami znajdującymi się wewnątrz łopat wirników nośnych: a i b) latający dźwig Hughes (Kellett) XH-17 (1952); c) brytyjski wiropłat Fairey Rotodyne [fot. a) [www.gallery.vtol.org](http://www.gallery.vtol.org), b) [www.oldmachinepress.com](http://www.oldmachinepress.com), c) [www.theengineer.co.uk](http://www.theengineer.co.uk)]

Zaletami śmigłowców odrzutowych są:

- dość prosty układ przenoszenia napędu;
- duża niezawodność działania;
- mniejsza liczba źródeł powodujących drgania;
- niski koszt;
- wysoka wydajność masowa.

Do wad należy zaliczyć:

- duże zużycie paliwa;
- skomplikowaną budowę specjalnych silników, mającą na celu zapewnienie normalnej pracy w polu sił odśrodkowych na końcach łopat;
- znaczny hałas odrzutowych silników strumieniowych i pulsacyjnych;
- skomplikowaną konstrukcję piasty i łopat wirnika nośnego w przypadku doprowadzania przez nie powietrza oraz konieczność uszczelniania przewodów powietrznych.



**Rys. 1.30.** Śmigłowce z wirnikiem napędzanym silnikami strumieniowymi: a) lekki śmigłowiec Hiller HOE-1 Hornet; b) eksperymentalny śmigłowiec McDonnell XH-20 Little Henry [fot. a) [www.vertipedia-legacy.vtol.org](http://www.vertipedia-legacy.vtol.org), b) [www.aviation.stackexchange.com](http://www.aviation.stackexchange.com)]

Ze względu na duże zużycie paliwa, śmigłowce odrzutowe z silnikami strumieniowymi lub pulsacyjnymi, umieszczonymi na końcach łopatek, można jak dotychczas stosować tylko do lotów krótkich i o małym zasięgu. Układ śmigłowca odrzutowego z silnikami umieszczonymi na końcach łopatek nie jest obecnie stosowany. Problemem był bardzo wysoki poziom hałasu śmigłowca oraz duże zużycie paliwa.

#### 1.3.1.8. Układy śmigłowców zespolonych (wirowców)

Każdy śmigłowiec zbudowany według poprzednio omówionych układów porusza się w locie poziomym dzięki pochyleniu wirnika nośnego lub wirników nośnych względem poziomu. Oznacza to, że o prędkości ruchu śmigłowca do przodu decyduje składowa pozioma ciągu wirnika nośnego. We współczesnych śmigłowcach prędkość obwodowa końców łopatek wirnika nośnego osiąga wartość  $\omega R \approx 200 - 240$  m/s. Dalszy wzrost prędkości obwodowej podczas lotu z prędkością maksymalną może doprowadzić do znacznego wzrostu wpływu ściśliwości powietrza na charakterystyki aerodynamiczne wirnika nośnego. Oderwanie strumienia na końcach łopatek następuje przy najmniejszych koniecznych wartościach obciążenia tarczy wirnika nośnego już przy wartościach współczynnika prędkości

$$\mu = \frac{V}{\Omega R} = 0,3 - 0,35, \text{ stąd wynika, że prędkość maksymalna śmigłowca jednowirnikowego w układzie klasycznym nie może przekroczyć } 340 \text{ km/h.}$$

Zwiększenie prędkości lotu wymaga zwiększenia kąta pochylenia osi wirnika. Pochylenie wirnika nośnego uzyskuje się częściowo przez pochylenie całego śmigłowca. Aby osią-

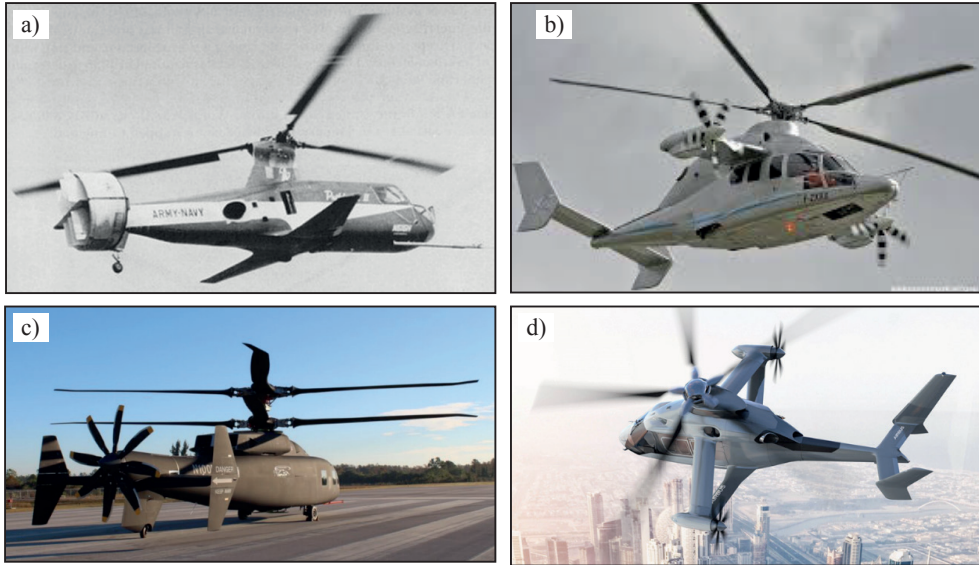
gnąć prędkość maksymalną większą od 340 km/h, należy zapobiec oderwaniu się strumienia powietrza na powracających łopatach wirnika. Oznacza to, że wirnik nośny musiałby pracować przy większych wartościach współczynnika prędkości, np. przy  $\mu = 0,5-0,6$ . Takie wartości współczynnika prędkości można osiągnąć przez odciążenie tarczy wirnika nośnego. Można to uzyskać poprzez uwolnienie wirnika nośnego od roli śmigła. Oznacza to, że ciąg potrzebny do pokonania oporu czołowego śmigłowca musi być uzyskany za pomocą śmigła lub silnika odrzutowego. Korzystne jest także odciążenie wirnika nośnego przez zastosowanie na śmigłowcu skrzydła o niewielkiej rozpiętości. Skrzydło odciąża wirnik nośny i pozwala przy dużych prędkościach zmniejszyć kąty natarcia łopat, dzięki czemu unika się oderwania strumienia powietrza na łopatach powracających.



**Rys. 1.31.** Schemat śmigłowca zespólnego (wirowca)

Zastosowanie w śmigłowcu obok wirnika nośnego nieruchomego skrzydła i śmigła, daje w wyniku konstrukcję śmigłowca zespólnego, zwanego także wirowcem. Śmigłowiec zespólny może osiągnąć w locie poziomym prędkość maksymalną rzędu 450 km/h, tj. mniej więcej półtora raza większą niż klasyczny śmigłowiec jednowirnikowy. Przy projektowaniu wirowca w dowolnym układzie, należy na równi z dążeniem do uzyskania dużej prędkości maksymalnej w locie poziomym, zapewnić zachowanie specyficznych lotnych własności śmigłowca, (pionowy start i możliwość zawisu), przy wystarczającej wydajności masowej. Na rys. 1.31 przedstawiono schemat jednowirnikowego śmigłowca zespólnego. Na rys.1.32a przedstawiono inny jednowirnikowy wirowiec, zbudowany w Stanach Zjednoczonych w 1962 r. przez wytwórnię Piasecki Aircraft, pod nazwą Piasecki 16H Pathfinder, natomiast na rys. 1.32b przedstawiony został współczesny śmigłowiec zespólny Eurokopter X3, który osiągnął prędkość 400 km/h.





**Rys. 1.32.** Śmigłowce zespolone (wirowce): a) Piasecki 16H Pathfinder (1962); b) Eurocopter X3 (2012); c) Sikorsky-Boeing SB 1 Defiant (2019); d) projekt wirowca koncernu Eurocopter [fot. a) [www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org), b) [www.samolotypolskie.pl](http://www.samolotypolskie.pl), c) [www.defence24.pl](http://www.defence24.pl), d) [www.altair.com.pl](http://www.altair.com.pl)]

W wirowcach tego typu moment oporowy wirnika nośnego jest równoważony momentem wytwarzanym bądź przez ciąg śmigła lub śmigieł (jak to ma miejsce w wirowcu Eurocopter X3), przy czym wartość tego momentu równa jest iloczynowi ciągu i odległości osi śmigła od osi kadłuba, bądź momentem wytwarzanym przez dwa śmigła. W wirowcu Eurocopter X3 ciągi śmigieł w warunkach zawisu, pionowego wznoszenia się i opadania skierowane są w przeciwnych kierunkach. W locie poziomym skierowany przeciwnie do kierunku lotu ciąg śmigła stopniowo zmniejsza się i przy prędkości maksymalnej, w wyniku odpowiedniej zmiany skoku, również i to śmigło daje ciąg skierowany do przodu. W miarę wzrostu prędkości lotu w śmigłowcu zespolonym moment oporowy wirnika nośnego zmniejsza się, gdyż większa część mocy przekazywana jest śmigłom, a przy prędkości maksymalnej wirnik nośny znajduje się w stanie bliskim autorotacji i pobiera bardzo małą moc. Podobnie przy zastosowaniu dwóch śmigieł moment równoważący może zmieniać się w bardzo szerokich granicach, od wartości maksymalnej w zawisie do niewielkiej wartości przy prędkości maksymalnej. W przypadku wirowca z jednym śmigłem napędowym moc pobierana przez to śmigło w zawisie jest większa niż przy zastosowaniu dwóch śmigieł. Ponadto moment ciągu śmigła przy prędkości maksymalnej jest dość duży i należy go równoważyć momentem oporowym wirnika nośnego (czyli przekazywać mu dużą moc) lub momentem siły bocznej usterze-

nia kierunkowego. Należy dążyć do projektowania wirowców charakteryzujących się mniejszą stratą mocy na zrównoważenie momentu oporowego, przy jednoczesnym zwiększeniu wydajności masowej. Z tego punktu widzenia korzystniejsze są wirowce dwuwirnikowe (przykładem może być przedstawiony na rys. 1.32c śmigłowiec zespolony Sikorsky-Boeing SB 1 Defiant). Jeśli na tych wirowcach zastosuje się wyłączenie śmigieł napędowych w zawisie, to pewne zwiększenie ciężaru konstrukcji, wynikające z zastosowania skrzydła i śmigieł, zostanie zrównoważone zaoszczędzeniem mocy, co w wyniku końcowym podwyższa wydajność masową. Można również w zawisie nie wyłączać śmigieł, lecz nastawić je na skok zerowego ciągu. Stratę mocy można wówczas oszacować na 6% mocy całkowitej, a konstrukcja znacznie się uprości (niepotrzebne są wtedy sprzęgła rozruchowe śmigieł). Wydajność masowa wirowców z bezpośrednim napędem mechanicznym może okazać się nie mniejsza niż wydajność klasycznych śmigłowców jednowirnikowych, gdyż przy starcie pionowym można tu wykorzystać optymalny kąt nastawienia łopat wirnika nośnego i uzyskać maksymalne współczynniki jakości wirnika. Śmigłowce zbudowane w układzie klasycznym nie dają takich możliwości, ze względu na konieczność uwzględniania zjawiska oderwania się strumienia powietrza na powracających łopatach wirnika nośnego, które ma miejsce przy prędkościach zbliżonych do maksymalnej.

Dla wirowca z bezpośrednim napędem mechanicznym wirników nośnych najkorzystniejszy jest układ poprzeczny, ponieważ w tym przypadku skrzydło stanowić będzie pracującą część konstrukcji, wiążącą dwie gondole silników z kadłubem. Wskutek zmniejszenia indukowanego oporu układu nośnego, własności wirowca o układzie poprzecznym w locie z prędkością przelotową są wyższe niż przy zastosowaniu innych układów. Stosunkowo duże straty przy pionowym wznoszeniu wykazuje wirowiec o układzie jednowirnikowym (rys. 1.29c). Wirowiec w dowolnym układzie należy projektować w taki sposób, aby cała rozporządzalna moc była w pełni wykorzystana zarówno w czasie wznoszenia i zawisu, jak i w innych warunkach lotu.

### 1.3.1.9. Układy wirolotów

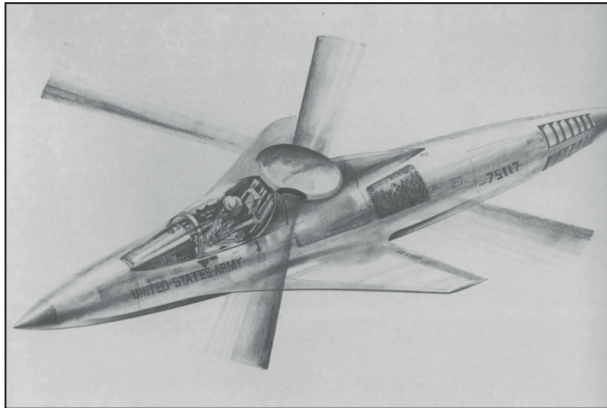
Budowa śmigłowca, który w czasie lotu ulega przekształceniu w samolot, czyli tzw. wirolotu, stanowi dalszy krok na drodze zwiększenia prędkości lotu. Wirolot charakteryzuje się tym, że podczas startu, lotu pionowego i lądowania siła nośna (wypadkowa siła aerodynamiczna) powstaje na poruszonym silniku wirnika nośnym lub umieszczonych na skrzydłach wirnikach nośnych. W locie postępowym wirniki nośne przechylają się do przodu o  $90^\circ$  i zmieniają się w śmigła. W locie postępowym siła nośna powstaje na skrzydle. Prędkość poziomą wirolot uzyskuje głównie dzięki ciągowi śmigieł. W latach 1949–1991 zbudowano kilkanaście wirolotów doświadczalnych. W chwili obecnej jedynym eksploatowanym statkiem

powietrznym łączącym w sobie własności śmigłowca i samolotu jest przedstawiony na rys. 1.33 Boeing V-22 Osprey. Prędkość wirolotu V-22 przekracza 500 km/h.



**Rys. 1.33.** Wirolot Boeing V-22 Osprey [fot. [www.express.co.uk](http://www.express.co.uk)]

Można powiedzieć, że koncepcja wirolotu polega na tym, że ma on wznosić się pionowo podobnie jak śmigłowiec, tj. za pomocą wirnika nośnego lub wirników nośnych, a następnie rozpoczynać lot poziomy przez obrót całego wirolotu lub wirnika nośnego o  $90^\circ$ , przy czym wirnik nośny zaczyna spełniać funkcję śmigłowca ciągnącego.



**Rys. 1.34.** Koncepcja szybkiego wirowca LHX opracowana w firmie Hughes [fot. [www.hushkit.net](http://www.hushkit.net)]

W latach 80. ubiegłego wieku, w ramach programu LHX (Light Helicopter Experimental), w Stanach Zjednoczonych opracowano interesującą koncepcję

wirolotu z blokowanym wirnikiem nośnym. Firma Hughes, produkująca śmigłowiec bojowy AH-64 Apache, zaproponowała najbardziej innowacyjną koncepcję śmigłowca LHX. Zaproponowane rozwiązanie było niezwykle odważne i zupełnie niepodobne do żadnej maszyny latającej. Hughes LHX SCAT (rys. 1.34) nie miał śmigła ogonowego, zamiast tego korzystał z systemu NOTAR, co pozwoliło konstruktorom uzyskać kształt, który miał znacznie mniejszy opór niż jakikolwiek inny śmigłowiec. Kadłub miał skośne skrzydła i ostro zakończoną sekcję nosową, bardziej przypominał myśliwiec naddźwiękowy niż śmigłowiec szturmowy. Przy większych prędkościach lotu wirnik śmigłowca Hughes LHX miał się zatrzymywać i przekształcać w nieruchomą powierzchnię nośną, a ciąg potrzebny do lotu miał wytwarzać silnik odrzutowy. Śmigłowiec Hughes LHX SCAT miał osiągać prędkość ponad 600 km/h.

## PODSTAWY AERODYNAMIKI ŚMIGŁOWCA

Aby obliczyć osiągi śmigłowca i zrozumieć istotę jego ruchu wraz z problemami stateczności, należy najpierw zastanowić się nad zjawiskami aerodynamicznymi zachodzącymi podczas ruchu wirnika nośnego. Wirnik nośny jest zasadniczym elementem śmigłowca, dlatego też należy rozpocząć rozważania właśnie od wirnika nośnego.

Ruch śmigłowca składa się z:

- lotu pionowego śmigłowca, do którego zaliczamy pionowe wznoszenie i opadanie oraz zawis (tj. lot, w którym śmigłowiec nie zmienia swego położenia pionowego i poziomego);
- opadania autorotacyjnego (opadanie z samoskrętem);
- lotu poziomego śmigłowca.

Każdy z tych ruchów ma swoje osobliwości i praca wirnika nośnego podczas tych ruchów różni się od siebie. Dlatego też te ruchy zostaną rozważone osobno, by uwypuklić istotne zjawiska mające decydujący wpływ na charakterystyki aerodynamiczne wirnika nośnego, a tym samym i na osiągi śmigłowca.

### 2.1. Lot pionowy śmigłowca

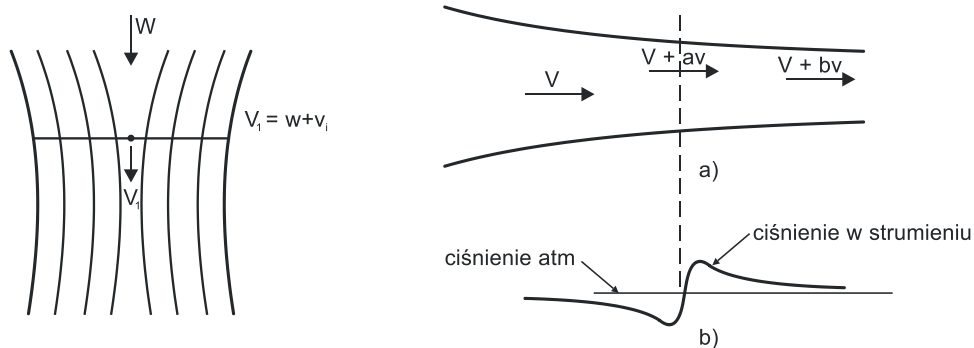
Rozważania rozpoczniemy od lotu pionowego i zawisu, ponieważ na tych zakresach lotu istnieje symetryczny rozkład prędkości w tarczy wirnika nośnego, a warunki pracy elementu łopaty, umieszczonego na odpowiednim promieniu, podczas ruchu po okręgu nie ulegają zmianie. W naszych rozważaniach praca wirnika w locie wiszącym oparta jest na teorii strumieniowej i teorii elementu łopaty.

Kształt strumienia przepływającego przez tarczę wirnika nośnego na zakresie lotu pionowego lub zawisu przedstawiono na rys. 2.1.

### 2.1.1. Teoria strumienia

W teorii strumieniowej przyjmuje się następujące założenia [1.2, 1.4, 1.6–1.8, 1.10, 1.13, 1.14, 1.17]:

1. Wirnik nośny traktowany jest jako urządzenie przyspieszające przepływający strumień powietrza bez strat ciągu na brzegach łopatek. Zakłada się przy tym, że wirnik ma nieskończoną liczbę łopatek.
2. Moc tracona na powstawanie ciągu używana jest jedynie na wytworzenie energii kinetycznej strumienia przepływającego przez tarczę wirnika w kierunku osiowym. Zakłada się też, że ciecz jest doskonała, tj. bez tarcia, dlatego też straty na opór profilowy i na tarcie łopatek o powietrze równe są zeru.
3. Tarcza wirnika jest nieskończenie cienka, dlatego też nie występuje skok prędkości na brzegach tarczy.



**Rys. 2.1.** Teoria strumieniowa wirnika nośnego śmigłowca – przepływ powietrza przez tarczę wirnika, rozkłady prędkości i ciśnienia

#### 2.1.1.1. Prędkość i ciśnienie w strudze wirnika

Rozpatrzmy wirnik (rys. 2.1a) poruszający się od prawej strony ku lewej, tak że prędkość strumienia swobodnego w stosunku do wirnika jest równa  $V$ . Założmy wzrost prędkości przed tarczą równą  $aV$ , zaś wzrost prędkości strumienia indukowanego za tarczą w oddaleniu  $bV$ .

W warunkach rozpatrywanych praca wykonywana w jednostce czasu przez ciąg wirnika winna być równa przyrostowi energii kinetycznej strumienia odrzuconego przez wirnik w tym samym czasie

$$T(W + aW) = \Delta E_k \quad (2.1)$$

Jeżeli przez  $A_{WN}$  oznaczymy powierzchnię tarczy wirnika nośnego, zaś przez  $\rho$  gęstość powietrza, to ciąg wytwarzany przez wirnik możemy wyrazić jako zmianę pędu:

$$T = [\rho A_{WN} (W + aW)] bW \quad (2.2)$$

Przyrost energii kinetycznej powietrza równa się połowie iloczynu masy powietrza przepływającego przez tarczę wirnika i różnicy kwadratów prędkości w przekrojach nieskończenie oddalonych przed i za wirnikiem:

$$\Delta E_k = \frac{\rho A_{WN}}{2} (W + aW) [(W + bW)^2 - W^2] \quad (2.3)$$

Podstawiając wartości na  $T$  (2.2) i  $\Delta E_k$  (2.3) do równania (2.1), po kolejnych przekształceniach przedstawionych poniżej otrzymujemy:

$$[\rho A_{WN} W (1+a) bW] W (1+a) = \frac{1}{2} \rho A_{WN} W^3 (1+a) (b^2 + b)$$

$$\rho A_{WN} W^3 (1+a)^2 b = \frac{1}{2} \rho A_{WN} W^3 (1+a) (b^2 + b)$$

$$2(1+a)b = (b^2 + 2b)$$

$$2b + 2ab = b^2 + 2b$$

$$2ab = b^2$$

$$b = 2a$$

Zatem rozwiązując powyższe równanie względem  $b$  otrzymamy:

$$b = 2a \quad (2.4)$$

Równanie (2.4) świadczy o tym, że prędkość indukowana w tarczy wirnika równa jest połowie sumarycznego przyrostu prędkości powietrza po przejściu przez wirnik. Ciśnienie statyczne strugi w punktach nieskończenie oddalonych od tarczy przed i za wirnikiem równe jest statycznemu ciśnieniu strumienia niezaburzonego. Na rys. 2.1b podany jest rozkład tego ciśnienia w strumieniu przepływającym przez wirnik.

#### 2.1.1.2. Prędkość indukowana w zawisie

Równanie (2.4) możemy wykorzystać do wyznaczenia prędkości indukowanej w zawisie. W zawisie pionowa prędkość śmigłowca  $W = 0$  i przyrost prędkości w tarczy wirnika  $aW$  równa się prędkości przepływu przez tarczę, czyli prędkości



indukowanej  $v_i$ . Z równania (2.4) wynika, że przyrost prędkości za tarczą  $bW$  równa się  $v_i$ . Jeżeli  $R$  jest promieniem wirnika, to ciąg wytwarzany w zawisie możemy wyrazić za pomocą równania:

$$T = (\rho A_{wN} v_i) 2v_i = 2\rho\pi R^2 v_i^2 \quad (2.5)$$

lub rozwiązując względem  $v_i$  otrzymamy:

$$v_i = \sqrt{\frac{T}{2\rho\pi R^2}} \quad (2.6)$$

W zawisie moc w zasadzie jest zużywana na straty indukowane  $Tv_i$ . Stąd też wynika, że do uzyskania największej skuteczności, obciążenie przypadające na 1 m<sup>2</sup> powierzchni tarczy wirnika winno być możliwie małe. Przyjęcie powyższych założeń, w tym założenie dotyczące równomierności strumienia, powoduje, że przy danym ciągu otrzymujemy najmniejsze możliwe straty w mocy indukowanej.

Ciąg wirnika nośnego w zawisie jest wynikiem przekazania przepływającemu przez wirnik powietrzu pewnego pędu, który zależy od prędkości indukowanej  $v_i$  w potęgę pierwszej. Zaś straty indukowane energii kinetycznej zależą od prędkości indukowanej w potęgę drugą.

Dla danego ciągu straty energii kinetycznej będą najmniejsze wówczas, gdy prędkość indukowana w dowolnym punkcie tarczy wirnika nośnego będzie równa średniej prędkości.

### 2.1.1.3. Straty idealne i rzeczywiste

Przy wykorzystywaniu twierdzenia o pędzie nie uwzględniano strat na skręcanie strugi za wirnikiem, straty profilowe oraz nierównomierności strumienia przepływającego przez tarczę wirnika, włączając straty w przepływie na końcach łopát, które nazywane są stratami brzegowymi. Tak więc rzeczywisty wirnik nośny ma większe straty w zawisie w porównaniu z wirnikiem idealnym.

Straty wirnika, których nie uwzględnia teoria strumieniowa, wyrażone w procentach ogólnej mocy niezbędnej, są następujące [1.4, 1.13]:

- straty z powodu oporu profilowego – 30%,
- straty z powodu nierównomiernego rozkładu prędkości – 6%,
- straty z powodu skręcenia strumienia – 0,2%,
- straty brzegowe – 3%.

Badania w locie wykazują, że ciąg rzeczywistego wirnika nośnego jest o 17% mniejszy niż ciąg obliczony z teorii strumieniowej, (inaczej mówiąc stanowi on 83% ciągu odpowiedniego wirnika idealnego).

#### 2.1.1.4. Współczynnik jakości wirnika nośnego

Określając jakość wirnika nośnego na zakresie zawisu, nie wolno stosować takiego samego kryterium oceny jakości dla śmigieł, czyli:

$$\eta = \frac{TV}{N}$$

W zawisie moc niezbędną  $N$  zużywa się na wytwarzanie ciągu  $T$  przy prędkości postępowej  $V$  równej zeru, dlatego też powyższy wzór czyniłby  $\eta = 0$ . Stąd też dla wirnika nośnego powinna być inna definicja jakości wirnika. W literaturze światowej przyjęto definiować jakość wirnika nośnego przez porównanie minimalnej mocy niezbędnej w zawisie do rzeczywistej mocy niezbędnej w zawisie. Minimalna możliwa moc niezbędna w zawisie jest to moc podczas pracy wirnika nośnego w wymienionych wyżej warunkach idealnych.

$$\eta_M = \frac{Tv_i}{N} \quad (2.7)$$

Podstawiając równanie (2.6) do równania (2.7), otrzymamy wzór na współczynnik jakości wirnika nośnego w postaci ogólnej:

$$\eta_M = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{T}{N} \sqrt{\frac{T}{\rho \pi R^2}} \quad (2.8)$$

Tak więc im większa jakość, tym mniejsza jest moc niezbędna do wytworzenia danego ciągu lub inaczej tym większy jest ciąg wytwarzany przez jednostkę mocy.

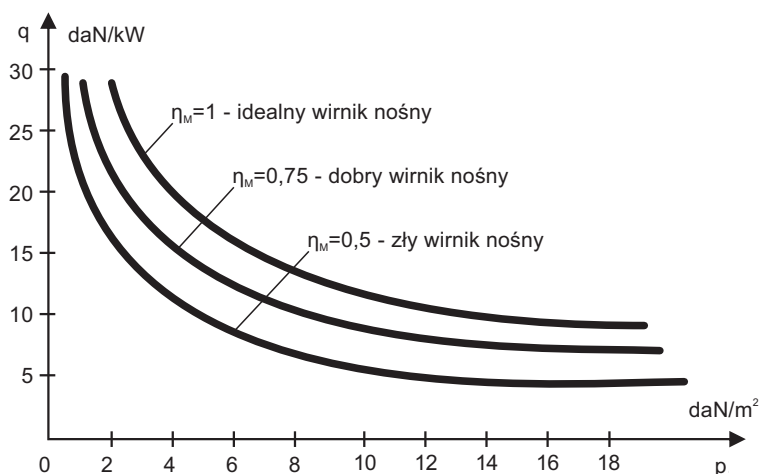
Poprzednio zdefiniowany został idealny wirnik nośny jako wytwarzający dany ciąg przy najmniejszej mocy niezbędnej. Tak więc jakość tego wirnika  $\eta_{M_i}$  winna być równa jedności. Pomimo że jakość idealnego wirnika nośnego jest równa jedności, to jednak maksymalna doskonałość wirnika nośnego, niemającego oporu profilowego i cechującego się równomiernym rozkładem prędkości indukowanej na swej tarczy, nie jest równa jedności. Współczynnik jakości takiego wirnika nośnego zmienia się wraz ze zmianą współczynnika ciągu. Wykażemy później, że równomierny rozkład strumienia na tracy wirnika może mieć jedynie taki wirnik, który ma łopaty o idealnym zwichrzeniu.

Łopaty bez zwichrzenia, tj. łopaty o stałym geometrycznym kącie skreślenia wzdłuż promienia, cechują się nierównomiernym rozkładem strumienia na swej tarczy. Maksymalny współczynnik jakości takiego wirnika nośnego, w większej części użytkowego przedziału zmiany współczynnika ciągu, przy założeniu, że opory profilowe są równe zeru, wynosi w przybliżeniu ok. 0,94 [1.4, 1.10].

Dla danej średnicy wirnika nośnego oraz mocy, możemy za pomocą idealnej doskonałości obliczyć największy ciężar, który jest w stanie utrzymać w zawisie wirnik nośny na różnych wysokościach. Doskonałość idealną możemy wykorzystać do wyznaczenia związku, jaki istnieje pomiędzy obciążaniem tarczy i obciążeniem mocy. Jest to przydatne do szybkiego określenia charakterystyki wirników nośnych o różnych parametrach.

Przekształcając równanie (2.8) za pomocą parametrów obciążenia tarczy  $p = \frac{mg}{A_{WN}} = \frac{T}{\pi R^2}$  i mocy  $q = \frac{mg}{N} = \frac{T}{N}$ , otrzymamy:

$$\eta_M = \frac{1}{\sqrt{2}} q \sqrt{\frac{p}{\rho}} \quad (2.9)$$



**Rys. 2.2.** Zależność obciążenia mocy od obciążenia powierzchni wirnika nośnego

W obliczeniach wygodniej jest posługiwać się współczynnikami ciągu, momentu oporowego i mocy. Ciąg, moment oporowy oraz moc wirnika można wyrazić w następujący sposób:

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} \rho \pi R^2 (\Omega R)^2 C_T \\ M = \frac{1}{2} \rho \pi R^2 (\Omega R)^2 R C_M \\ N = \frac{1}{2} \rho \pi R^2 (\Omega R)^3 C_N \end{cases} \quad (2.10)$$

gdzie  $C_T$ ,  $C_M$  i  $C_N$  są bezwymiarowymi współczynnikami ciągu, momentu i mocy. Należy zauważyć, że  $C_M = C_N$ , gdyż:

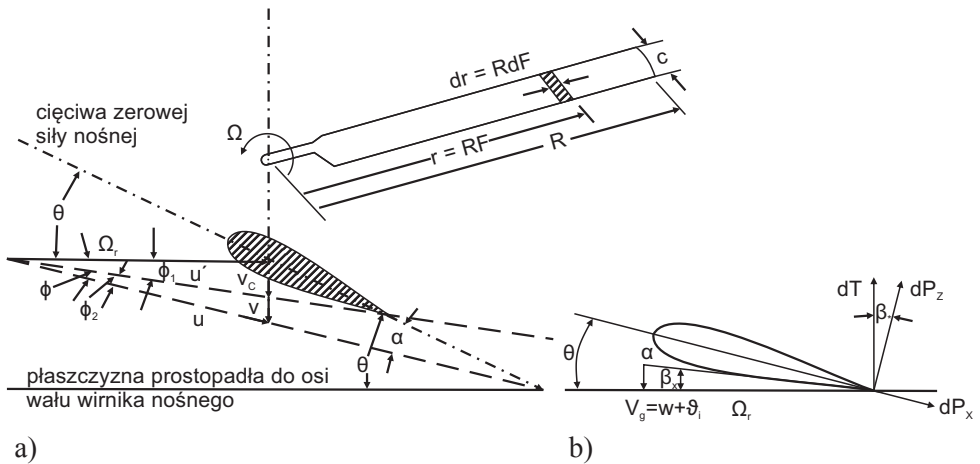
$$C_M = \frac{M}{\pi R^2 \frac{\rho}{2} (\Omega R)^2 R \Omega} = \frac{N}{\pi R^2 \frac{\rho}{2} (\Omega R)^3} = C_N \quad (2.11)$$

Podstawiając współczynniki z zależności (2.10) do równania (2.8), otrzymamy wzór na jakość w zależności od współczynników ciągu i momentu:

$$\eta_M = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\frac{\rho}{2} \pi R^2 (\Omega R)^2 C_T}{\frac{\rho}{2} \pi R^2 (\Omega R)^3 C_M} \sqrt{\frac{\frac{\rho}{2} \pi R^2 (\Omega R)^2 C_T}{\rho \pi R^2}} = \frac{C_T^{3/2}}{2 C_M} \quad (2.12)$$

### 2.1.2. Teoria elementu łopaty

Głównym mankamentem teorii strumienia jest brak jakichkolwiek wiadomości o tym, jak ma być zbudowana łopata, aby uzyskać niezbędny ciąg, jak również, że pomija ona opór profilowy łopaty (rys. 2.3).



**Rys. 2.3.** a) Położenie elementarnego przekroju łopaty; b) kąty, prędkości oraz siły działające na element łopaty

Teoria elementu łopaty jest pozbawiona tych braków i oparta jest na założeniu, że każdy element łopaty wirnika możemy rozpatrywać jako odcinek profilu po-

ruszający się po linii śrubowej. Siłę nośną i opór czołowy obliczymy, wychodząc z wypadkowej prędkości strumienia, opływającego ten profil, przy czym zakładamy, że przystające przekroje łopaty nie wpływają na charakterystyki rozpatrywanego odcinka profilu. Ciąg i moment całkowity otrzymamy przez całkowanie ciągów i momentów elementarnych poszczególnych elementów łopaty. Prędkość strumienia przepływającego przez tarczę wirnika jest sumą algebraiczną prędkości wznoszenia śmigłowca  $W$  i prędkości indukowanej  $v_i$ .

### 2.1.2.1. Ciąg wirnika nośnego w zawisie

Uwzględnienie prędkości indukowanej czyni strumień dwuwymiarowym, podobnie jak w teorii skrzydła. Siłę nośną i opór można obliczyć na podstawie rzeczywistego kąta natarcia  $\alpha$ , który równa się kątowi geometrycznemu, minus kąt skosu strumienia.

$$dP_z = \frac{1}{2} \rho c V^2 C_z dr \quad (2.13)$$

gdzie:

$c$  – cięciwa przekroju łopaty;

$r$  – promień bieżący, na którym umieszczony jest element łopaty.

Uwzględniając, że prędkość strumienia przepływającego przez tarczę wirnika jest mała w porównaniu z prędkością styczną, można przyjąć, że:

$$\begin{cases} \sin \beta_* = \beta_* \\ \cos \beta_* = 1 \\ V = \Omega r \end{cases} \quad (2.14)$$

Współczynnik siły nośnej elementu łopaty można przedstawić w postaci:

$$C_z = \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} \alpha = \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} (\theta - \beta_*) \quad (2.15)$$

Wykorzystując równania (2.14), (2.15), ciąg elementarny można wyrazić jako:

$$dT = dP_z = \frac{1}{2} \rho (\Omega r)^2 \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} (\theta - \beta_*) c dr \quad (2.16)$$

Dla ułatwienia całkowania założmy, że kąt skrzywienia elementów łopaty wzdłuż promienia jest liniowy i zmienia się wg wzoru:

$$\theta = \theta_k \frac{R}{r} \quad (2.17)$$

gdzie:

$\theta_k$  – kąt skrzywienia geometrycznego na końcu łopaty.

Można wykazać, że liniowa zmiana kąta skrzywienia łopaty daje prawie równomierny rozkład prędkości indukowanej wzdłuż promienia wirnika nośnego. Dlatego też takie skrzywienie łopaty wirnika nośnego można nazwać skrzywieniem idealnym. Można również wykazać, że liniowe skrzywienie przekrojów łopaty skutkuje także liniową zmianą kąta  $\beta_*$  wzdłuż promienia wirnika nośnego:

$$\beta_* = \beta_{*k} \frac{R}{r} \quad (2.18)$$

gdzie:

$\beta_{*k}$  – kąt odchylenia strumienia przepływu na końcu łopaty.

Podstawiając (2.17) i (2.18) do równania (2.16), otrzymamy

$$dT = \frac{1}{2} \rho (\Omega r)^2 \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} \frac{R}{r} (\theta_k - \beta_{*k}) c dr \quad (2.19)$$

Całkując równanie (2.19) wzdłuż promienia łopaty wirnika nośnego oraz zakładając, że  $c = c_A = \text{const}$  i mnożąc ciąg przez liczbę łopat wirnika nośnego  $n$  otrzymamy:

$$T = \frac{n}{2} \rho c_A \Omega^2 \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} \frac{R^3}{r} (\theta_k - \beta_{*k}) \quad (2.20)$$

W wyniku porównania wyrażeń (2.11) i (2.20) otrzymamy wzór na współczynnik ciągu:

$$C_T = \frac{\frac{\partial C_z}{\partial \alpha}}{2} \frac{n c_A}{\pi R} (\theta_k - \beta_{*k}) \quad (2.21)$$

Wprowadzając pojęcie wypełnienia wirnika nośnego jako stosunku ogólnej powierzchni łopat do powierzchni tarczy wirnika, dla łopat o zarysie prostokątnym otrzymamy następującą zależność na współczynnik wypełnienia:

$$\sigma = \frac{nc_A R}{\pi R^2} = \frac{nc_A}{\pi R} \quad (2.22)$$

Współczynnik ciągu możemy uzależnić od współczynnika wypełnienia  $\sigma$ . Dla wirnika o prostokątnych łopatach z liniowym skręceniem przekroju wzdłuż promienia otrzymamy:

$$C_T = \frac{\sigma}{2} \frac{\partial C_Z}{\partial \alpha} (\theta_k - \beta_{*k}) \quad (2.23)$$

### 2.1.2.2. Moment oporowy

Z rys. 2.3 wynika, że opór elementu łopaty składa się z oporu profilowego i składowej siły nośnej na płaszczyznę obrotu wirnika nośnego – tzw. oporu indukowanego. Moment oporowy względem osi obrotu wirnika nośnego elementu łopaty, mającego opór  $dP_x$  i leżącego na promieniu  $r$ , równa się:

$$dM = \frac{1}{2} \rho (\Omega r)^2 (C_{xp} + \beta_* C_z) c r dr \quad (2.24)$$

Aby scałkować wzdłuż promienia łopaty wyrażenie (2.24), musimy wiedzieć, jak zmienia się współczynnik oporu profilowego łopaty  $C_{xp}$  wzdłuż promienia, co z kolei wymaga znajomości zmiany kąta natarcia poszczególnych przekrojów łopaty  $\alpha_r$  wzdłuż bieżącego promienia  $r$ . Przebieg zmian  $\beta_* C_z(r)$  jest znany, ponieważ zakładamy, że łopata jest liniowo skręcona. Wyrażenie na zmianę  $\alpha_r$  wzdłuż promienia łopaty, ze względu na liniowe skręcenia łopaty, ma zatem postać:

$$\alpha_r = \frac{R}{r} (\theta_k - \beta_{*k}) \quad (2.25)$$

Ponieważ kąt natarcia przekroju zmienia się wzdłuż promienia, będzie więc zmieniał się i  $C_{xp}$ . Jednak często profile łopat mają takie charakterystyki, że  $C_{xp}$  minimalnie ulega zmianie wraz ze zmianą  $\alpha_r$  w przedziale roboczych kątów łopat. Dlatego też często przyjmuje się  $C_{xp}$  jako stały, jednak należy zdawać sobie sprawę z konsekwencji takiego założenia. Na przykład wiadome jest, że współczynnik oporu profilowego szybko rośnie, jeśli kąt natarcia przekroczy wartość krytyczną (kąta oderwania strumienia na profilu łopaty)  $\alpha_{kr}$ . Jeśli kąt natarcia na przekrojach łopaty dla poszczególnych azymutów nie przekracza kąta krytycznego ( $\alpha_r \leq \alpha_{kr}$ ), to możemy założyć, że  $C_{xp} = \delta = const$ . Gdzie  $\delta$  jest uśrednioną wartością współ-



czynnika oporu profilowego łopaty wirnika nośnego. Należy przy tym pamiętać, że otrzymuje się wówczas zawyżone wartości charakterystyk wirnika nośnego. Możemy wówczas zapisać:

$$\begin{cases} C_z = \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} \frac{R}{r} (\theta_k - \beta_{*k}) \\ \beta_* = \beta_{*k} \frac{R}{r} \\ C_{xp} = \delta \end{cases} \quad (2.26)$$

Wstawiając (2.26) do równania (2.24), otrzymamy równanie momentu oporowego elementu łopaty  $dr$ :

$$dM = \frac{\rho}{2} \Omega^2 r^3 c \left[ \delta + \beta_{*k} \frac{R^2}{r^2} (\theta_k - \beta_{*k}) \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} \right] dr \quad (2.27)$$

Po scałkowaniu wzdłuż łopaty i pomnożeniu przez liczbę łopat otrzymamy

$$M = \frac{k}{4} \rho \Omega^2 R^4 b \left[ \frac{\delta}{2} + \frac{\partial C_y}{\partial \alpha} \beta_{*k} (\theta_k - \beta_{*k}) \right] \quad (2.28)$$

Porównując zależność (2.28) ze wzorem (2.11) oraz uwzględniając zależność na współczynnik wypełnienia wirnika nośnego  $\sigma = \frac{nc_A}{\pi R}$ , otrzymamy

$$C_M = \frac{\sigma}{2} \left[ \frac{\delta}{2} + \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} \beta_{*k} (\theta^2 - \beta_{*k}) \right] \quad (2.29)$$

Podstawiając równanie (2.23) do równania (2.29), otrzymamy

$$C_M = \frac{\sigma \delta}{4} + \beta_{*k} C_T \quad (2.30)$$

Dla ułatwienia korzystania ze wzoru (2.30), zastąpimy  $\beta_{*k}$  przez parametry, które są znane lub łatwo dają się wyznaczyć. Z równań (2.6) i (2.7) mamy

$$v_i = \sqrt{\frac{T}{2\rho\pi R^3}} = \sqrt{\frac{C_T\pi R^2\rho(\Omega R)^2}{4\rho\pi R^2}} = \frac{1}{2}\Omega R\sqrt{C_T} \quad (2.31)$$

zgodnie z definicją:

$$\beta_{*k} = \frac{v_i}{\Omega R} \quad (2.32)$$

Podstawiając  $v_i$  z równania (2.31) do równania (2.32), otrzymamy:

$$\beta_{*k} = \frac{1}{2}\sqrt{C_T} \quad (2.33)$$

Następnie podstawiając zależność (2.33) do równania (2.30), otrzymamy:

$$C_M = \frac{1}{2}C_T^{\frac{3}{2}} + \frac{\sigma\delta}{4} \quad (2.34)$$

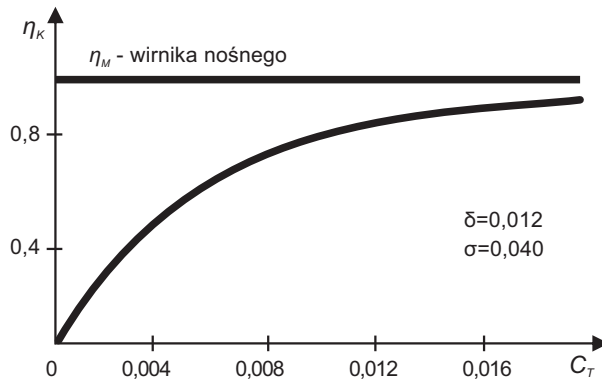
Wzór (2.37) opisuje biegunową wirnika nośnego o prostokątnych i liniowo skręconych łopatach, w zawisie.

Pierwszy człon zależności (2.34) przedstawia straty indukowane, zaś drugi człon – straty pochodzące od oporu profilowego. Jeżeli równanie (2.34) podstawimy do wzoru na doskonałość wirnika nośnego, otrzymamy:

$$\eta_M = \frac{1}{2} \frac{C_T^{\frac{3}{2}}}{C_M} = \frac{C_T^{\frac{3}{2}}}{C_T^{\frac{3}{2}} + \frac{\sigma\delta}{2}} \quad (2.35)$$

Z równania (2.35) wnioskować możemy o wpływie czynników konstrukcyjnych na charakterystyki wirnika w zawisie. Z powyższego wzoru również widać, że jeśli opór profilowy  $\delta = 0$ , to  $\eta_M = 1$ .

Zmianę doskonałości w zależności od współczynnika ciągu przy ustalonych wartościach  $\sigma$  i  $\delta$  przedstawia rys. 2.4. Z wykresu widać, że jeżeli wirnik pracuje na niedużych  $C_T$ , to doskonałość  $\eta_M$  jest mała. Jednak ze wzrostem wartości  $C_T$  wpływ  $\delta$  jest mniejszy i  $\eta_M$  rośnie.



**Rys. 2.4.** Zależność współczynnika jakości wirnika nośnego od współczynnika ciągu

Wzrost ten jest jednak ograniczony i trwa dopóty, dopóki współczynnik ciągu  $C_T$  nie stanie się tak duży, że opory profilowe w porównaniu ze stratami indukowanymi będą małe i dalszy wzrost  $C_T$  spowoduje nieznaczny przyrost  $\eta_M$ . Ze wzoru (2.35) widać, że  $\eta_M$  przy  $\delta = const$  i wzroście  $C_T$  asymptotycznie zbliża się do jedności. Dla wirnika rzeczywistego wzrost  $k_t$  powoduje powstawanie oderwania na łopatach, co z kolei wywołuje nagły wzrost oporu profilowego i spadek ciągu. Jedno i drugie wpływa na znaczny spadek doskonałości.

### 2.1.2.3. Wpływ prędkości końców łopat i współczynnika wypełnienia na doskonałość wirnika nośnego śmigłowca

Po dobraniu średnicy wirnika nośnego lub obciążenia tarczy wirnika należy dobrać optymalną kombinację (dla zawisu) wypełnienia i strat brzegowych. Dobór tych dwóch parametrów zależy od dwóch wzajemnie zależnych czynników:

- 1) wirnik nośny winien mieć  $C_Z$  zbliżony do  $C_{Z_{kr}}$  (czyli na kącie natarcia profilu łopaty zbliżonym do krytycznego  $\alpha_{kr}$ );
- 2) wirnik nośny powinien mieć możliwie małe prędkości na końcach łopat (możliwie małe straty brzegowe).

Ten drugi czynnik jest równoznaczny z zastosowaniem największego z możliwych wypełnień lub największej cięciwy łopaty (dla wyznaczonej średnicy wirnika). Obydwa warunki oparte są na fakcie, że ciąg wirnika zmienia się w zależności od prędkości końców łopat w potęgę drugiej, zaś moc tracona na pokonanie oporu profilowego jest zależna od prędkości w potęgę trzeciej.

Należy zaznaczyć, że współczynnik wypełnienia  $\sigma$ , średnia wartość współczynnika siły nośnej  $\bar{C}_Z$  i prędkości końców łopat  $\Omega R$  są związane określoną za-

leżnością. W zawisie ciężar śmigłowca jest równoważony przez ciąg wirnika nośnego, zatem:

$$Q = mg = \int_0^R \frac{n}{2} \rho (\Omega r)^2 C_z c dr = \frac{1}{2} \rho \pi R^2 (\Omega R)^2 C_T$$

$$\frac{1}{6} C_z \rho \Omega^2 R^3 n c_A = \frac{1}{2} \rho \pi R^2 (\Omega R)^2 C_T$$

stąd:

$$C_z = 3 \frac{C_T}{\sigma} \quad (2.36)$$

lub

$$C_z = \frac{6mg}{\rho \Omega^2 R^2 n c_A} = \frac{6mg}{\rho \Omega^2 R^3 \pi R^2 \sigma} \quad (2.37)$$

#### 2.1.2.4. Analiza charakterystyk w zawisie i locie pionowym

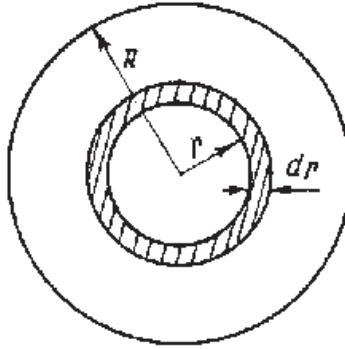
Aby otrzymać dokładne charakterystyki wirnika w zawisie i w locie pionowym, musimy dokładnie wyznaczyć ciąg wytwarzany przez wirnik i zużywaną przez niego moc. Z drugiej zaś strony zarówno ciąg jak i moc w znacznej mierze zależą od parametrów konstrukcyjnych łopaty (zbieżności, zwichrzenia jakości powierzchni). Nie łatwo jest określić wpływ każdego parametru oddzielnie. W zależności od wymaganej dokładności obliczeń można czynić różne założenia, które upraszczają problem. Takie uproszczenia czyniliśmy uprzednio, gdy zakładaliśmy, że opór profilowy wzdłuż promienia jest stały.

Obecnie podamy dokładniejsze metody wyznaczania charakterystyk w locie wstępnym i w locie pionowym, sprowadzając ilość założeń do minimum. Do wyznaczenia kąta natarcia i momentu oporowego każdego elementu łopaty, musimy znać rozkład prędkości indukowanej wzdłuż promienia łopaty.

#### 2.1.2.5. Prędkość indukowana w locie pionowym

Ogólny wzór na prędkość indukowaną w dowolnym punkcie wirnika nośnego w zawisie i w locie pionowym możemy otrzymać, stosując teorię strumieniową i teorię elementu łopaty. Równanie (2.16) przedstawia ciąg elementarny wytwarzany przez nieskończenie mały odcinek łopaty, wykorzystując teorię strumieniową

dla elementarnej powierzchni tarczy wirnika nośnego o szerokości  $dr$  i znajdującego się w odległości  $r$  od osi obrotu.



**Rys. 2.5.** Elementarna powierzchnia tarczy wirnika nośnego

Elementarny ciąg wytwarzany przez taki pierścień równa się iloczynowi masy i przyrostu prędkości przepływającego przez ten pierścień powietrza w jednostce czasu:

$$dT = (2\pi r dr \rho W_1) 2v_i = 4\pi \rho W_1 r dr \quad (2.38)$$

gdzie:

$$W_1 = W + v_i$$

Porównując stronami równania (2.16) i (2.38), otrzymamy:

$$\frac{n}{2} \rho \Omega^2 r^2 \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} \left( \theta - \frac{W_1}{\Omega r} \right) c dr = 4\pi \rho W_1 r dr \quad (2.39)$$

Podstawiając do równania (2.39)  $W_1 = W + v_i$ , otrzymamy:

$$4\pi v_i^2 + \left( 4\pi W + \frac{n}{2} \Omega \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} c \right) v_i - \frac{n}{2} c \Omega^2 r \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} \left( \theta - \frac{W}{\Omega r} \right) = 0 \quad (2.40)$$

Po rozwiązaniu tego równania względem  $v_i$  otrzymamy:

$$v_i = - \left( \frac{W}{2} + \frac{nc \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} \Omega}{16\pi} \right) \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{2\Omega r(\theta - \frac{W}{\Omega r})}{\frac{4\pi W^2}{nc \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} \Omega} + W + \frac{nc \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} \Omega}{16\pi}}} \right] \quad (2.41)$$

Wypełnienie elementu łopaty na promieniu  $\bar{r}$  lub lokalne wypełnienie wyznaczmy w analogiczny sposób jak w (2.6), wstawiając lokalną cięciwę.

Zakładając  $\bar{r} = \frac{r}{R}$  i wstawiając do równania (2.41) wraz z lokalnym wypełnieniem, otrzymamy ogólny wzór na prędkość indukowaną dla elementu łopaty.

$$v_i = \left( \frac{W}{2} + \frac{\sigma \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} \Omega R}{16} \right) \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{2(\theta \bar{r} \Omega - W)}{\frac{4W^2}{\sigma \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} \Omega R} + W + \frac{\sigma \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} \Omega R}{16}}} \right] \quad (2.42)$$

Dzieląc obie strony równania (2.42) przez  $WR$  oraz oznaczając bezwymiarowe współczynniki prędkości indukowanej  $\lambda_i = \frac{v_i}{\Omega R}$  i prędkości pionowej  $\lambda = \frac{W}{\Omega R}$  oraz oznaczając  $\frac{\partial C_z}{\partial \alpha} = a_p$  otrzymamy:

$$\lambda_i = \left( \frac{\lambda}{2} + \frac{\sigma a_p}{16} \right) + \sqrt{\left( \frac{8\lambda + \sigma a_p}{16} \right)^2 + \frac{2(\theta \bar{r} - \lambda)}{\frac{4\lambda^2}{\sigma a_p} + \lambda + \frac{\sigma a_p}{16}} \left( \frac{8\lambda + \sigma a_p}{16} \right)^2} \quad (2.42a)$$

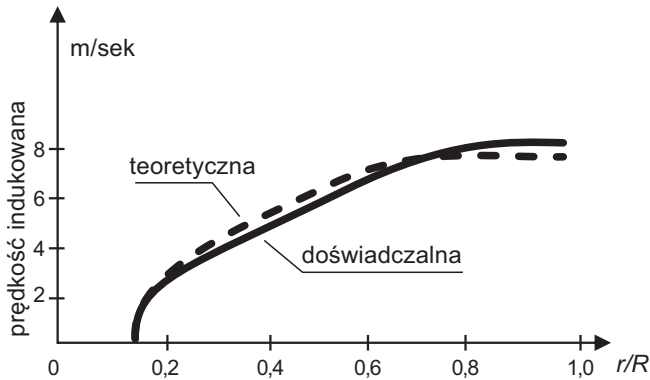
Mając prędkość indukowaną, możemy wyznaczyć kąt  $\beta_*$  dla elementu łopaty:

$$\beta_* = \frac{v_i + W}{\Omega R} = \lambda_i + \lambda \quad (2.43)$$

Za pomocą równania (2.42) możemy wyznaczyć prędkość indukowaną dla łopaty o dowolnym obrysie i o dowolnym zwichrzeniu. Z równania (2.42) wnioskujemy, że prędkość indukowana może być stała wzdłuż promienia tylko wówczas, jeśli kąt

nastawienia ze wzrostem promienia maleje, tj.  $\theta = \theta_k \frac{R}{r} = \frac{\theta_k}{\bar{r}}$ , gdzie  $\theta_k$  jest kątem skręcenia na końcu łopaty.

Zmianę kąta skręcenia przedstawioną równaniem (2.17) zdefiniowaliśmy jako zwichrzenie idealne, bowiem w wyniku takiego skręcenia łopat wirnika nośnego otrzymuje się minimalne straty indukowane przy wytwarzaniu danego ciągu. Takie zwichrzenie zdaje się logiczne, ponieważ przy zbliżaniu się do osi obrotu wirnika prędkość obwodowa maleje, kąt  $\beta_*$  wzrasta, więc kąt nastawienia winien odpowiednio wzrastać, tak by kąt natarcia był dodatni. Ściśle mówiąc założenie o równomiernym rozkładzie prędkości strumienia (idealne zwichrzenie) wymaga różnego zwichrzenia dla różnych współczynników ciągu lub prędkości wznoszenia, ponieważ większe wartości  $C_T$  lub  $W$ , z powodu wzrostu kąta  $\beta_*$  wymaga większych kątów nastawienia na końcach łopat.



**Rys. 2.6.** Rozkład prędkości indukowanej wzdłuż promienia wirnika

Na rys. 2.6 przedstawiono rozkład prędkości indukowanej wzdłuż promienia wirnika obliczonej ze wzoru (2.41), krzywą ciągłą oraz doświadczalną krzywą (przerwaną) zmierzoną w locie wiszącym naturalnym. Pokrywanie się obu krzywych świadczy o zgodności teorii z praktyką.



### 2.1.2.6. Straty brzegowe

W ocenie charakterystyk wirnika nośnego musimy uwzględnić spadek siły nośnej na brzegach (końcach) łopat, ponieważ rzeczywisty wirnik ma skończoną liczbę łopat. Strata ciągu lub inaczej mówiąc straty brzegowe wywołane są przepływem powietrza na brzegach łopat. Do wytworzenia ciągu konieczne musi istnieć różnica ciśnień pomiędzy górną i dolną powierzchnią łopaty. Z powodu tej różnicy odbywa się na końcach łopat przepływ powietrza z dolnej do górnej powierzchni, przez co zmniejsza się różnica ciśnień, a więc prędkość opływu łopaty na brzegach wirnika maleje.

Obszar rozprzestrzeniania się strat brzegowych zależy od obciążenia przypadkowego na metr bieżący łopaty. Dlatego też współczynnik ciągu i liczba łopat są podstawowymi parametrami podczas wyznaczania strat brzegowych, jako że współczynnik ciągu określa obciążenia tarczy wirnika, zaś liczba łopat określa obciążenia łopaty. Straty brzegowe rosną przy wzroście współczynnika ciągu i maleją przy wzroście liczby łopat. Ponieważ straty brzegowe zależą od obciążenia bieżącego łopaty, a nie zależą one od zestawu długości cięciwy (wypełnienia) i kąta natarcia, które decydują o obciążeniu. Stąd też straty brzegowe nie zależą od współczynnika wypełnienia wirnika. Przybliżony wzór pozwalający na obliczenia strat brzegowych podany został przez Prandla i Betza w 1927 r. i ma postać [1.1, 1.2, 1.10, 1.13, 1.14]:

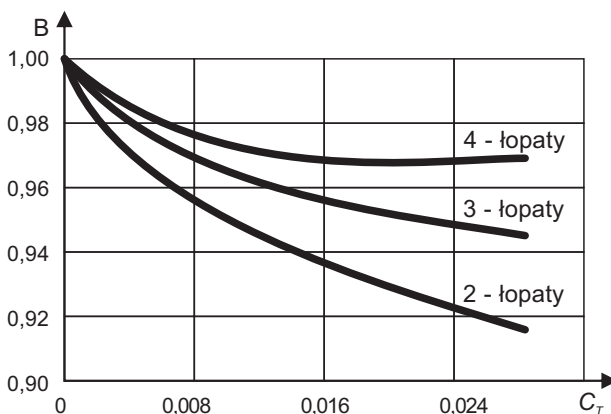
$$B = 1 - \frac{\sqrt{C_T}}{n} \quad (2.44)$$

gdzie:

$B$  – współczynnik strat brzegowych świadczący, że końce łopat o długości  $R - BR$  nie wytwarzają siły nośnej, mają jednak opór profilowy,

$C_T$  – współczynnik ciągu wirnika,

$n$  – liczba łopat.



**Rys. 2.7.** Zależność współczynnika strat brzegowych od współczynnika ciągu

Straty brzegowe są zatem proporcjonalne do pierwiastka kwadratowego ze współczynnika ciągu i odwrotnie proporcjonalne do liczby łopat. Straty są równe zero, jeśli liczba łopat jest nieskończona. Zmianę  $B$  przedstawioną wzorem (2.44) może podać w postaci wykresu (rys. 2.7).

### 2.1.2.7. Ciąg i moment oporowy wirnika nośnego w locie pionowym

Upřednio podane zostały wzory na ciąg i moment oporowy w locie wiszącym dla łopaty o zwichrzeniu idealnym i o stałej cięciwie (wzory 2.20, 2.28), przy założeniu że współczynnik oporu profilowego dla każdego przekroju łopaty był stały. Takie ujęcie problemu jest uproszczone i prowadzi do wyników niedokładnych. Należy więc zastanowić się nad dokładniejszym wyprowadzeniem wzorów z uwzględnieniem zależności współczynnika oporu profilowego od kąta natarcia przekroju bieżącego. Uwzględnimy tu również warunki lotu pionowego oraz straty brzegowe.

Wykorzystując równania (2.16) i (2.17) oraz zamieniając  $r = \bar{r}R$ , otrzymamy:

$$dT = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 R^3 \bar{r} \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} (\theta_k - \beta_{*k}) c d\bar{r} \quad (2.45)$$

Całkując w przedziale od 0 do  $\bar{r} = B$ , otrzymamy:

$$T = \int_0^B n \frac{1}{2} \rho \Omega^2 \bar{r} R^3 \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} (\theta_k - \beta_{*k}) c d\bar{r} \quad (2.46)$$

W ten sposób uwzględniliśmy już straty brzegowe. Po obliczeniu całki (2.46) otrzymamy:

$$T = \left[ \frac{n}{4} \rho \Omega^2 R^3 \bar{r}^2 \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} (\theta_k - \beta_{*k}) c_A \right]_0^B = \frac{n}{4} \rho \Omega^2 R^3 \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} (\theta_k - \beta_{*k}) c_A B^2 \quad (2.47)$$

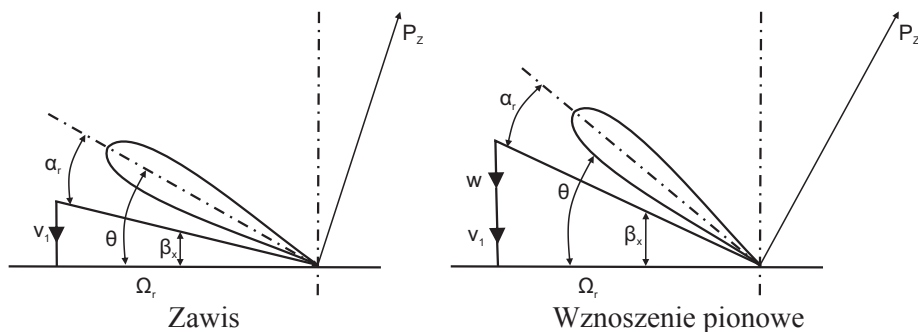
Porównując równanie (2.11, 2.1) i (2.47) stronami oraz wprowadzając  $\sigma = \frac{n c_A}{\pi R}$ , otrzymamy ogólny wzór na ciąg:

$$\frac{C_T}{B^2} = \frac{\sigma}{2} \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} (\theta_k - \beta_{*k}) \quad (2.48)$$

Jeżeli porównamy wzory (2.23) i (2.48), to stwierdzimy, że różnią się one między sobą tym, że wzór (2.23) nie uwzględniał strat brzegowych, zaś wzór (2.48) straty te uwzględnia. Oznacza to, że jeśli parametry geometryczne (kąty) i  $\frac{\partial C_z}{\partial \alpha}$  będą takie same, ciąg policzony za pomocą wzoru (2.48) będzie większy  $\frac{1}{B^2}$  razy.

Całkowita moc wirnika nośnego w locie pionowym tracona jest na wytworzenie ciągu (straty indukowane), pokonanie oporu profilowego łopaty oraz na wznoszenie pionowe ze stałą prędkością wznoszenia. Jeśli chodzi o opór szkodliwy kadłuba, to jest on przy małych prędkościach wznoszenia nieznaczny i można go pominąć.

Na rys. 2.8 przedstawiono wpływ prędkości wznoszenia na pochylenie wektora siły nośnej. W locie pionowym z powodu wpływu prędkości  $w$ , wektor siły nośnej odchyła się od pionu o większy kąt aniżeli w zawisie. Wzrost rzutu siły nośnej na płaszczyznę obrotu wirnika zwiększa jego moment oporowy.



**Rys. 2.8.** Kąty i siły na profilu łopaty w warunkach zawisu i pionowego wznoszenia

Z rys. 2.8 widać, że do uzyskania tego samego kąta natarcia przekroju łopaty w locie pionowym potrzebny jest większy aniżeli w zawisie kąt nastawienia łopaty. Ponieważ momenty oporowe, niezbędne do pokonania strat indukowanych i wytworzenia prędkości pionowej, powstają w ten sam sposób, możemy napisać ich sumę:

$$M_i + M_w = \int_0^B \frac{n}{2} \rho (\Omega r)^2 \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} \frac{R}{r} (\theta_k - \beta_{*k}) \frac{R}{r} \beta_{*k} r c dr \quad (2.49)$$

Wstawiając zamiast  $r$ ,  $\bar{r} = \frac{r}{R}$ , przekształcimy to równanie w następujący sposób:

$$M_i + M_w = \int_0^B \frac{n}{2} \rho \Omega^2 R^4 \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} \bar{r} (\theta_k - \beta_{*k}) \beta_{*k} c d\bar{r} \quad (2.50)$$

Górną granicą całkowania jest  $B$ , ponieważ oba momenty zależą od ciągu. Całkując równanie (2.50), otrzymamy:

$$M_i + M_w = \frac{B^2}{4} n \rho \Omega^2 R^4 \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} (\theta_k - \beta_{*k}) \beta_{*k} C_A \quad (2.51)$$

Wprowadzając współczynnik momentu  $C_{M'}$  otrzymamy:

$$M_i + M_w = \frac{1}{2} (C_{M_i} + C_{M_w}) \pi R^2 \rho (\Omega R)^2 R \quad (2.52)$$

Przyrównując prawe strony równań (2.51) i (2.52) i wprowadzając współczynnik wypełnienia, otrzymuje się wzór na współczynnik momentów

$$C_{M_i} + C_{M_w} = \frac{B^2}{2} \sigma \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} (\theta_k - \beta_{*k}) \beta_{*k} \quad (2.53)$$

Oprócz strat indukowanych i strat energii na wznoszenie, istnieją pewne straty z powodu oporu profilowego, które zależą od typu profilu łopaty wirnika nośnego. Rozpatrując pracę wirnika w zawisie, przyjęliśmy, że przekrój łopaty pracuje przy średnim współczynniku oporu profilowego  $\delta$ . Ponieważ kąt natarcia przekroju łopaty przy zwichrzeniu idealnym zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do promienia, zaś współczynnik oporu profilowego dla typowych profili łopat wirnika nośnego zmienia się ze zmianą kąta natarcia, to celowe jest korzystać przy obliczeniach z rzeczywistego współczynnika oporu profilowego. Autorzy w różny sposób wyrażają związek oporu profilowego w zależności od kąta natarcia. Na przykład związek ten można przedstawić w postaci paraboli [1.10]

$$C_{xp} = C_{xp_{\min}} + C\alpha_r^2 \quad (2.54)$$

lub wykorzystując wyrażenie analityczne w postaci [1, 13, 14]:

$$C_{xp} = \delta_0 + \delta_1 \alpha_r + \delta_2 \alpha_r^2 \quad (2.55)$$

Wyniki prac nad metodami aproksymacji charakterystyk aerodynamicznych profili można znaleźć np. w klasycznym raporcie NACA [1.1], m.in. następujące równanie aproksymujące współczynnik oporu typowego profilu śmigłowcowego w zależności od kąta natarcia [1.1, 1.2, 1.13, 1.14]:

$$C_{xp} = \delta = 0,0087 - 0,0216\alpha_r + 0,4\alpha_r^2 \quad (2.56)$$

Krzywa zbudowana wg powyższego równania podana jest na rys. 2.9.

Moment oporu profilowego możemy wyrazić całką

$$M_p = \int_0^1 \frac{n}{2} \rho \Omega^2 R^4 \bar{r} c_{xp} d\bar{r} \quad (2.57)$$

Ponieważ straty na pokonanie oporu profilowego występują również w obszarze strumienia nieustalonego na końcach łopat, całkujemy wzdłuż całej długości łopaty. Po podstawieniu do równania (2.57) zależności aproksymacyjnej (2.56) otrzymamy:

$$M_p = n \frac{\rho}{2} \Omega^2 R^4 c_A \int_0^1 \bar{r}^3 \left[ \frac{\delta_0}{\bar{r}} + \frac{\delta_1}{\bar{r}} (\theta_k - \beta_{*k}) + \frac{\delta_2}{\bar{r}^2} (\theta_k - \beta_{*k})^2 \right] d\bar{r} \quad (2.58)$$

Całkując to równanie wzdłuż promienia łopaty otrzymamy:

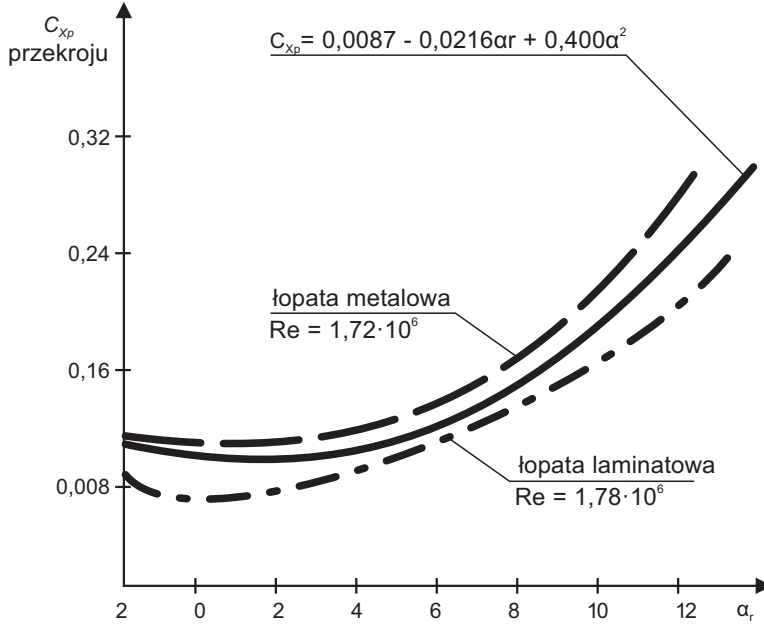
$$M_p = \frac{n}{2} \rho \Omega^2 R^4 c_A \left[ \frac{\delta_0}{4} + \frac{\delta_1}{3} (\theta_k - \beta_{*k}) + \frac{\delta_2}{2} (\theta_k - \beta_{*k})^2 \right] \quad (2.59)$$

Przyrównując równanie (2.59) do równania  $M_p = \frac{n}{2} C_{M_p} \pi R^2 \rho (\Omega R)^2 R$  stronami oraz wstawiając współczynnik wypełnienia  $\sigma$ , otrzymamy wartość współczynnika momentu potrzebnego do pokonania oporu rofilowego:

$$C_{M_p} = \sigma \left[ \frac{\delta_0}{4} + \frac{\delta_1}{3} (\theta_k - \beta_{*k}) + \frac{\delta_2}{2} (\theta_k - \beta_{*k})^2 \right] \quad (2.60)$$

Całkowity współczynnik momentu oporowego wirnika nośnego jest sumą równań (2.53) i (2.60):

$$C_M = C_{M_i} + C_{M_w} + C_{M_p} = \sigma \left[ \frac{B^2}{2} \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} (\theta_k - \beta_{*k}) \beta_{*k} + \frac{\delta_0}{4} + \frac{\delta_1}{3} (\theta_k - \beta_{*k}) + \frac{\delta_2}{2} (\theta_k - \beta_{*k})^2 \right] \quad (2.61)$$



**Rys. 2.9.** Zależność współczynnika oporu od kąta natarcia [1.1]

Równanie to jest niewygodne do bezpośrednich obliczeń charakterystyk wirnika nośnego. Wygodniej jest zastąpić kąty  $\theta_k$  i  $\beta_{*k}$  współczynnikiem ciągu  $C_T$ . Rozwiązując równania (2.42), (2.43) i (2.48), otrzymamy:

$$\begin{cases} \beta_{*k} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{W}{\Omega R}\right)^2 + \frac{C_T}{B^2}} + \frac{1}{2} \frac{W}{\Omega R} \\ \theta_k = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{W}{\Omega R}\right)^2 + \frac{C_T}{B^2}} + \frac{2}{\sigma} \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} \frac{C_T}{B^2} + \frac{1}{2} \frac{W}{\Omega R} \end{cases} \quad (2.62)$$

Podstawiając zależność (2.62) do zależności (2.61), otrzymamy:

$$C_M = \frac{1}{2} C_T \sqrt{\left(\frac{W}{\Omega R}\right)^2 + \frac{C_T}{B^2}} + \frac{1}{2} \frac{W}{\Omega R} C_T + \frac{\sigma \delta_0}{4} + \frac{2}{3} \frac{\delta_1}{\frac{\partial C_z}{\partial \alpha}} \frac{C_T}{B^2} + \frac{2 \delta_2}{\sigma \frac{\partial C_z}{\partial \alpha}} \left(\frac{C_T}{B^2}\right)^2 \quad (2.63)$$

Wprowadzając do równania (2.63) współczynnik przepływu osiowego  $\lambda = \frac{W}{\Omega R}$  oraz oznaczając przez  $a = \frac{\partial C_z}{\partial \alpha}$ , równanie to przyjmie postać:

$$C_M = \frac{1}{2} C_T \sqrt{\lambda^2 + \frac{C_T}{B^2}} + \frac{1}{2} \lambda C_T + \frac{\sigma \delta_0}{4} + \frac{2}{3} \frac{\delta_1}{a} \frac{C_T}{B^2} + \frac{2\delta_2}{\sigma a} \left( \frac{C_T}{B^2} \right)^2 \quad (2.63a)$$

Pierwsze dwa człony w tym wzorze reprezentują moc traconą na pokonanie oporu indukowanego i wznoszenie śmigłowca, zaś pozostałe trzy składniki przedstawiają moc na pokonanie oporu profilowego.

Za pomocą równania (2.63) możemy wyznaczyć charakterystyki wirnika nośnego w locie pionowym dla różnych wartości wypełnienia i strat brzegowych przy różnych współczynnikach ciągu, przy założeniu że strumień przepływający przez wirnik jest równomierny. Można również wyznaczyć charakterystyki w zawisie, podstawiając  $W = 0$  lub ( $\lambda = 0$ ).

#### 2.1.2.8. Wpływ wybranych parametrów na charakterystyki wirnika w zawisie w locie pionowym

W poprzednich punktach rozpatrywaliśmy charakterystyki wirnika nośnego bez uwzględnienia wpływu niektórych podstawowych parametrów. Obecnie rozpatrzmy wpływ podstawowych czynników geometrycznych łopaty na charakterystyki wirnika nośnego.

Dla konstruktora śmigłowców ważne są metody polepszania charakterystyk lotu pionowego. Zwiększenie ciężaru użytkowego, prędkości wznoszenia itp. można osiągnąć m.in. poprzez zmniejszenie strat aerodynamicznych wirnika nośnego.

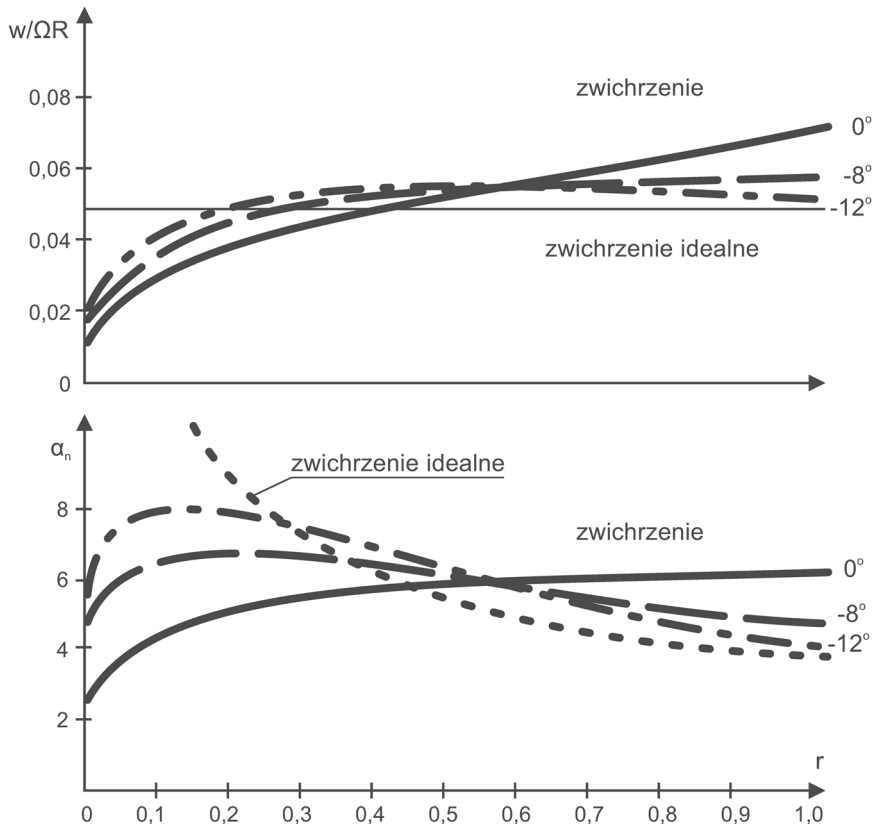
Wiadome jest, że straty indukowane w zawisie można zmniejszyć przez zwiększenie średnicy wirnika z jednoczesnym zmniejszeniem prędkości jego obrotów. Oprócz tego można osiągnąć pewien zysk przez odpowiednio dobraną geometrię łopat, tj. obrys łopat i zwichrzenia wzdłuż ich długości.

Straty indukowane z powodu nierównomiernego przepływu powietrza przez wirnik możemy zmniejszyć, jeśli zwichrzenie dobierzemy w ten sposób, by kąty nastawienia przekroju u nasady łopaty były większe od kątów nastawienia na końcach lub jeśli łopata będzie miała zbieżność. Straty profilowe są proporcjonalne do prędkości w potęgę trzeciej, zaś ciąg zmienia się proporcjonalnie do prędkości w potęgę drugiej, dlatego też wygodnie jest ciąg wytwarzać tą częścią łopaty, która leży bliżej nasady pracującej na mniejszych prędkościach, zaś na końcach łopaty wygodniej mieć mniejsze kąty nastawienia przekroju.



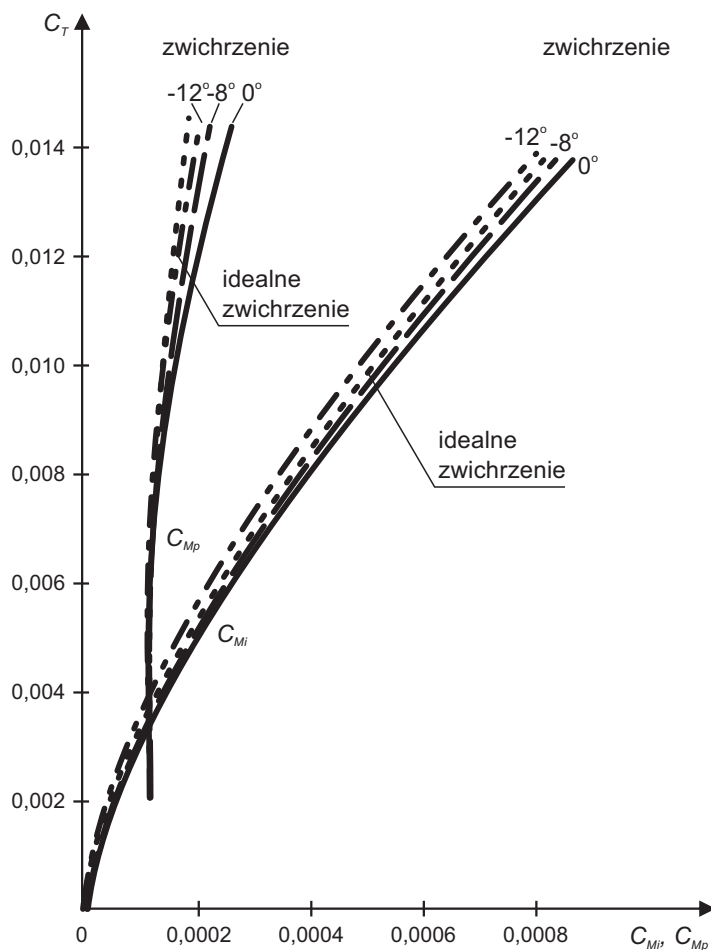
Rozważmy to szczegółowiej. Rozpatrzmy wirnik o prostokątnych łopatach, wytwarzający ciąg, którego współczynnik wynosi  $C_T = 0,0112$ . Załóżmy, że współczynnik wypełnienia tego wirnika  $\sigma = 0,06$ .

Rozkład strumienia indukowanego i kątów natarcia każdego przekroju wzdłuż kwadratu promienia względnego, w zależności od zwichrzenia, przedstawiono na rys. 2.10. Z wykresu tego widzimy, że warunki pracy łopaty ze wzrostem zwichrzenia liniowego są zbliżone do warunków pracy łopaty ze zwichrzeniem idealnym. Dla łopaty zwichrzonej (w porównaniu z płaską) prędkości indukowana oraz obciążenia wzrastają wraz ze zbliżaniem się ku nasadzie. Przy zastosowaniu zwichrzenia, maksymalny kąt natarcia przekroju wzrasta, jednak możliwość oderwania strumienia zmniejsza się, ponieważ maksymalny kąt natarcia posiada przekrój leżący na mniejszym promieniu.



**Rys. 2.10.** Rozkład strumienia indukowanego i kątów natarcia każdego przekroju wzdłuż kwadratu promienia względnego, w zależności od zwichrzenia

Rysunek 2.11 przedstawia wykres  $C_T$  w funkcji  $C_{M_i}$  oraz  $C_{M_p}$  dla łopaty prostokątnej o wypełnieniu  $\sigma = 0,06$ .



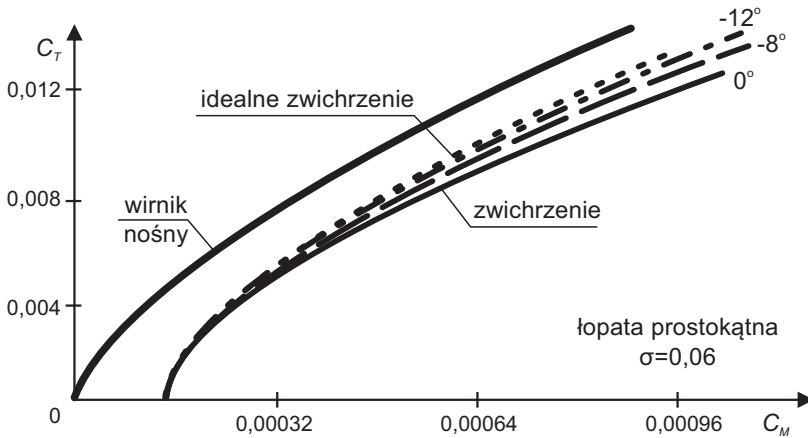
**Rys. 2.11.** Zależność współczynnika ciągu  $C_T$  od współczynnika momentu oporowego  $C_{M_p}$

Z przebiegu krzywych można wnioskować, że przy zastosowaniu zwichrzenia strumień staje się bardziej równomierny w zależności od ciągu i straty indukowane oraz profilowe maleją. Z przebiegu krzywych wynika również, że zwichrzenie przyczynia się do zmniejszenia strat przy wartościach współczynnika ciągu powyżej zwykle przyjętego za minimum (tj. większego od 0,006), pomimo że korzyść na oporze profilowym jest nieznaczna. Zwichrzenie natomiast jest niewygodne dla wartości współczynnika ciągu zbliżonym do zera, ponieważ przy tym końcowa część łopaty wytwarza ciąg ujemny, a straty pozostają te same. Tak więc optymalne

zwichrzenie będzie maleć przy zmniejszeniu średniego roboczego współczynnika ciągu.

Z wykresu na rys. 2.11 widać, że zwichrzenie liniowe  $-12^\circ$  najbardziej zmniejsza opory indukowane i opory profilowe. Dalsze zwiększenie zwichrzenia nie prowadzi do spodziewanych korzyści, gdyż w innych warunkach lotu może to być niepożądane.

Na rys. 2.12 przedstawiony jest wpływ zwichrzenia na charakterystyki wirników nośnych w locie wiszącym. Charakterystyki te zastały policzone za pomocą równania (2.56) dla  $C_z = 5,73 \alpha_r$  ( $\alpha_r$  – w radianach).



**Rys. 2.12.** Wpływ zwichrzenia na biegunową wirnika nośnego

**Tabela 2.1**

Wpływ zwichrzenia na przyrost ciągu

Zwichrzenie łopaty w stopniach	Zbieżność	Przyrost ciągu w porównaniu z łopata płaską [%]	
		$C_m = 0,00052$	$C_m = 0,00088$
0	1	-	-
-8	1	2	3
-12	1	3	4
Idealne	Optymalna	5	5

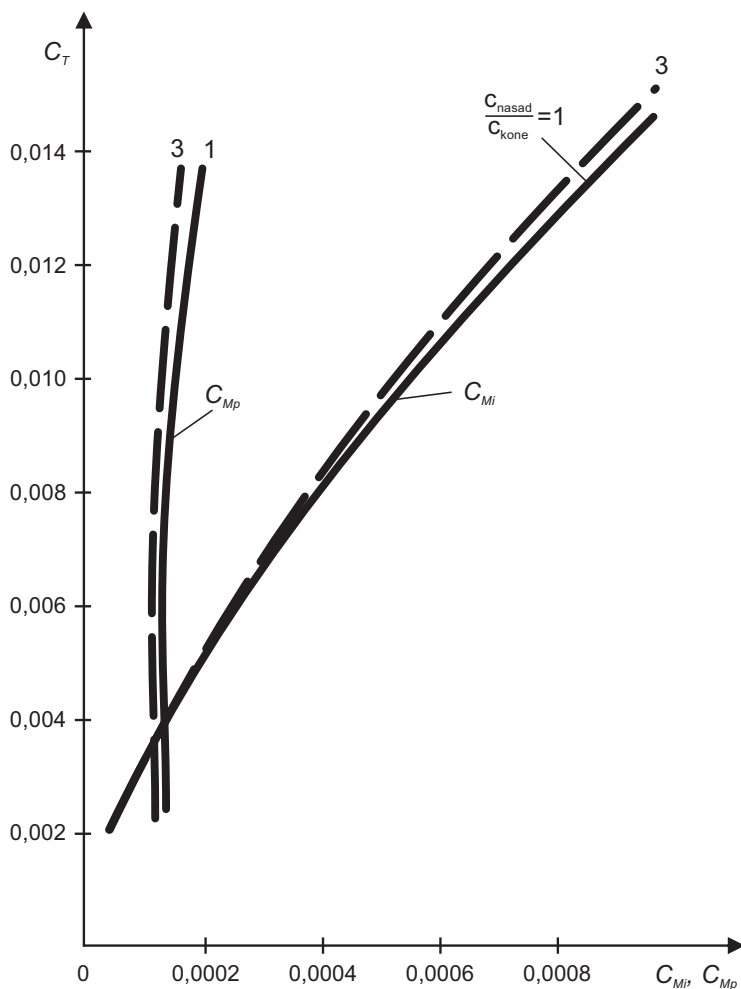
Z przebiegów tych krzywych widzimy, że rzeczywisty wirnik jest bardzo zbliżony do wirnika idealnego. Poniżej w tabeli 2.2 zamieszczamy procentowy przyrost ciągu, otrzymany z powodu zwichrzenia łopaty pod warunkiem, że moc jest stała. Wybrane wartości  $k_m$  odpowiadają  $C_T=0,008$  i  $0,012$  dla łopaty bez zwichrzenia

$$\left(\frac{C_T}{\sigma}\right) = 0,132 \text{ i } \left(\frac{C_T}{\sigma}\right) = 0,2.$$

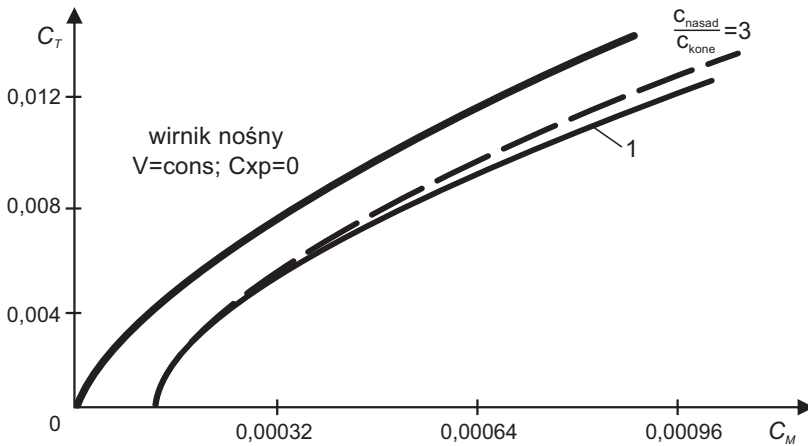
Tabela 2.2

Wpływ zwirzenia (skręcenia geometrycznego) i zbieżności na przyrost ciągu

Zwirzenie w stopniach	Zbieżność	Przyrost ciągu sumaryczny [%]	
		$C_M = 0,00052$	$C_M = 0,00088$
0	1	-	-
-8	3	5	5
-12	3	5	5
Idealne	Optymalna	7	7

Rys. 2.13. Wpływ zbieżności na zależność współczynnika  $C_T$  współczynników momentu oporowego  $C_{Mp}$  oraz współczynnika momentu indukowanego  $C_{Mi}$

Wpływ zbieżności łopaty wirnika na charakterystyki aerodynamiczne wirnika jest podobny do wpływu skrócenia geometrycznego łopaty, ponieważ zmiana cięciwy łopaty wzdłuż jej promienia wpływa na równomierny rozkład prędkości indukowanej w płaszczyźnie tarczy wirnika. Wpływ zbieżności na straty indukowane i profilowe dla łopaty bez zwichrzenia pokazany jest na rys. 2.13, zaś ogólny wpływ zbieżności na charakterystyki wirnika w locie wiszącym na rys. 2.14. Jako przykład można podać, że wzrost ciągu łopaty o zbieżności równej 3, przy  $C_M = 0,00052$  wyniesie 2%, zaś przy  $C_M = 0,00088$  wyniesie 3%.



**Rys. 2.14.** Wpływ zbieżności na bieżunową wirnika nośnego

Jeśli porównamy charakterystyki wirnika nośnego o tym samym zwichrzeniu i zbieżności, ale przy różnym wypełnieniu, to okaże się, że nie różnią się one pomiędzy sobą niczym.

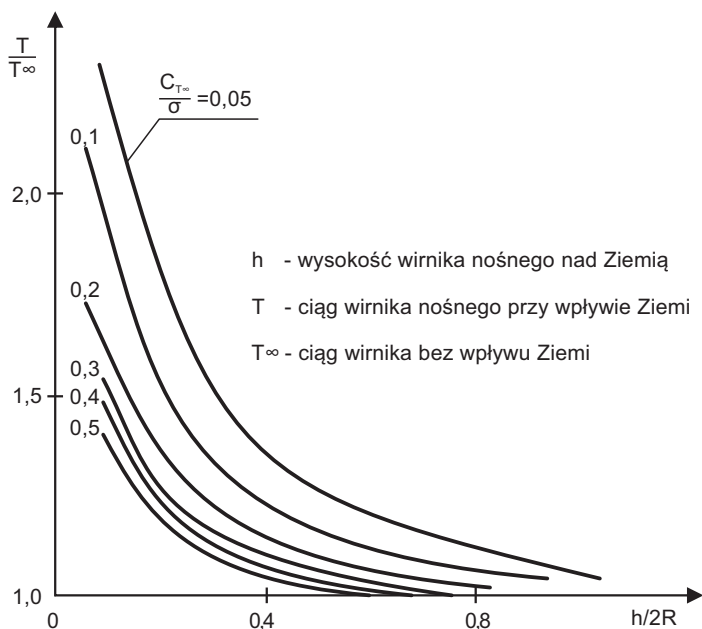
#### 2.1.2.9. Wpływ Ziemi na charakterystyki wirnika nośnego

Wpływ Ziemi na wirnik nośny śmigłowca ogólnie rzecz biorąc jest korzystny, ponieważ umożliwia przeciążonemu śmigłowcowi startować i zawisnąć ze zmniejszoną mocą niezbędną. Wpływ Ziemi odbija się korzystnie również na prędkości opadania z wykorzystywaniem autorotacji.

Efekt wpływu Ziemi maleje ze wzrostem odległości wirnika od Ziemi. Na wysokości równej średnicy wirnika wpływ ten jest znikomo mały. Zjawisko wpływu Ziemi tłumaczyć należy tym, że składowa osiowa prędkości strumienia przepływającego przez wirnik na powierzchni Ziemi musi być równa zero. Natomiast gdy zawis jest wykonywany z dala od Ziemi wówczas prędkość zawirikowa jest równa podwojonej wartości prędkości indukowanej. Przeprowadzane były doświadczenia dotyczące efektu wpływu Ziemi na charakterystyki wirnika nośnego w zawisie.

Wyniki doświadczeń przedstawiono na rys. 2.15. Mogą być wykorzystane do wyznaczenia przyrostu ciągu przy stałej mocy.

Szczegółową analizę wpływu Ziemi na współczynnik ciągu wirnika nośnego można znaleźć np. w pracach [1.2, 1.4, 1.6, 1.10, 1.13, 1.14, 1.17].



**Rys. 2.15.** Wpływ Ziemi na ciąg wirnika nośnego

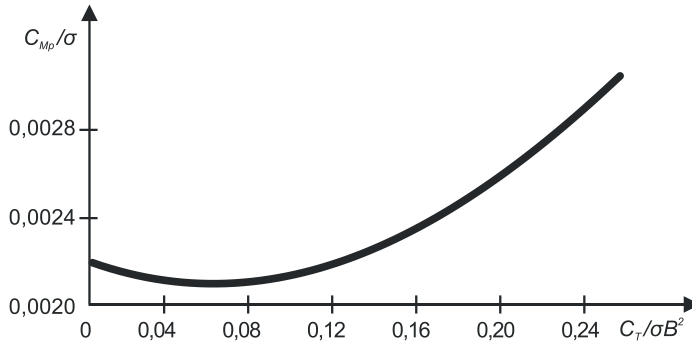
Przykładowo, z wykresu wynika, że jeśli wirnik nośny pracuje na wysokości  $\frac{1}{4}$  swej średnicy, przy  $\frac{C_T}{\sigma}$  w swobodnym strumieniu równym 0,2, to ciąg wzrasta o ok. 25% w porównaniu z zawisem z dala od Ziemi. Badania powyższe zostały przeprowadzone na jednowirnikowym śmigłowcu w locie naturalnym.

#### 2.1.2.10. Metodyka obliczania charakterystyk wirnika nośnego

Charakterystyki wirnika nośnego z łopatkami o obrysie prostokątnym oraz zwichrzeniu idealnym mogą być wykorzystane do obliczeń charakterystyk w zawisie dowolnego wirnika nośnego [1.4, 1.13].

Z równania (2.63) wyznaczamy charakterystyki podstawowego wirnika nośnego, następnie wprowadzamy poprawki na zwichrzenie, zbieżność i stan powierzchni rzeczywistego wirnika nośnego. Kolejność obliczeń jest następująca [1.4]:

- 1) dla danego ciężaru  $Q = mg$ , gęstości powietrza  $\rho$ , promienia wirnika nośnego  $R$  i prędkości na końcu łopaty  $WR$  obliczamy  $C_T$  i  $\sigma$ ;
- 2) ze wzoru  $B = 1 - \frac{\sqrt{C_T}}{n}$  obliczamy współczynnik strat brzegowych, a następnie obliczamy  $\frac{C_T}{\sigma B^2}$ ;
- 3) z wykresu (rys. 2.16) wyznaczamy  $C_{Mp}$ ; jeśli profil wzdłuż całej długości łopaty zmienia się, wówczas współczynnik  $C_{Mp}$  należy zwiększyć o 30%;
- 4) obliczamy  $C_{Mi} = \frac{C_T^{\frac{3}{2}}}{2B}$ ;
- 5) obliczamy sumę  $C_M = C_{Mp} + C_{Mi}$ , a następnie moc.



Rys. 2.16. Charakterystyka  $C_{Mp} / \sigma(C_T / \sigma)$

Dla łopat zbieżnych, zwichrzonych liniowo lub bez zwichrzenia, moc niezbędna wirnika nośnego wzrośnie zgodnie, a przyrost tej mocy możemy oszacować posługując się danymi z tabeli 2.3.

Tabela 2.3

Poprawki na przyrost mocy niezbędnej do pionowego wznoszenia śmigłowca w zależności od parametrów geometrycznych łopaty [1.10, 1.13]

Zbieżność	Zwichrzenie w stopniach	$\frac{C_T}{\sigma} = 0,134$	$\frac{C_T}{\sigma} = 0,2$
1:1	0	5,5 %	7,2%
1:1	-8	3%	3,5%
1:1	-12	1,5%	1,5%
3:1	0	3,5%	3%
3:1	-8	0	-0,5%
3:1	-12	0	-0,5%



W powyższej tabeli podano procentowy wzrost mocy przy warunku zachowania stałego ciągu. Aby wyznaczyć zmniejszenie się ciągu przy stałej mocy, musimy procentowe przyrosty mocy dla  $\frac{C_T}{\sigma} = 0,134$  pomnożyć przez 0,8, zaś dla  $\frac{C_T}{\sigma} = 0,2$  przez 0,4 [1.10, 1.11, 1.13].

### 2.1.3. Autorotacja wirnika nośnego śmigłowca

Podczas opadania pionowego śmigłowca można wykorzystać zjawisko autorotacji, gdy wirnik nośny obraca się dzięki siłom aerodynamicznym. W locie tym energia potencjalna jest wykorzystywana na pokonanie momentu oporowego, pokonującego opór profilowy, indukowany oraz opory mechaniczne.

Przy autorotacyjnym opadaniu wirnik nośny wytwarza w przybliżeniu taki sam opór jak spadochron o takiej samej powierzchni jak tarcza wirnika nośnego. Bilans energii przy samokręcie można przedstawić w postaci:

$$mgW = mgv_i + N_{prof} + N_{strat\ mech.} \quad (2.64)$$

gdzie:

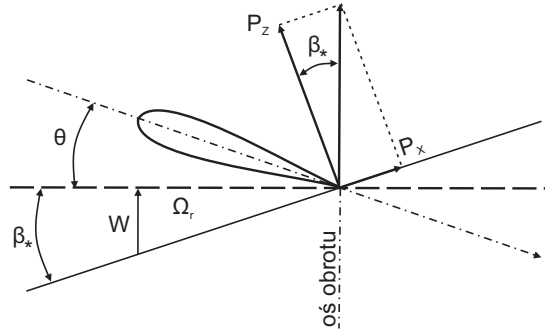
- $mg$  – ciężar śmigłowca;
- $W$  – prędkość opadania;
- $v_i$  – średnia efektywna prędkość indukowana;
- $N_{prof.}$  – straty mocy na pokonanie oporu profilowego łopat wirnika nośnego;
- $N_{strat\ mech.}$  – straty mocy na pokonanie oporów mechanicznych w przekładniach napędowych.

Jeżeli ciężar śmigłowca jest znany, znana jest również prędkość indukowana. Straty mocy na pokonanie oporu profilowego w warunkach autorotacji wirnika nośnego wynoszą od 25% do 50% wszystkich strat mocy. Oznacza to, że prędkość opadania w dużej mierze zależy od oporu profilowego łopat. Należy zatem dążyć do zmniejszenia tych oporów.

Śmigłowiec musi być zdolny wylądować z silnikiem niepracującym. Może on lądować zarówno w warunkach autorotacji, jak też w warunkach strumienia wiatrakowego. Oba te terminy różnią się pomiędzy sobą raczej z punktu widzenia ilościowego. W warunkach strumienia wiatrakowego łopaty wirnika ustawione są pod takimi kątami, które zapewniają maksymalny moment oporowy na osi wirnika, przy tym wartość ciągu nie ma żadnego znaczenia. W warunkach autorotacji, łopaty muszą być ustawione pod kątami, które zapewniają maksymalny opór tarczy wirnika przy momencie oporowym na osi wału równym zero. Nieduże kąty dodatnie stwarzają

najlepsze warunki pracy przy autorotacji, zaś w warunkach strumienia wiatrakowego potrzebne są kąty ujemne.

Wirnik nośny pracujący w warunkach strumienia wiatrakowego wytwarza również opór, jednak w tych warunkach jest urządzeniem wytwarzającym moment, a jednocześnie wirnik nośny jest także urządzeniem wytwarzającym ciąg.



**Rys. 2.17.** Układ sił na profilu łopaty w warunkach autorotacji

Na rys. 2.17 przedstawiono przekrój łopaty wirnika nośnego znajdującego się w warunkach ustalonej autorotacji. Na element łopaty nie działają siły przyspieszające ani też opóźniające jej obrót. Związki geometryczne zachodzące w stanie autorotacji są następujące:

Zależność na kąt  $\beta_*$  można wyrazić tak samo jak w zawisie:

$$\beta_* = \frac{W}{\Omega r} = \frac{C_{x_p}}{C_z} \quad (2.65)$$

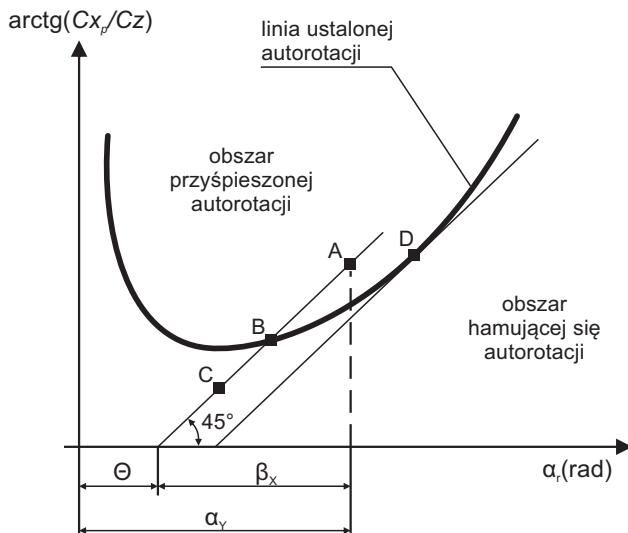
W warunkach ustalonej autorotacji:

$$C_{x_p} = C_z \beta_* \quad (2.66)$$

zaś kąt natarcia  $\alpha_r$  będzie wynosił:

$$\alpha_r = \theta + \beta_*$$

W celu dokładniejszego poznania zakresu autorotacji i wyznaczenia jej charakterystyk rozpatrzmy wykres autorotacji przedstawiony na rys. 2.18, na którym podana jest zależność  $\frac{C_{x_p}}{C_z} = f(\alpha_r)$ .



**Rys. 2.18.** Wykres ustalonej autorotacji

Korzystać z tego wykresu można w następujący sposób. Na osi odciętych odkładamy kąt nastawienia łopaty  $\theta$ , następnie z tego punktu prowadzimy linię prostą pod kątem  $45^\circ$  do osi odciętych. Prostopadła opuszczona z dowolnego punktu tej linii na oś odciętych wyznacza kąt  $\alpha_r$ . Odejmując od  $\alpha_r$  kąt nastawienia  $\theta$ , otrzymamy kąt  $\beta_*$ . Analizując wykres (rys. 2.18), widzimy, że w punkcie A  $\beta_* > \frac{C_{x_p}}{C_z}$ .

Przy zachowaniu tej nierówności wypadkowa sił aerodynamicznych na profilu odchylona jest od osi obrotu w ten sposób, że przyspiesza obrót elementu łopaty, a więc prędkość obwodowa profilu łopaty  $\Omega r$  wzrasta. Przy wzroście prędkości obwodowej  $Wr$  maleje kąt  $\beta_*$ . Element łopaty przyspiesza obrót dopóty, dopóki kąt  $\beta_*$  nie zmaleje do wartości odpowiadającej na wykresie punktowi B. W punkcie B następuje stan równowagi autorotacji, ponieważ  $\beta_* = \frac{C_{x_p}}{C_z}$ . Dla danego kąta

nastawienia  $\theta$  punkt A leżący na prostej poprowadzonej pod kątem  $45^\circ$  do osi odciętych odpowiada warunkom przyspieszonej autorotacji i wypadkowa siła aerodynamiczna jest skierowana do przodu od osi obrotu. Punkt B na tej prostej odpowiada ustalonej autorotacji, a wypadkowa siła aerodynamiczna pokrywa się z osią obrotu. Punkt C odpowiada zakresowi hamowanej autorotacji. Wypadkowa siła aerodynamiczna odchylona jest do tyłu od osi obrotu. Największym kątem  $\theta$ , przy którym może występować autorotacja, jest punkt D, mieszczący się na stycznej poprowadzonej równolegle do poprzedniej prostej.

Z wykresu autorotacji możemy również sądzić o związku pomiędzy prędkością obrotu i wartością kąta nastawienia. Jeżeli zaniedbać zmianę prędkości obrotu  $\Omega$ , to  $\beta_*$  zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do  $\Omega r$ . Zatem największa prędkość obrotu odpowiada najmniejszemu kątowi  $\beta_*$ . Maksymalnej prędkości obrotu odpowiada kąt nastawienia  $\theta$ , otrzymany z przecięcia się prostej z osią odciętych i przechodzącej przez punkt leżący na krzywej  $\frac{C_{X_p}}{C_Z} = f(\alpha_r)$ , odpowiadający

najmniejszej wartości tego stosunku. Na większych kątach nastawienia są mniejsze obroty wirnika nośnego. Ze wzrostem kąta nastawienia  $\theta$  prędkość obrotu wirnika nośnego będzie maleć coraz szybciej, aż osiągnie największą dopuszczalną wartość (punkt D). Punkt ten reprezentuje nieciągłość krzywej. Fizycznie oznacza to, że najmniejszy wzrost kąta nastawienia stanie się przyczyną całkowitego unieruchomienia wirnika, po czym wirnik zacznie obracać się w przeciwnym kierunku, co jest niedopuszczalne.

Wykres autorotacji przedstawia pracę jedynie jednego przekroju łopaty. Należy pamiętać, że przy obrocie łopaty różne jej przekroje pracują na różnych kątach nastawienia  $\theta$ , różnych prędkościach obwodowych, a więc różnych kątach  $\beta_*$ . Pewne przekroje wytwarzają siłę aerodynamicznie przyspieszającą inne – hamującą. Do wyznaczenia pracy łopaty w całości, należy te siły scałkować wzdłuż całej rozpiętości łopaty.

Każdy konstruktor dąży do zaprojektowania wirnika nośnego w ten sposób, by prędkość na zakresie autorotacji, przy danym ciężarze śmigłowca, była najmniejsza. Jak wiadomo, prędkość opadania zależy od oporu profilowego, dlatego też optymalnym kątem natarcia będzie taki kąt, przy którym straty na pokonanie oporu profilowego będą najmniejsze. Straty profilowe elementu łopaty możemy wyrazić jako:

$$\frac{1}{2} C_{X_p} \rho (\Omega r)^2 c dr (\Omega r). \text{ Dla elementu łopaty moc profilowa } N_{prof.} \approx C_{X_p} (\Omega r)^3.$$

Wiadomo, że  $dT = C_y \rho (dT = \frac{1}{2} \rho (\Omega r)^2 C_Z c dr$ . Oznacza to, że dla określonego

ciągu  $(\Omega r) \approx \frac{1}{\sqrt{C_Z}}$ , stąd moc profilowa jest proporcjonalna:

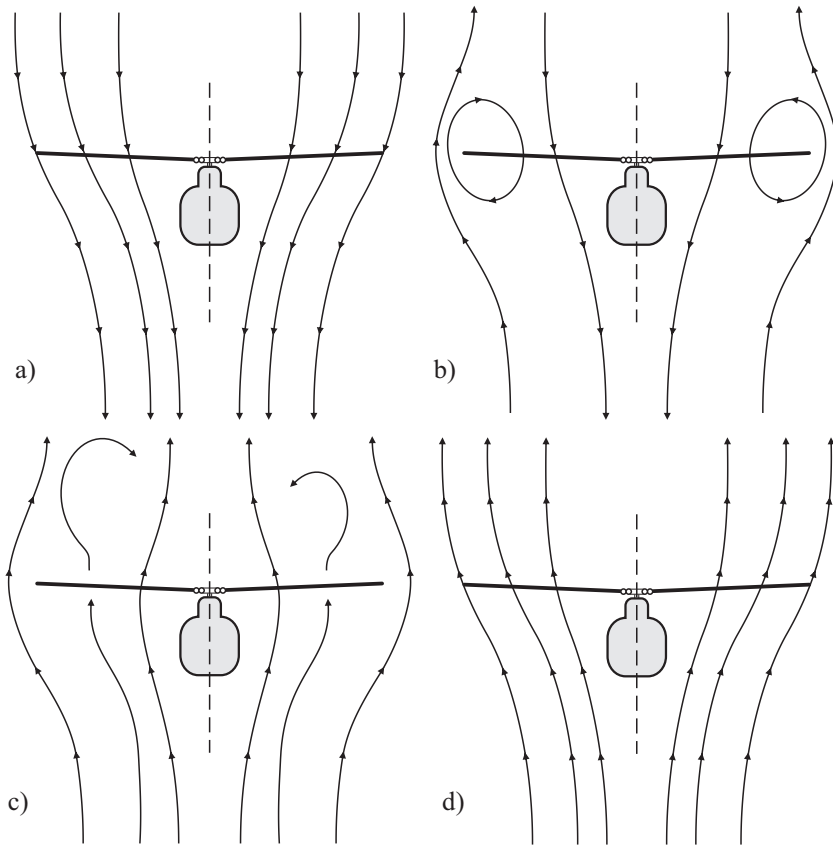
$$N_{prof.} \approx C_{X_p} (\Omega r)^3 \approx \frac{C_{X_p}}{C_Z^{3/2}} \quad (2.67)$$

Zatem do uzyskania minimalnych strat na pokonanie oporu profilowego, a więc do uzyskania minimalnej prędkości przy opadaniu, stosunek  $\frac{C_{x_p}}{C_z^{3/2}}$  dla każdego elementu łopaty winien być najmniejszy.

### 2.1.3.1. Rodzaje strumieni przepływających przez tarczę wirnika nośnego

W locie pionowym występują cztery podstawowe rodzaje strumienia przepływającego przez tarczę wirnika (rys. 2.19):

- a) strumień normalny śmigłowy (rys. 2.19a);
  - b) strumień pierścienia wirowego (rys. 2.19b);
  - c) strumień przepływu turbulentnego nad wirnikiem (rys. 2.19c);
  - d) strumień wiatrakowy (rys. 2.19d).
- Strumień śmigłowy charakteryzuje się tym, że ruch powietrza przepływającego przez wirnik ma ten sam kierunek co prędkość indukowana. Ten rodzaj strumienia obejmuje lot pionowy wznoszący z dowolną prędkością aż do zawisu (rys. 2.19a).
  - Strumień pierścienia wirowego (rys. 2.19b) charakteryzuje się tym, że strumień podstawowy przepływający przez tarczę jest skierowany ku dołowi, ze względu na znaczne prędkości indukowane, zaś strumień znajdujący się z dala nad wirnikiem – skierowany jest ku górze. Strumień pierścienia wirowego mieści się pomiędzy zawisem i opadaniem z prędkością równą średniej prędkości indukowanej, tj. kiedy strumień przepływający przez samą tarczę równy jest zeru. Można tu jeszcze dodać, że w tym rodzaju przepływu strumień jest nieustalony i duże masy powietrza cyrkulują dookoła końców łopat.
  - Strumień przepływu turbulentnego nad wirnikiem jest stanem przejściowym pomiędzy stanem pierścienia wirowego a strumieniem wiatrakowym (autorotacji).
  - Rysunek 2.19d pokazuje stan przepływu dla idealnej autorotacji,  $W + v_i = 0$ . Gdyby wirnik nie miał profilowanych strat mocy, spadek mocy w tym stanie byłby równy zeru, ponieważ  $N = T(W + v_i) = 0$ . Chociaż nominalnie nie ma przepływu przez dysk, w rzeczywistości występuje znaczna recyrkulacja i turbulencje. Stan przepływu jest podobny do opływu okrągłej płyty o tej samej powierzchni co tarcza wirnika nośnego (brak przepływu przez dysk, nad nim silny turbulentny ślad).



**Rys. 2.19.** Rodzaje strumienia przepływającego przez tarczę wirnika nośnego śmigłowca [1.12]: a) normalny śmigłowy, b) pierścienia wirowego, c) przepływu turbulentnego nad wirnikiem, d) wiatrakowy

Strumień wiatrakowy (rys. 2.19d) charakteryzuje się tym, że przy dużych prędkościach opadania, strumień przepływający przez wirnik z dołu ku górze staje się stabilny, a prędkość jego w miarę zbliżania się do tarczy wirnika maleje z powodu prędkości indukowanej, która jest przeciwnie skierowana do napływającego strumienia. Przy małych prędkościach opadania strumień za wirnikiem znacznie się rozszerza, z tego powodu powstaje recyrkulacja strumienia i znaczna turbulencja.

### 2.1.3.2. Wyznaczenie charakterystyk wirnika nośnego przy pionowym opadaniu

Charakterystyki wirnika nośnego na zakresie lotu wznoszącego i zawisu można wyznaczyć z dużą dokładnością na podstawie teorii strumieniowej. Jednak teoria ta nie może być wykorzystywana dla wszystkich rodzajów ruchu. Badania na zakre-

sie autorotacji wykazały, że wirnik przy opadaniu pracuje w warunkach strumienia pierścienia wirowego. Stosowanie w tym przypadku teorii strumienia prowadzi do niedorzeczności. Trzeba więc dla tego rodzaju ruchu posłużyć się innymi fizycznymi zależnościami. Wyznamy „średnią” prędkość indukowaną w strumieniu pierścienia wirowego, tj. prędkość która zapewni dane ciągu i prędkości opadania, pod warunkiem że przepływający strumień przez tarczę wirnika jest równomierny. Logiczną podstawą do takiego badania jest twierdzenie o pędzie. Dla strumienia śmigłowego twierdzenie to można zapisać w postaci

$$T = \pi R^2 \rho (W + v_i) 2v_i \quad (2.68)$$

gdzie  $v_i$  i  $W$  są dodatnie, jeśli skierowane są ku dołowi. Dla strumienia wiatrakowego równanie (2.68) przyjmie postać

$$T = \pi R^2 \rho (-W - v_i) 2v_i \quad (2.69)$$

Wygodniej jest wyrazić prędkości w postaci bezwymiarowej. Przyjmiemy, że bezwymiarowa prędkość indukowana (odniesiona do prędkości indukowanej w zawisie) wyrazi się wzorem:

$$\bar{v}_i = \frac{v_i}{v_{ih}} \frac{v_i}{\sqrt{\frac{T}{2\rho\pi R^2}}} \quad (2.70)$$

zaś bezwymiarowa prędkość wznoszenia (opadania), odniesiona do prędkości indukowanej w zawisie, wyrazi się wzorem:

$$\bar{W} = \frac{W}{\sqrt{\frac{T}{2\rho\pi R^2}}} \quad (2.71a)$$

Prędkości bezwymiarowe pozwalają na jednym wykresie przedstawić wszystkie możliwe obciążenia tarczy oraz prędkości. Wprowadzając te pojęcia do równania (2.68) otrzymamy:

$$1 = \bar{v}_i (\bar{W} + \bar{v}_i)$$

lub

$$\bar{W} = \frac{1}{\bar{v}_i} - \bar{v}_i \quad (2.71b)$$

dla strumienia śmigłowego oraz



$$1 = -\bar{v}_i (\bar{v} + \bar{W}_i)$$

lub

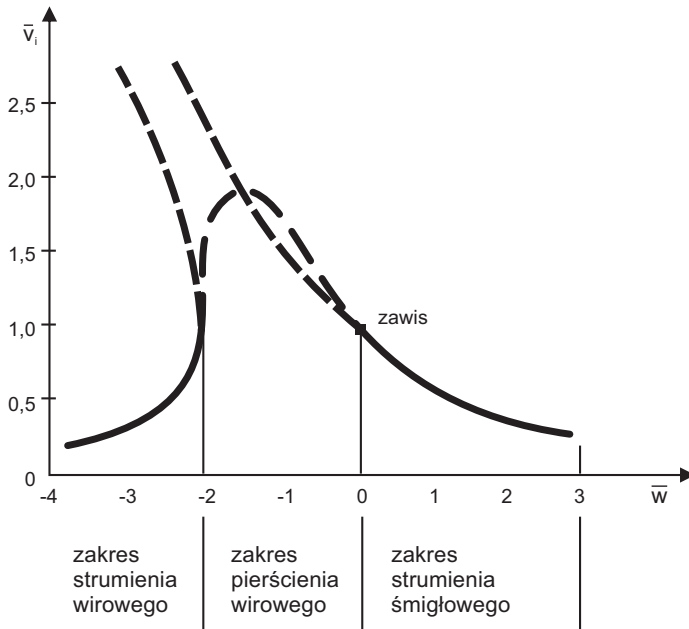
$$\bar{W} = -\frac{1}{\bar{v}_i} - \bar{v}_i \quad (2.72)$$

dla strumienia wiatrakowego.

Związki te zostały przedstawione na wykresie (rys. 2.20).

Wspomnieliśmy już, że równanie pędu traci sens wówczas, gdy strumień staje się nieustalony. Dla strumienia śmigłowego przedział ten osiąga się, gdy prędkość indukowana przy opadaniu pionowym jest większa od prędkości indukowanej w locie wiszącym lub przy  $\bar{v}_i > 1$ . W strumieniu wiatrakowym przepływ staje się nieustalony przy  $\bar{v}_i > -\frac{1}{2}\bar{W}$ .

Obszar, w którym równanie pędu nie nadaje się do wykorzystania, na wykresie (rys. 2.20) przedstawiono linią przerywaną. Korzystając z tego wykresu można podać sposób wyznaczenia średniej efektywnej prędkości indukowanej przy występowaniu strumienia pierścienia wirowego na podstawie pomiarów wykonanych podczas badań w locie oraz oszacować charakterystyki wirnika nośnego w locie z częściowym wykorzystaniem mocy, jak też przy opadaniu bez pracującego silnika.



Rys. 2.20. Stany pracy wirnika nośnego podczas pionowego opadania

Średnią efektywną prędkość indukowaną należy obliczyć z pomiarów w locie, ponieważ niemożliwie jest pomierzenie jej bezpośrednio. Prędkość tę określamy z równania, które bilansuje moc na wale jako sumę mocy zużywanych na wznoszenie, wytwarzanie prędkości indukowanej i na pokonanie oporów profilowych.

$$N_w = T(W + v_i) + \frac{\delta_p}{8}(\Omega R)^3 \sigma \pi R^2 \quad (2.73)$$

gdzie:

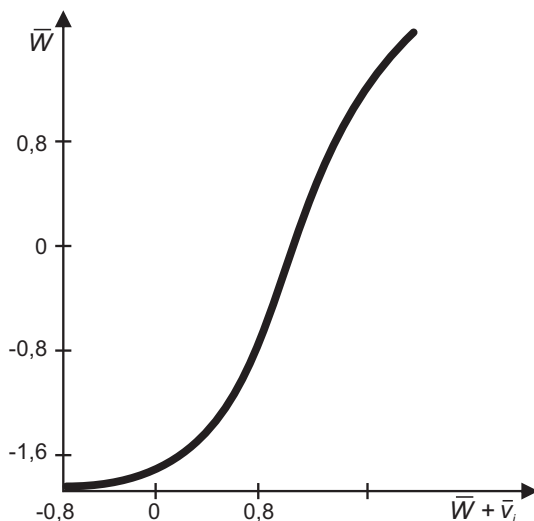
$N_w$  – moc na wale wirnika nośnego;

$d_p$  – średnia wartość współczynnika oporu profilu łopaty lub współczynnika oporu profilu przy średniej wartości kąta natarcia, przy którym  $C_{Z_{sr}} = \frac{3C_T}{\sigma}$ .

Równanie (2.73) możemy zapisać w postaci bezwymiarowej jako:

$$C_M = \frac{\sigma \delta}{4} + \frac{1}{2}(\bar{W} + \bar{v}_y) C_T^{\frac{3}{2}} \quad (2.74)$$

Jeśli zmierzona jest moc na wale, ciężar śmigłowca, obroty wirnika nośnego, prędkość opadania oraz średni współczynnik oporu łopaty, za pomocą równań (2.73) i (2.74) możemy wyznaczyć efektywną prędkość indukowaną. Na rys. 2.20 linią przerywaną z kropką podana jest krzywa uzyskana z pomiarów.



**Rys. 2.21.** Prędkość opadania w funkcji prędkości indukowanej

Do obliczenia prędkości opadania śmigłowca z pracującym silnikiem wygodnie jest krzywą z rys. 2.20 przebudować jako  $\bar{v}_i + \bar{W}$  w funkcji  $\bar{W}$ . Wykres tego typu jest przedstawiony na rys. 2.21. Prędkość opadania, mając dane  $C_T$ ,  $C_M$  i  $\delta$ , można obliczyć z zależności (2.74). Następnie po odczytaniu z wykresu (rys. 2.21) wartość  $\bar{W}$ , dla danego ciągu, powierzchni tarczy wirnika nośnego i gęstości powietrza można obliczyć prędkość opadania śmigłowca  $W$ .

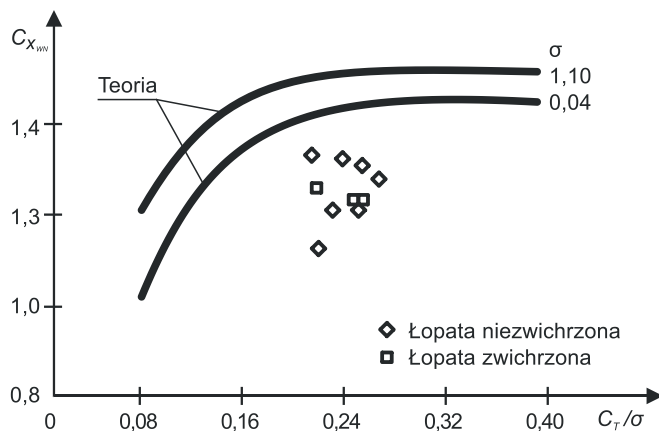
Podana metoda wyznaczenia charakterystyk opadania pionowego jest metodą pierwszego przybliżenia. Jednak uważa się, że metoda ta bazuje na prawidłowych podstawach i wyniki przy obliczaniu charakterystyk wirnika nośnego, pobierającego częściową moc przy opadaniu pionowym, są zadowalające.

### 2.1.3.3. Opór wirnika nośnego przy opadaniu pionowym

Poprzednio rozpatrywaliśmy metodę wyznaczania charakterystyk wirnika nośnego przy opadaniu na zakresie strumienia pierścienia wirowego z częściowym pobieraniem mocy. Metoda ta jest słuszna również dla opadania autorotacyjnego, jednak dla tego zakresu możemy wykorzystać prostszy sposób, traktując wirnik nośny jako tarczę wytwarzającą opór, pomijając istotę powstawania tego oporu. Sumaryczny opór tarczy wirnika możemy wyrazić przez współczynnik oporu wirnika  $C_{X_{WN}}$ .

$$C_{X_{WN}} = \frac{T}{\frac{1}{2} \rho W^2 \pi R^2} \quad (2.75)$$

Współczynnik oporu tarczy wirnika nośnego  $C_{X_{WN}}$  przyjmujemy jak dla okrągłej płaskiej płytki i można go oszacować jako  $C_{X_{WN}} \cong 1,28$ , zaś dla spadochronu lub czaszy anemometru  $C_X \cong 1,4$ . Na podstawie drugiej zasady dynamiki Newtona oraz przyjmując że masa powietrza znajdująca się pod tarczą wirnika ma prędkość tarczy, można napisać, że  $T = \rho \pi R^2 V^2$  i  $C_{X_{WN}} = 2,0$ . Stąd też, dopóki tarcza oddziałuje jedynie na powietrze znajdujące się pod nią,  $C_{X_{WN}} = 2,0$  będzie wartością graniczną.



**Rys. 2.22.** Współczynnik oporu wirnika w funkcji współczynnika ciągu

Na rys. 2.22 przedstawiono krzywe  $C_x C_{x_{wv}} = f\left(\frac{C_T}{\sigma}\right)$ . Z tego wykresu możemy odczytać, że przy normalnych kątach nastawienia możemy otrzymać współczynnik oporu równy 1,2. Na tym samym wykresie podane są również krzywe teoretyczne, na podstawie których możemy stwierdzić, że opór wirnika nośnego większy jest o ok. 15% w porównaniu z danymi eksperymentalnymi.

Parametr  $\frac{C_T}{\sigma}$  jest miarą kąta nastawienia łopaty, ponieważ prędkość obwodowa wirnika przy opadaniu pionowym ulega zmianie w zależności od kąta nastawienia łopaty. Punkty doświadczalne podane na tym wykresie otrzymane zostały przy równych obrotach w przedziale użytkowym obrotów wirnika nośnego.

Nasuwać się tu następujące wnioski:

- 1) obroty wirnika przy opadaniu śmigłowca należy utrzymywać w przedziale użytkowym;
- 2) przy zmianie kąta nastawienia łopaty w granicach roboczego przedziału, prędkość opadania nie ulega zmianie. Potwierdzają to krzywe teoretyczne.

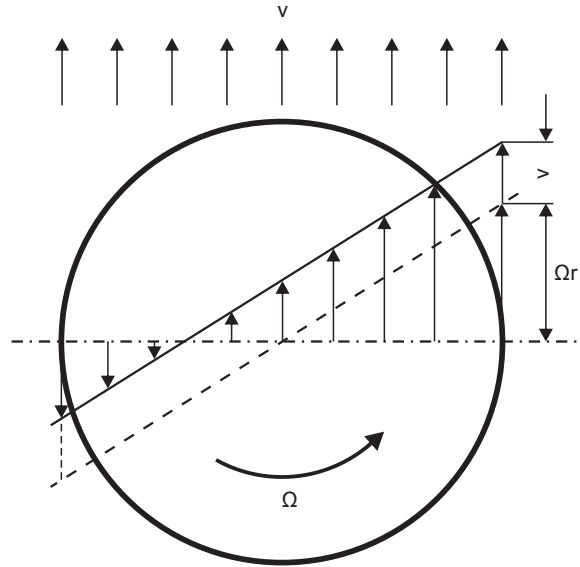
## 2.2. Lot postępowy śmigłowca – wprowadzenie

Lot śmigłowca do przodu obejmuje wszystkie przypadki lotu śmigłowca przy opływie ukośnym. Lot poziomy jest szczególnym przypadkiem lotu do przodu.

Rozważania dotyczące lotu do przodu, opierają się na uproszczonej teorii Glauerta, jednak tam gdzie przybliżona teoria jest niewystarczająca, będziemy korzystać z prac nowszych, dających większe dokładności [1.13, 1.14].

Zanim wprowadzimy ilościowe związki umożliwiające obliczenie sił i momentów działających na wirnik nośny przy opływie ukośnym, musimy poznać pracę wirnika w tym opływie.

Rozkład prędkości łopat wirnika podczas ruchu postępowego śmigłowca przedstawiono na rys. 2.23.



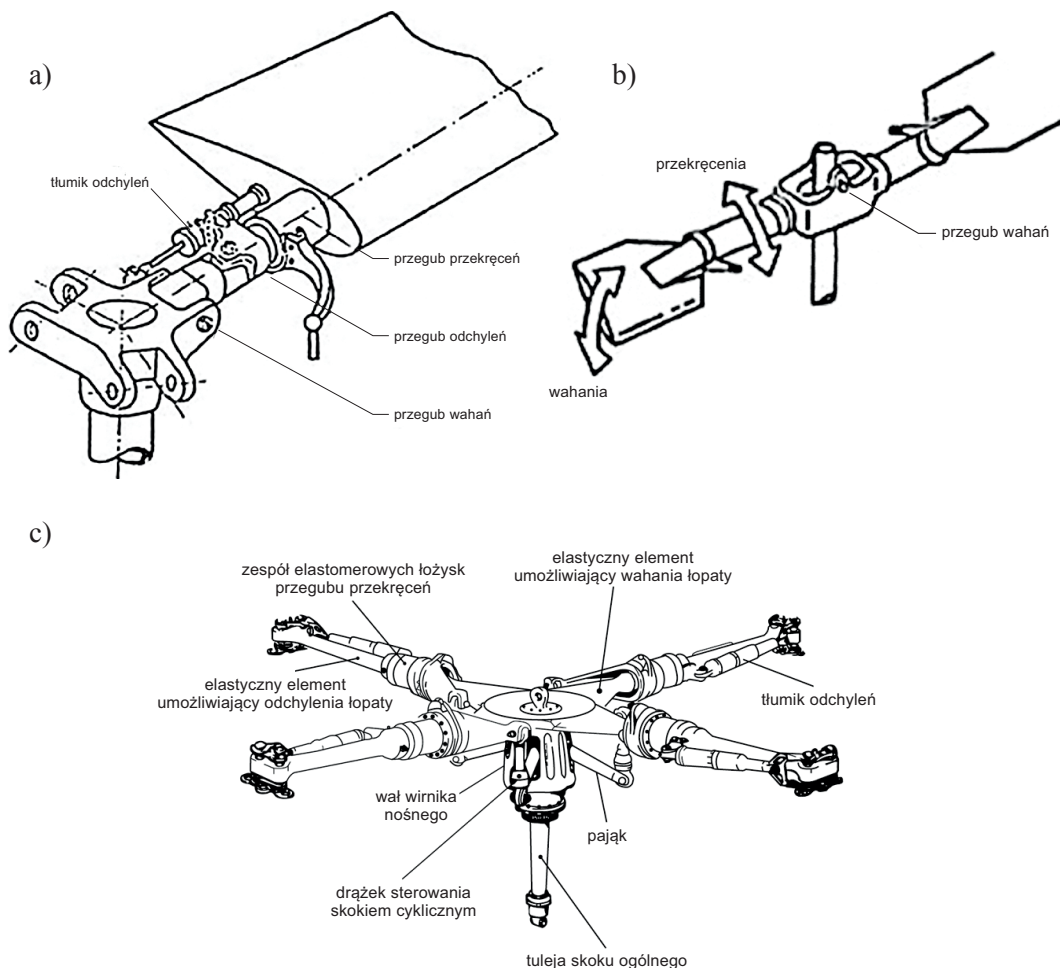
**Rys. 2.23.** Rozkład prędkości na tarczy wirnika nośnego podczas lotu do przodu

Łopaty poruszające się w kierunku ruchu postępowego mają większe prędkości względem ośrodka, zaś łopaty poruszające się przeciwnie do kierunku ruchu – prędkości mniejsze. Na wirniku nośnym powstaje z tego powodu niesymetryczna siła nośna. Istnieją dwie metody likwidacji tej niesymetrii:

1. Łopaty mocuje się za pomocą przegubów, dzięki czemu likwiduje się moment przekazywany na piastę wirnika nośnego. Sterowanie odbywa się w tym przypadku przez pochylenie osi piasty do potrzebnego położenia, w którym wypadkowy wektor siły aerodynamicznej będzie skierowany w kierunku żądanym (rys. 2.24a).
2. Łopaty mogą być zamocowane w piaście z jednym stopniem swobody obrotu względem osi podłużnej. Wówczas łopata poruszająca się w kierunku strumienia napływającego (większa prędkość opływu) może mieć mniejszy kąt, zaś łopata poruszająca się zgodnie ze strumieniem – kąt większy, przez co zrównają się siły nośne (rys. 2.24b).

Śmigłowce będące w eksploatacji, przeważnie mają zamocowanie przegubowe i łopaty wykonują podczas ruchu wahania. Rozważania nasze będą dotyczyć śmigłowców z przegubowym mocowaniem łopat (rys. 2.24). Mocowanie takie ma dwa

przeguby: przegub poziomy i przegub pionowy, dzięki temu momenty w przegubie są równe zero.



**Rys. 2.24.** Głowice wirników nośnych: a) przegubowa, b) huśtawkowa, c) bezprzegubowa [12]

### 2.2.1. Wahania łopat i fizyczna interpretacja szeregu Fouriera

Wahania łopat w ruchu postępowym wygodnie jest badać, wyrażając zmianę kąta wahań pionowych  $\beta$  w zależności od azymutalnego położenia łopaty  $\Psi$ , w postaci prostego ruchu sinusoidalnego. Ośią odniesienia w tym przypadku jest oś sterowania, którą można zdefiniować jako oś, względem której kąt nastawienia łopat

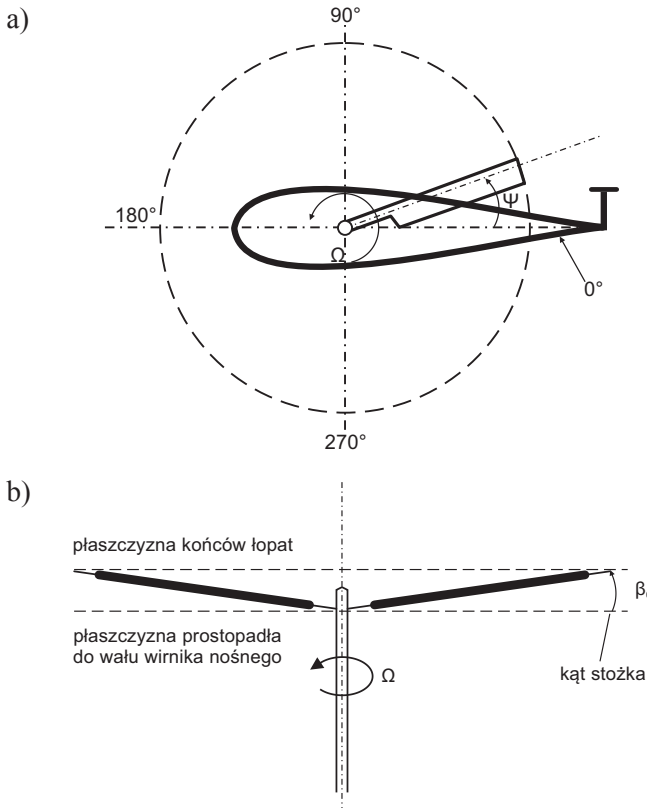
jest stały. Wahania łopat możemy wyrazić w postaci sumy prostych ruchów harmonicznym:

$$\beta = a_0 - a_1 \cos \Psi - b_1 \sin \Psi - a_2 \cos 2\Psi - b_2 \sin 2\Psi \quad (2.76)$$

gdzie  $\beta$  oznacza kąt zawarty pomiędzy płaszczyzną prostopadłą do osi sterowania i łopata,  $\Psi$  – kąt azymutu łopaty (rys. 2.25).

Współczynniki w równaniu (2.76) mają następujący sens geometryczny:

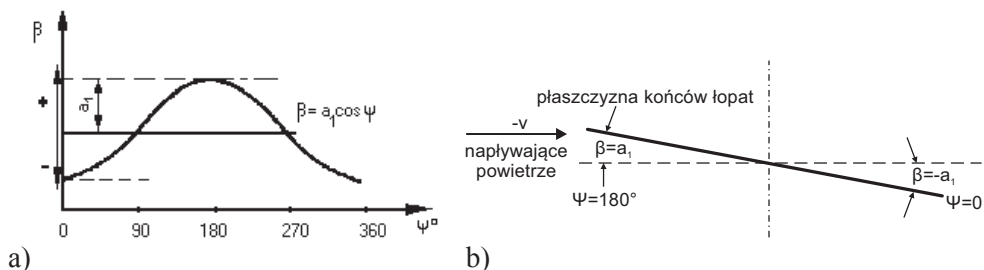
- Współczynnik  $a_0$  reprezentuje część kąta wahań pionowych, która nie zależy od położenia azymutalnego łopaty. W zawisie  $\beta = a_0$  (rys. 2.25).
- Współczynnik  $a_1$  reprezentuje amplitudę prostego ruchu kosinusoidalnego w postaci:  $\beta = a_1 \cos \psi$ . Wykres ten przedstawiono na rys. 2.26a. Na rys. 2.26b pokazano położenie płaszczyzny końców łopat na azymutach  $\psi=0^\circ$  oraz  $\psi=270^\circ$  (rys. 2.25).



**Rys. 2.25.** Azymut łopaty wirnika nośnego (a); wahania pionowe łopaty wirnika nośnego w zawisie (b)

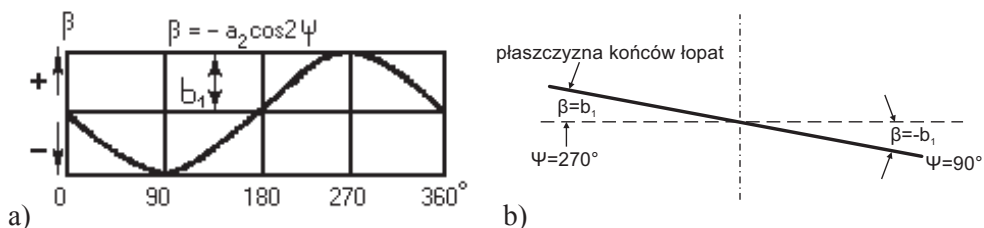


Z rys. 2.26a wynika, że kąt  $\beta$  osiąga największą wartość przy  $\psi=180^\circ$ , najmniejszą natomiast przy  $\psi=0^\circ$ . Obserwując wirnik, którego łopaty poruszają się wg krzywej  $\beta = -a_1 \cos \Psi$  z boku zaobserwujemy obraz przedstawiony na rys. 2.26b.



**Rys. 2.26.** Fizyczna interpretacja prostego kosinusoidalnego ruchu łopaty wirnika nośnego: a) przebieg zmian kąta  $\beta$  w funkcji azymutu; b) położenie płaszczyzny końców łopat (widok z boku)

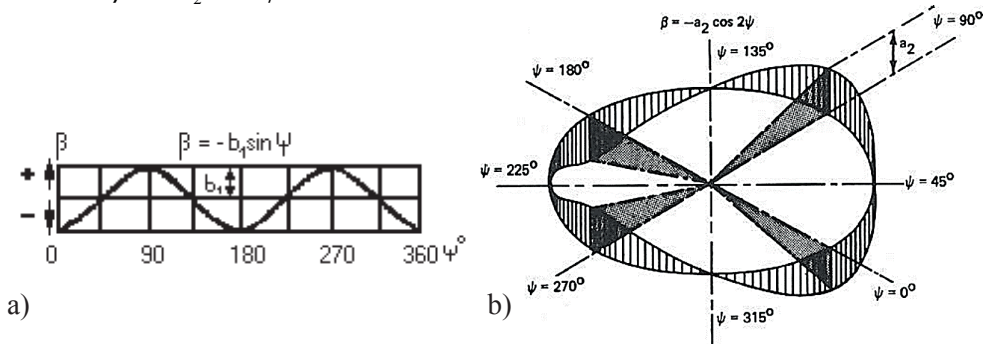
Współczynnik  $b_1$  reprezentuje amplitudę ruchu sinusoidalnego. Tor ruchu łopaty określony za pomocą równania  $\beta = -b_1 \sin \Psi$  przedstawiono na rys. 2.27a. Przy tym wznios łopaty równy jest zeru przy  $\Psi = 0$  i  $180^\circ$ ; maksimum przy  $\Psi = 270^\circ$ , minimum przy  $\Psi = 90^\circ$ . Położenie tarczy wirnika (płaszczyzny końców łopat) pokazane jest na rys. 2.27b. Znaki „+” lub „-” podane w szeregu są dowolne. Znaki „-” dają dodatnie wartości współczynników  $a_1$  i  $b_1$  w normalnym ruchu postępowym śmigłowca.



**Rys. 2.27.** Fizyczna interpretacja prostego sinusoidalnego ruchu łopaty wirnika nośnego: a) przebieg zmian kąta  $\beta$  w funkcji azymutu; b) położenie płaszczyzny końców łopat (widok z przodu)

Współczynniki  $a_2$ ,  $b_2$  itd. wyrażają amplitudę wyższych harmonicznych. Ruch określony równaniem  $\beta = -a_2 \cos 2\psi$  przedstawiono na rys. 2.28a, z którego widać, że wahania mają dwie wartości maksymalne przy  $\psi = 90^\circ$  i  $\Psi = 270^\circ$ , zaś minimalne przy  $\psi = 0$  i  $\psi = 180^\circ$  oraz cztery wartości zerowe przy  $\psi = 45^\circ$ ,

$\psi = 135^\circ$ ,  $\psi = 225^\circ$  i  $\psi = 315^\circ$ . Na rys. 2.28b przedstawiono tor końców łopat wirnika dla  $\beta = -a_2 \cos 2\psi$ .



**Rys. 2.28.** Fizyczna interpretacja wyższych harmonicznych ruchu łopaty wirnika nośnego: a) przebieg zmian kąta  $\beta$  w funkcji azymutu; b) trajektoria końcówki łopaty wirnika nośnego

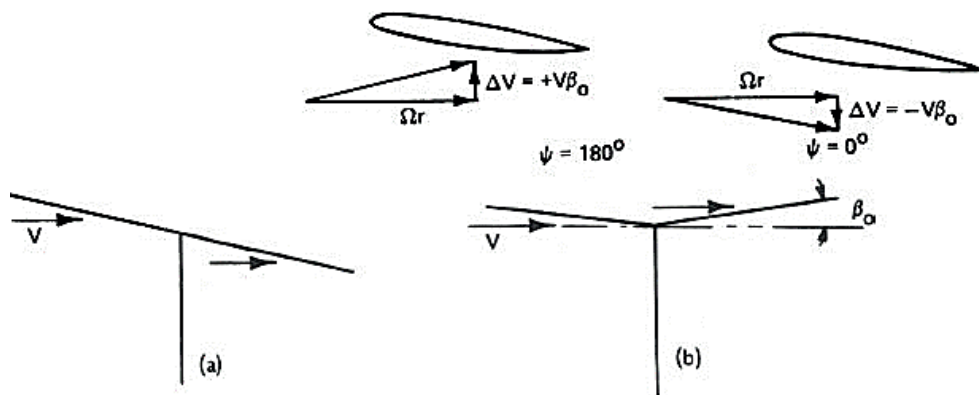
Sens fizyczny współczynników można wyjaśnić w następujący sposób. Dowolny ruch okresowy łopaty możemy wyrazić jako nakładanie się wyżej omówionych ruchów. Dokładne wyznaczenie toru ruchu zależy od liczby wyrazów uwzględnionych w obliczeniu. Większa liczba wyrazów daje dokładniejszy obraz istoty zjawiska. W praktyce wystarczy uwzględnić kilka pierwszych wyrazów szeregu. Na przykład wykorzystanie tylko  $a_0$ ,  $a_1$  i  $b_1$  określa wahania łopat z dokładnością do  $1^\circ$ , zaś uwzględnienie  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $a_3$  i  $b_3$  zwiększa dokładność obliczeń do  $0,1^\circ$  [1.7, 1.8, 1.11, 1.13].

Kąt stożka  $a_0$  zależy od współzależności dwóch podstawowych momentów, które starają się obrócić łopatę względem przegubu poziomego, tj. momentu siły ciągu oraz momentu siły odśrodkowej. Rozkład ciągu wzdłuż promienia łopaty zmienia się, co powoduje zmianę punktu przyłożenia siły wypadkowej, a więc i kąta stożka. Prędkość przepływu przez wirnik wywiera wpływ na rozkład ciągu. Jeśli prędkość wzrasta, to rozkład obciążenia przemieszcza się ku końcom łopat. Przy jednej i tej samej prędkości przepływu przez wirnik, kąty natarcia przekroju łopaty wzdłuż promienia są jednakowe. Najmniejsze są kąty natarcia w środkowej części łopaty, gdzie prędkości obwodowe są stosunkowo mniejsze.

Rozpatrzmy kąt pochylenia płaszczyzny końców łopat wirnika nośnego do tyłu  $a_1$ . Rozpatrując ruch postępowy przy założeniu, że siła bezwładności nie występuje i nie wywiera wpływu na charakter wahań, widzimy (rys. 2.29b), że łopata będąc w położeniu wzdłuż kadłuba w kierunku ogona, nie doznaje przyrostu prędkości z powodu napływającego powietrza. Przy dalszym ruchu obrotowym łopata spotyka w swym ruchu strumień napływający i prędkość opływu łopaty wzrasta, a więc wzrasta jej siła nośna. Przyrost siły nośnej unosi ją do góry. Przy wahnięciu kąt względnego przepływu łopaty maleje, a więc maleje też siła nośna. Gdy siły bezwładności nie występują, łopata powinna być zawsze w równowadze. Największa

prędkość wahań będzie przy  $\Psi = 90^\circ$ , przy  $\Psi = 0$  równa jest zero, przy  $\Psi = 180^\circ$  równa jest zero, przy  $\Psi = 270^\circ$  łopata jest maksymalnie odchylona do dołu i przy  $\Psi = 360^\circ$  kąt wahanía łopaty jest znowu równy zero. Stąd też widać, że tarcza wirnika będzie unosić się ku górze w części przedniej i opuszczać w części tylnej, tj. oś płaszczyzny końców łopat będzie nachylona do tyłu o wartość  $a_1$ . Poprzednio założyliśmy, że podczas ruchu łopaty siły bezwładności nie występują. Jednak na ruch łopaty, a więc na  $a_1$  ma wpływ jej masa i zjawisko tłumienia sił aerodynamicznych. Aby to uwzględnić, należy rozpatrywać łopatę jako układ dynamiczny. Będzie to omówione nieco później, przy wyprowadzeniu wzoru na  $a_1$ .

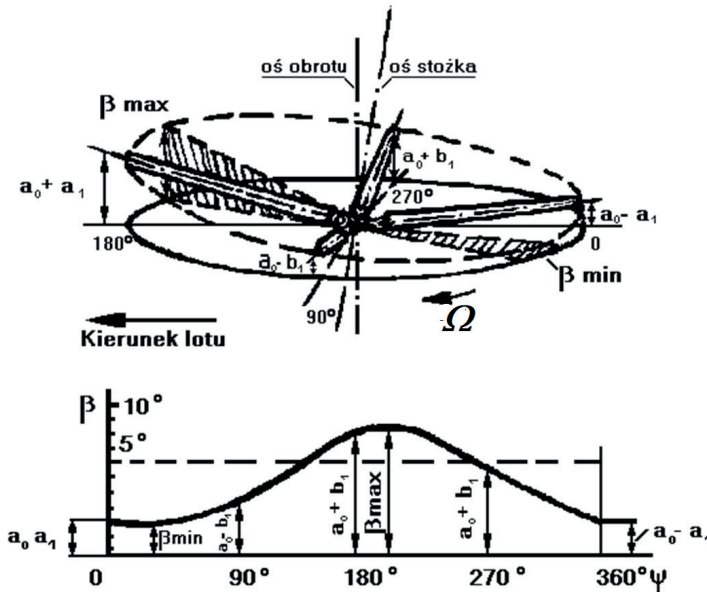
Rozpatrzmy teraz boczne pochylenie osi płaszczyzny końców łopat  $b_1$ . W przypadku wirnika nośnego o pochylonej płaszczyźnie końców łopat (rys. 2.29b), na skutek oddziaływania na niego strumienia, łopata będąca w przedniej części tarczy ma inny kąt od łopaty znajdującej się w jej tylnej części. Jeżeli kąt stożka jest równy zero (rys. 2.29a), strumień wywiera jednakowy wpływ na obie łopaty. Jeśli jednak oś płaszczyzny końców łopat wirnika jest odchylona, to w ruchu postępowym powstają okresowe siły aerodynamiczne.



**Rys. 2.29.** Składowe prędkości na profilu łopaty oraz stożku wirnika nośnego na azymutach  $180^\circ$  oraz  $0^\circ$

Siły te osiągają wartość maksymalną przy  $\Psi = 180^\circ$  w przedniej części tarczy wirnika i minimalną przy  $\Psi = 0$  w tylnej części. Tak więc na wirnik nośny oprócz siły, która jest maksymalna przy  $\Psi = 90^\circ$ , działa jeszcze inna siła okresowa i w ten sam sposób jak siła poprzeczna, która pochyla płaszczyznę końców łopat do tyłu o kąt  $a_1$  (faza przesunięcia równa  $90^\circ$ ), siła podłużna powoduje przechylenie płaszczyzny końców łopat w bok o kąt  $b_1$ . Maksymalny wznios pochodzący od siły podłużnej jest przy  $\Psi = 270^\circ$ , zaś minimalny przy  $\Psi = 90^\circ$ . Ruch łopaty wirnika w każdym położeniu azymutalnym, przy obrocie zgodnym ze wskazówkami zegara, można przedstawić poglądowo (rys. 2.30). Należy podkreślić, że pochylenie na

bok w dużej mierze zależy od zmiany przepływu strumienia przez tarczę wirnika, szczególnie jeśli zmiany te idą od części przedniej ku tylnej.



Rys. 2.30. Ilustracja ruchu łopaty wirnika w zależności od położenia azymutalnego

Wyższe harmoniczne  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $a_3$ ,  $b_3$  ... itd. można traktować jako wahania łopat względem powierzchni stożka utworzonej przez łopaty, poruszających się według pierwszych harmonicznych. Ujawnienie przyczyn powodujących istnienie wyższych harmonicznych wymaga bardzo wnikliwej analizy i nie da się wyjaśnić w podobny sposób, jak to uczyniliśmy dla  $a_0$ ,  $a_1$ , i  $b_1$ . Możemy tylko podkreślić, że występują siły, które wywołują ruch drgający wyższego rzędu. Źródłem tego zjawiska jest niesymetria strumienia przepływającego przez wirnik nośny. Na tej części tarczy, gdzie łopaty poruszają się w kierunku ogona, występuje obszar przeciwnego opływu, czego nie ma na przeciwległej części tarczy. Jest to główną przyczyną powstawania drgań wyższego rzędu. Drugie źródło wyższych harmonicznych tkwi w istocie samych sił. Głębsza analiza tego zjawiska zostanie przedstawiona w części II.

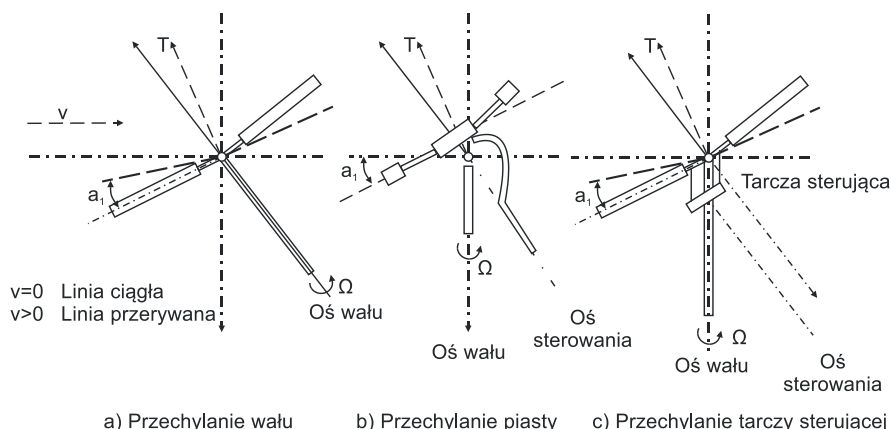
### 2.2.2. Sterowanie wirnikiem nośnym w locie do przodu

Poprzednie nasze rozważania dotyczyły wirnika przy pozostawianiu osi sterowania w jednym położeniu. Innymi słowy oznacza to, że przy obrocie łopaty wirnika nośnego nie występowała zmiana kąta nastawienia łopat. Stwierdziliśmy, że

płaszczyzna na końcach łopat przechylona była do tyłu i w bok w odniesieniu do osi sterowania, a wypadkowa ciągu wirnika nośnego skierowana była w przybliżeniu prostopadle do tej płaszczyzny. Podczas ruchu śmigłowca do przodu, w miarę pochylania osi sterowania do przodu, odchylenie płaszczyzny końców łopat względem tej osi maleje. Płaszczyzna końców łopat pochyla się do przodu i do tyłu przedej od osi sterowania. Świadczy to o niestateczności wirnika nośnego względem kąta natarcia. Ma to duże znaczenie przy rozważaniu stateczności śmigłowca jako całości, co szerzej zostanie omówione w części II tej książki.

Położenie osi sterowania w przestrzeni decyduje o sterowaniu śmigłowcem. Generalnie znane są trzy sposoby sterowania położeniem przestrzennym osi sterowania [1.2, 1.3, 1.7–1.9, 1.13, 1.15]:

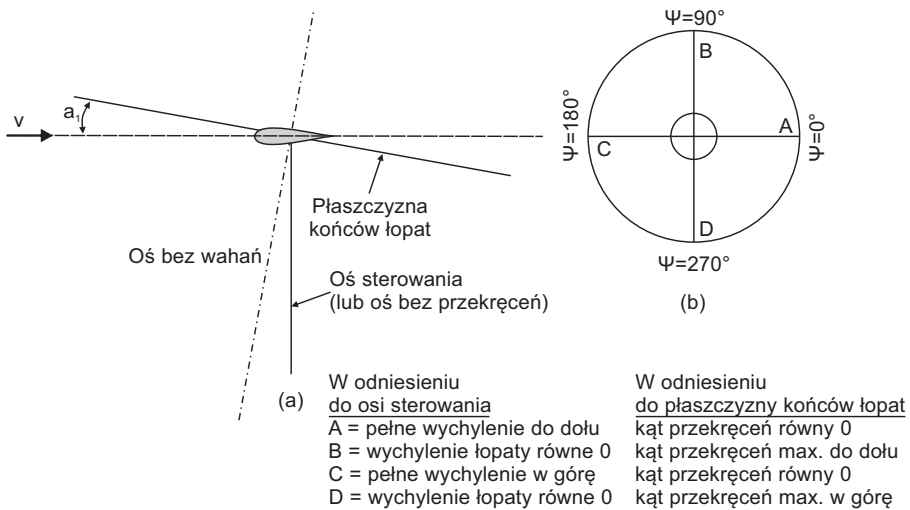
1. Poprzez bezpośrednie odchylenie osi wału wirnika nośnego. Jest to najprostszy sposób zapewnienia potrzebnego odchylenia osi sterowania (rys. 2.31a). Taki sposób sterowania może być stosowany na wiatrakowcach, w których wirnik nośny pracuje w warunkach autorotacji. Jednak na śmigłowcach, poprzez wał przekazywana jest moc potrzebna do obracania wirnika nośnego, a pochylenie samego wału byłoby nadzwyczaj trudne.
2. Poprzez odchylenie samej piasty wirnika nośnego. Piasta wirnika nośnego jest bezpośrednio połączona ze sterownicami pilotażowymi. Pilot może bezpośrednio pochylać piastę wirnika nośnego względem wału (rys. 2.30b).
3. Poprzez zastosowanie specjalnego urządzenia zwanego tarczą sterującą. Piasta wirnika nośnego zamocowana jest na wale z jednoczesnym wykorzystaniem urządzenia zapewniającego cykliczną zmianę kąta nastawienia łopat (względem piasty). Układ taki przedstawiony jest na rys. 2.31c. Układ składa się z łopat zamocowanych w piaście za pomocą przegubów w ten sposób, że mogą one wykonywać wahania i zmieniać swój kąt nastawienia. Łopaty utrzymywane są na odpowiednim kącie nastawienia za pomocą popychaczy, połączonych z tarczą sterującą.



**Rys. 2.31.** Sposoby sterowania wirnikiem nośnym

W przegubowej piaście wirnika nośnego, oprócz przegubu poziomego i pionowego, istnieje jeszcze przegub osiowy umożliwiający zmianę kąta nastawienia łopaty wirnika nośnego.

Zastanówmy się nad istotą ruchu łopaty względem przegubu poziomego i pionowego. W tym celu rozpatrzmy prosty wirnik nośny, którego łopaty wykonują wahania w locie poziomym (rys. 2.32a). Oś sterowania umieszczona jest pionowo, zaś płaszczyzna końców łopat odchylona jest do tyłu o kąt  $\alpha_1$ . Obserwator znajdujący się na osi sterowania i obracający się wraz z łopatami stwierdzi, że łopaty wykonujące wahania nie zmieniają kąta nastawienia. Tymczasem inny obserwator znajdujący się na końcu łopaty (w płaszczyźnie końców łopat) i obracający się wraz z nią stwierdzi, że łopaty nie wykonują w ogóle żadnych wahań, lecz zmieniają kąty nastawienia jeden raz w ciągu obrotu do maksimum i jeden raz do minimum. Kąt nastawienia łopat jest mały, gdy łopata idzie do przodu, i duży, gdy łopata idzie do tyłu. Na rys. 2.32b widać, że obrót łopaty w przegubie osiowym w stosunku do płaszczyzny końców łopat równy jest w stopniach wahaniom łopat względem osi sterowania.

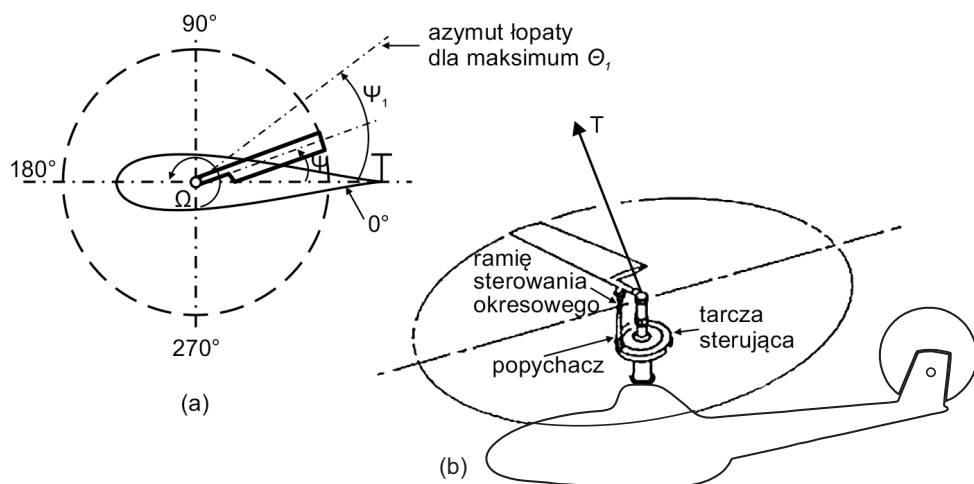


**Rys. 2.32.** Ruch łopaty względem przegubu poziomego i osiowego. Wahania vs. przekręcanie łopaty wirnika nośnego

Dlatego też odchylenie łopaty (od średniego położenia) w przedniej i tylnej części tarczy wirnika ( $\alpha_1$ ), względem osi sterowania, równe jest poprzecznemu obrotowi w przegubie osiowym w stosunku do osi prostopadłej do płaszczyzny końców łopat. Oś sterowania jest to oś, względem której nie ulegają zmianie kąty nastawienia łopaty. Dlatego też oś sterowania znana jest także jako *oś bez przekręceń*. Oś prostopadła do płaszczyzny końców łopat jest to taka oś, względem której łopata nie

wykonuje wahań (oprócz ruchu wyższych harmoniczych). Dlatego ta oś jest także zwana *osią bez wahań*.

Łopaty każdego śmigłowca wykonują dość skomplikowany ruch, ponieważ względem wału wirnika łopata wykonuje wahania z obrotem łopaty względem swej osi podłużnej. Jeżeli jednak rozpatrujemy obrót łopat względem przegubu osiowego jako sposób pochylenia osi sterowania o określony kąt, to układ upraszcza się do takiego, w którym występują tylko same wahania względem osi sterowania.



**Rys. 2.33.** Schemat wyjaśniający ideę sterowania okresowego

Działanie tarczy sterującej można wyjaśnić następująco. Ruch łopaty wirnika nośnego śmigłowca wokół przegubu wahań na obracającym się wirniku można interpretować jako swobodny, tłumiony ruch oscylacyjny. Jeżeli jednak do łopaty zostanie przyłożony zewnętrzny, okresowo zmieniający się moment, wówczas ruch łopaty stanie się wymuszonym ruchem oscylacyjnym. Taki zewnętrzny moment może być generowany przez siłę wymuszającą zmianę kąta nastawienia łopat  $Q_0$ . Zmiana kąta  $Q_0$  z azymutem musi być okresowa i w konsekwencji może być przedstawiona za pomocą szeregu Fouriera zawierającego dowolną liczbę harmoniczych ( $n > 1$ ). Jednak w praktyce wejścia sterujące we wszystkich reżimach lotu, a zwłaszcza w zawisie, mają zwykle charakter pierwszej harmonicznej:

$$\Theta_{0\psi} = \Theta_0 - \Theta_1 \cos(\Psi - \Psi_1) \quad (2.77)$$

gdzie  $Q_1$  jest maksymalnym odchyleniem kąta nastawienia łopat od nominalnej (średniej) wartości ( $Q_0$ ), a  $Y_1$  jest kątem azymutu, przy którym występuje ten maksymalny kąt nastawienia łopaty (rys. 2.33a).

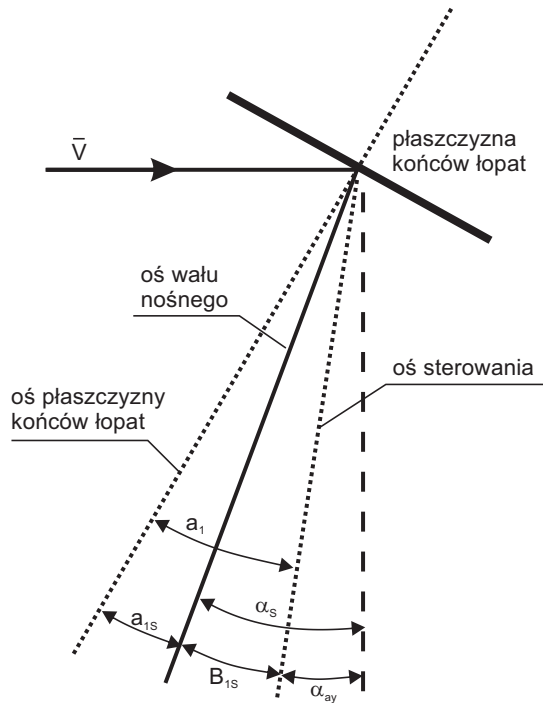


W praktyce zmiana kąta nastawienia łopat opisana równaniem (2.77) jest wymuszana przez stosunkowo proste urządzenie mechaniczne zwane *tarczą sterującą*, którą prawdopodobnie po raz pierwszy zaproponował w 1911 r. Jurijew [1.6, 1.13, 1.14, 1.17]. Urządzenie to składa się z łożyska, którego jedna bieżnia jest połączona krzyżakowo i przesuwnie z wałem wirnika nośnego oraz poprzez popychacze z dźwigniami łopat wirnika nośnego, a druga nieobracająca się względem kadłuba z popychaczami dźwigni skoku ogólnego i drążka sterowego. Działania sterujące pilota powodują nachylenie płaszczyzny końców łopat względem płaszczyzny prostopadłej do osi wału wirnika nośnego (rys. 2.33b).

Wprowadzimy teraz związki geometryczne, dzięki którym będziemy mogli przejść od dowolnego układu osi współrzędnych do osi sterowania, do osi płaszczyzny końców łopat lub do osi wału wirnika nośnego.

Jeżeli ruch łopaty względem osi sterowania zapiszemy w postaci danej równaniem (2.67), to obrót łopaty w przegubie osiowym względem płaszczyzny końców łopat można napisać jako:

$$\Theta = A_0 - A_1 \cos \Psi - B_1 \sin \Psi - A_2 \cos 2\Psi - B_2 \sin 2\Psi \quad (2.78)$$



**Rys. 2.34.** Wahania i przekręcanie łopat względem osi wału wirnika nośnego

Jeśli wahania łopat i obrót w przegubie osiowym względem wału wirnika oznaczymy indeksem „s”, to na podstawie rys. 2.34 można napisać związki:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{0_z} = \alpha_s - B_{1_s} \\ A_0 = A_{0_s} \\ a_0 = a_{0_s} \\ a_1 = a_{1_s} + B_{1_s} \\ b_1 = b_{1_s} + A_{1_s} \end{array} \right. \quad (2.79)$$

gdzie:

$\alpha_{0_z}$  – kąt zawarty pomiędzy prostopadłą do osi sterowania i kierunkiem napływającego strumienia powietrza.

Również:  $a_2 = a_{2_s}$ ;  $b_2 = b_{2_s}$ ;  $a_3 = a_{3_s}$ ;  $b_3 = b_{3_s}$  ... itd.

Przy wyprowadzeniu równań ruchu śmigłowca w locie postępowym wykazemy, że w określonych warunkach pracy wirnika (tj. ciągu, prędkości lotu, oporze szkodziwym i prędkości kątowej wirnika oraz wahaniami łopat wirnika nośnego) płaszczyzna końców łopat jest określona w przestrzeni. Oś sterowania również będzie określona względem płaszczyzny końców łopat, wraz z wektorem wypadkowej siły wirnika nośnego.

Warto jeszcze krótko wyjaśnić przyczyny wywołujące drgania łopat w płaszczyźnie obrotu. Ruch okresowy łopaty w płaszczyźnie obrotu jest spowodowany dwiema przyczynami:

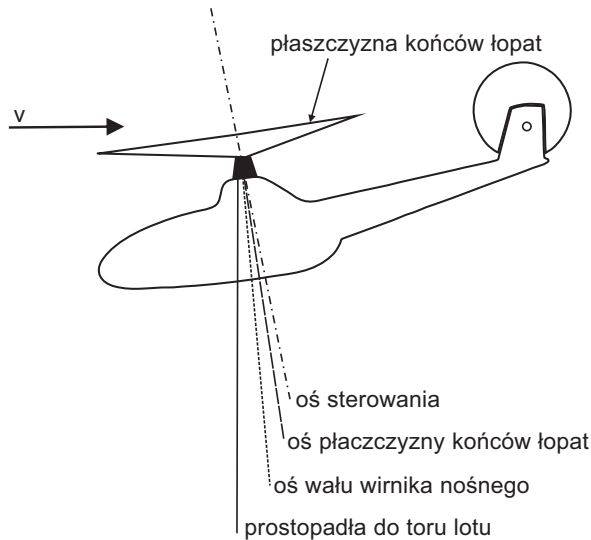
- okresową zmianą sił aerodynamicznych w płaszczyźnie obrotu,
- okresową zmianą sił masowych.

Podczas ruchu do przodu, na poruszającą się łopatę napływa strumień z różnymi prędkościami. Z tego powodu na łopatę działają zmienne siły aerodynamiczne. Te właśnie siły, dokładniej mówiąc momenty tych sił, są przyczyną występowania ruchu drgającego łopaty (wahań) względem przegubu pionowego. Oprócz sił aerodynamicznych na łopatę działają jeszcze siły masowe, które również powodują ruch łopaty względem przegubu pionowego. Siły masowe występują wówczas, jeśli płaszczyzna końców łopat jest pochylona względem osi obrotu.

### 2.2.2.1. Określenie osi

Zanim przystąpimy do analizy ruchu śmigłowca do przodu, musimy określić osie, względem których rozpatrywać będziemy ruch łopat wirnika nośnego. W dalszych rozważaniach posługiwać się będziemy układem osi przedstawionym na rys. 2.35, na którym podane są [1.2, 1.13]:

- 1) oś sterowania lub oś, względem której nie występuje obrót łopaty w przegubie osiowym. Oś sterowania jest to fizyczna oś wirnika nośnego, o łopatach nieobracających się względem ich podłużnej osi, jednak mogących wykonywać wahania;
- 2) oś płaszczyzny końców łopat lub oś względem której nie występują wahania. Łopaty podczas ruchu względem tej osi zmieniają kąt nastawienia, nie wykonując wahań. Zmiana kątów nastawienia łopat względem tej osi jest równa wartości kątów wahań względem osi sterowania;
- 3) oś wału wirnika nie pokrywa się ani z osią sterowania, ani też z osią toru końców łopat. Śmigłowce zwykle posiadają wirniki nośne z takim zamocowaniem łopat, które pozwalają wykonywać wahania oraz cykliczną zmianę kątów nastawienia.



**Rys. 2.35.** Układy osi, w których opisujemy lot poziomy śmigłowca

Podczas lotu przestrzenne położenie osi wału wirnika nośnego zależy od położenia środka masy, ciężaru śmigłowca i charakterystyk momentów kadłuba. Kadłub śmigłowca zachowuje się jak wahadło wiszące w tunelu aerodynamicznym; odchyła się do tyłu do chwili zrównania się momentu oporu czołowego i momentów siły ciężkości.

Badanie pracy wirnika nośnego w locie postępowym sprowadza się w zasadzie do określenia prędkości i kierunku strumienia na każdym elemencie łopaty, w celu wyznaczenia sił działających na poszczególne jej części oraz na łopatę w całości. Powstaje zatem pytanie, jakim układem najwygodniej się posługiwać, badając ten problem?

Jeżeli skorzystamy z osi sterowania, wówczas kąt nastawienia elementu łopaty przy zmianie jej azymutalnego położenia pozostaje stały, zaś kąt, pod którym napływa strumień zależy od prędkości jej wznoszenia lub opadania względem przegubu wahań.

Jeżeli posłużymy się osią płaszczyzny końców łopat (płaszczyzny torów końców łopat), wówczas kąt natarcia nie będzie zależał od wahań łopaty, natomiast będzie ulegał zmianie kąt nastawienia łopaty.

Jeżeli posłużymy się osią wału wirnika, wówczas wystąpią oba rodzaje ruchów: wahania i cykliczna zmiana kątów nastawienia. Wynik analizy oczywiście nie będzie zależał od obranych osi odniesienia. Wszystkie osie są geometrycznie porównywalne. Jednak w dalszych analizach będziemy posługiwać się osią sterowania, ze względu na to, że wówczas kąt nastawienia łopaty nie będzie zależał od jej azymutu.

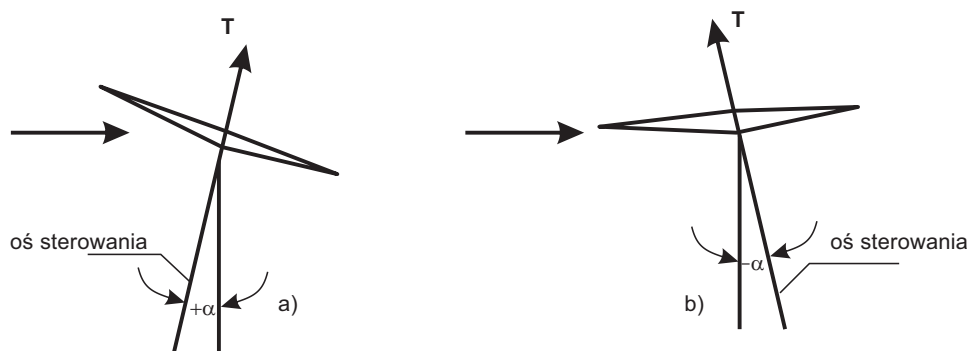
Po obraniu osi odniesienia wyznaczymy składowe wypadkowej siły wirnika nośnego. Można udowodnić, że wypadkowa siła wirnika nośnego pozostaje w przybliżeniu prostopadła do płaszczyzny końców łopat, nawet w locie poziomym. Dokładniej mówiąc, siła wypadkowa jest odchylona do tyłu (względem płaszczyzny torów końców łopat) mniej niż o  $1^\circ$ . Oś sterowania w locie ustalonym odchyła się w bok od osi płaszczyzny końców łopat. Ze wzrostem prędkości lotu odchylenie wzrasta. Dla współczesnych śmigłowców kąt odchylenia osi sterowania w bok wynosi mniej niż  $5^\circ$ . Wykorzystując rys. 2.36, możemy stwierdzić, że wypadkowa siła aerodynamiczna wirnika nośnego da się rozłożyć na kierunek osi sterowania, dając ciąg wirnika  $T$ , oraz na dwa kierunki prostopadłe: podłużną siłę wirnika nośnego  $H$  oraz poprzeczną (boczną) siłę wirnika nośnego  $S$ . Ponieważ kąt zawarty pomiędzy wypadkową siłą  $R$  i ciągiem  $T$  jest mały, przyjmuje się, że ciąg  $T$  równy jest w przybliżeniu wypadkowej sile  $R$  wirnika nośnego.

## SIŁY I MOMENT OPOROWY WIRNIKA NOŚNEGO W USTALONYM LOCIE POSTĘPOWYM

### 3.1. Prędkość indukowana i kąt natarcia wirnika nośnego w ustalonym locie postępowym

Podczas lotu śmigłowca do przodu, ciąg wirnika jest pochylony do przodu w celu wytworzenia składowej w kierunku ruchu, która pokonuje opór czołowy śmigłowca. Powstaje więc strumień skierowany ku dołowi, przepływający przez płaszczyznę torów końców łopatek, który jest zależny od składowej prędkości lotu równoległej do osi sterowania.

Kąt natarcia wirnika nośnego  $\alpha$  określimy jako kąt zawarty pomiędzy osią sterowania i prostopadłą do toru lotu.



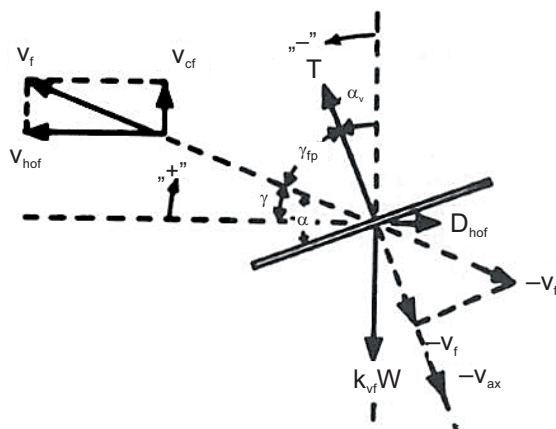
Rys. 3.1. Kąt natarcia wirnika nośnego

Kąt natarcia jest dodatni, jeśli oś sterowania pochylona jest do tyłu (rys. 3.1a), co ma miejsce przy autorotacji), oraz ujemny, gdy oś sterowania pochylona jest do przodu (rys. 3.1b), co ma miejsce w locie do przodu. Do wyprowadzenia wzorów na ciąg i moment oporowy wirnika nośnego potrzebna jest wartość wypadkowej prędkości i kąta natarcia każdego elementu łopaty. Sumaryczna prędkość strumienia przepływającego przez płaszczyznę prostopadłą do osi sterowania, składa się z dwóch wyrazów: składowej prędkości lotu poziomego  $V \sin \alpha$  i prędkości indukowanej  $v_i$ . Wprowadzając bezwymiarowy współczynnik prędkości  $\lambda$ , otrzymamy

$$\lambda = \frac{V \sin \alpha - v_i}{\Omega R} \quad (3.1)$$

W ten sam sposób składową prędkość lotu poziomego w płaszczyźnie prostopadłej do osi sterowania ( $V \cos \alpha$ ) można wyrazić w postaci stosunku do prędkości obwodowej końca łopaty

$$\frac{\cos \alpha}{\Omega R} \quad (3.2)$$



**Rys. 3.2.** Teoria strumieniowa w locie postępowym

Ciąg wirnika nośnego śmigłowca w locie postępowym można obliczyć, korzystając z teorii strumieniowej (rys. 3.2):

$$T = \rho \pi R^2 \sqrt{(V \sin \alpha - v_i)^2 + (V \cos \alpha)^2} 2v_i \quad (3.3)$$

Po przekształceniu równania (3.3) otrzymamy wzór na prędkość indukowaną:

$$v_i = \frac{T}{2\pi R^2 \rho \sqrt{(V \sin \alpha - v_i)^2 + (V \cos \alpha)^2}} \quad (3.4)$$

Podstawiając do równania (3.4) związki (3.1) i (3.4), otrzymamy:

$$v_i = \frac{T}{2\pi R^2 \rho \Omega R \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \quad (3.5)$$

Wyrażając ciąg równaniem:  $T = \frac{\rho}{2} C_T \pi R^2 (\Omega R)^2$  i podstawiając to wyrażenie do równania (3.4), otrzymamy:

$$v_i = \frac{\frac{1}{4} C_T \Omega R}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}^{1/2}} \quad (3.6)$$

Jeżeli  $V = 0$ , równanie (3.6) sprowadza się do postaci:

$$v_i = \frac{1}{2} \Omega R \sqrt{C_T}$$

którą otrzymaliśmy poprzednio dla zawisu przy równomiernym rozkładzie prędkości indukowanej wzdłuż tarczy wirnika nośnego. W locie do przodu założenie o równomierności strumienia jest bardziej uzasadnione, ponieważ składowa  $V \sin \alpha$  jest większa od składowej drugiej i przez to jej rozkład jest równomierny wzdłuż tarczy. Wzór na kąt natarcia wirnika nośnego można napisać, rozwiązując równania (3.1) i (3.2) względem  $\sin \alpha$  i  $\cos \alpha$

$$\sin \alpha = \frac{\lambda \Omega R + v_i}{V}$$

$$\cos \alpha = \frac{\mu \Omega R}{V}$$

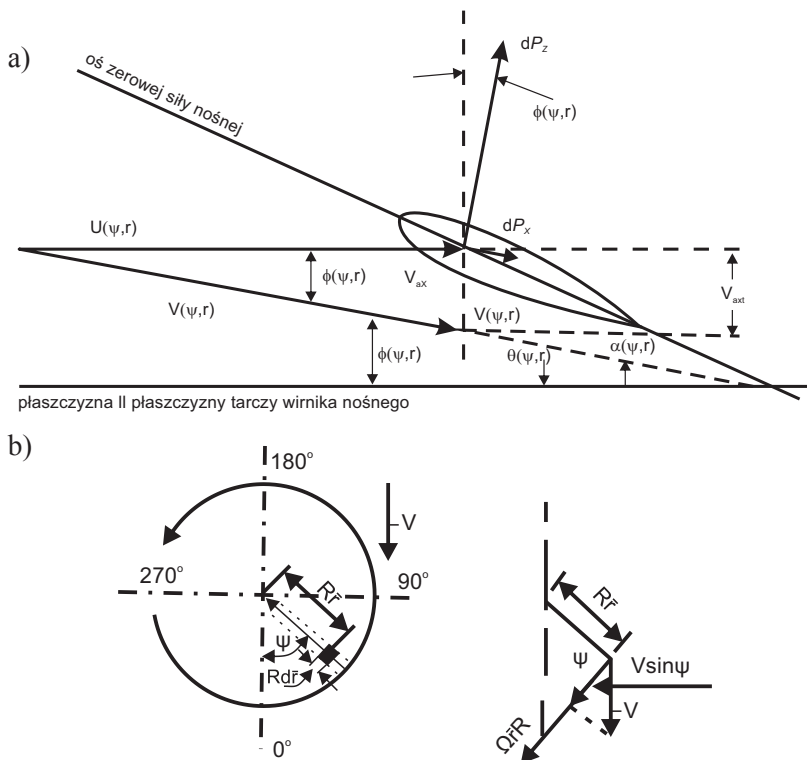
Podstawiając wartość zamiast  $v_i$  ze wzoru (3.5) oraz dzieląc przez siebie oba równania stronami, otrzymamy:

$$\tan \alpha = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\frac{1}{4} C_T}{\mu \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \quad (3.7)$$

lub uwzględniając, że kąt  $\alpha$  jest mały, dla którego  $\tan \alpha \approx \alpha$  otrzymamy:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\frac{1}{4} C_T}{\mu \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \quad (3.8)$$

Jest to wzór na kąt natarcia wirnika nośnego. Obecnie musimy wyznaczyć kąt natarcia elementu łopaty w celu określenia charakterystyk wirnika nośnego w locie do przodu. Poprzednio wyznaczyliśmy prędkość indukowaną, jednak nie wystarcza to do wyznaczenia ciągu, oporu oraz momentu w locie do przodu. Oprócz prędkości indukowanej, wyznaczmy jeszcze inne prędkości składowe, opływające element łopaty.



**Rys. 3.3.** Prędkości, kąty i siły na przekroju łopaty wirnika nośnego (a) oraz prędkości w płaszczyźnie bez przekięceń na przekroju  $r$  łopaty na azymucie  $\psi$  (b)



Wszystkie prędkości odnosimy względem płaszczyzny prostopadłej do osi sterowania (płaszczyzny bez przekręceń) i do przekroju łopaty znajdującej się na azymucie  $\Psi$ .

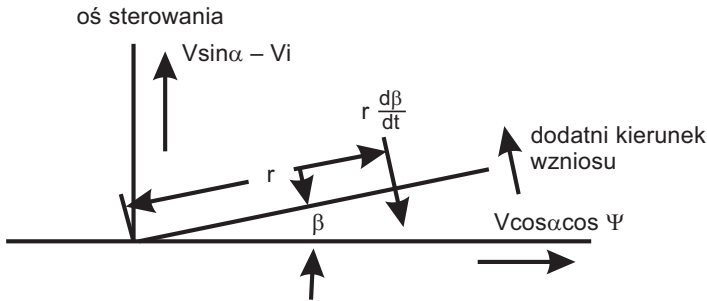
Tak więc na wypadkową prędkość składają się:

- prędkość lotu do przodu;
- prędkość wynikająca z wahań łopaty;
- prędkość wynikająca z obrotu łopaty;
- prędkość indukowana.

Rozkład prędkości w locie do przodu podany został na rys. 3.3a. Jest on podobny do rozkładu w zawisie.  $V_x$  – składowa prędkości wypadkowej prostopadła do osi sterowania.  $V_z$  – składowa równoległa do osi sterowania. Na podstawie rys. 3.3a, 3.3b i 3.4 możemy napisać następujące związki na prędkości dla elementu łopaty:

$$\begin{cases} V_x = \Omega r + V \cos \alpha \sin \Psi \\ V_z = (V \sin \alpha - v_i) \cos \beta - r \frac{d\beta}{dt} - V \cos \alpha \cos \Psi \sin \beta \end{cases} \quad (3.9)$$

Pominęliśmy tu składową promieniową, ponieważ nie ma ona dużego wpływu na siłę nośną i opór elementu łopaty.



**Rys. 3.4.** Prędkości na łopacie wykonującej ruch względem przegubu wahań

Zakładając, że kąt  $\beta$  jest mały ( $\sim 10^\circ$ ) możemy przyjąć, że  $\cos \beta = 1$  oraz  $\sin \beta = \beta$  i podstawiając do wzoru (3.9) otrzymamy:

$$\begin{cases} V_x = \Omega r + \mu \Omega R \sin \Psi \\ V_z = \lambda \Omega R - r \frac{d\beta}{dt} - \mu \Omega R \beta \cos \Psi \end{cases} \quad (3.10)$$

Z rys. 3.3a wynika, że kąt  $\beta_*$  także jest mały, czyli  $\cos \beta_* \approx 1$ ,  $\sin \beta_* \cong \beta_*$ . Ostatecznie więc kąt natarcia elementu łopaty możemy przedstawić w postaci

$$\alpha_r = \Theta + \beta_* = \Theta + \frac{V_z}{V_x} \quad (3.11)$$

### 3.2. Ciąg wirnika nośnego w locie postępowym

Na podstawie teorii elementu łopaty, różniczka siły nośnej elementu łopaty wyraża się wzorem (rys. 3.3):

$$dP_z = \frac{1}{2} \rho V^2 C_z c dr \quad (3.12)$$

Zakładając że  $C_z = \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} \alpha = a_p \alpha_r$ , otrzymamy:

$$C_z = \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} \alpha_r = a_p \left( \Theta + \frac{V_z}{V_x} \right) \quad (3.13)$$

Ponieważ kąt  $\beta_*$  jest mały, zatem:

$$\begin{cases} V = V_x \\ dT = dP_z \end{cases} \quad (3.14)$$

Podstawiając równania (3.13) i (3.14) do wzoru (3.12), otrzymamy wzór na obliczenie elementarnego ciągu:

$$dT = \frac{1}{2} \rho a_p \left( \Theta V^2 + V^2 \frac{V_z}{V_x} \right) c dr \cong \frac{1}{2} \rho a_p \left( \Theta V^2 + V_z V_x \right) c dr \quad (3.15)$$

Całkowity ciąg wirnika nośnego o  $n$  łopatach otrzymamy przez całkowanie wzdłuż promienia i przy zmianie azymutu:

$$T = \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R dT dr d\Psi \quad (3.16)$$

Wykorzystując znane całki funkcji trygonometrycznych w postaci:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \Psi d\Psi &= 0 \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \Psi d\Psi &= 0 \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \Psi d\Psi &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \Psi d\Psi &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \Psi \cos \Psi d\Psi &= 0 \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \Psi \cos^2 \Psi d\Psi &= \frac{1}{8} \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

oraz wykorzystując równanie (3.10), wyznaczmy średnie wartości  $V^2$ ,  $V_x$  i  $V_z$  w zależności od kąta  $\Psi$ , przez co łatwo scałkujemy równanie (3.16).

$$\left. \begin{aligned} V_x^2 &= (\Omega r)^2 + \left( \frac{\mu \Omega R}{2} \right)^2 \\ V_x V_z &= \Omega r (\lambda \Omega R) - \Omega r \left( r \frac{d\beta}{dt} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Ponieważ średnia wartość  $\frac{d\beta}{dt}$  w zależności od kąta  $\Psi$  równa jest zeru:

$$V_x V_z = \Omega^2 \lambda R r \quad (3.19)$$

i ostatecznie równanie (3.16) przyjmuje postać

$$T = \int_0^R \frac{n}{2} \rho a_p \left[ \Theta \Omega^2 \left( r^2 + \frac{\mu^2 R^2}{2} \right) + \Omega^2 \lambda R r \right] c dr = \frac{n}{2} \rho a_p c_A \Omega^2 R^3 \left( \frac{\Theta}{3} + \frac{\mu^2 \Theta}{2} + \frac{\lambda}{2} \right) \quad (3.20)$$

lub w postaci bezwymiarowej:

$$C_T = a_p \sigma \left( \frac{\Theta}{3} + \frac{1}{2} \mu^2 \Theta + \frac{1}{2} \lambda \right) \quad (3.21)$$

Wzór ten dotyczy prostokątnej łopaty niezwichrzonej, ponieważ nie zmieniał się kąt nastawienia ani też zbieżności przy wyprowadzeniu powyższego związku.

### 3.3. Współczynniki szeregu Fouriera wahań łopaty w ustalonym locie postępowym

Podczas ruchu wirnika nośnego wahania łopaty powtarzają się przy każdym jego obrocie, dlatego też kąt  $\beta$  wyrazić możemy za pomocą szeregu Fouriera, w którym zmienną niezależną jest kąt azymutu łopaty  $\Psi$  – równanie (2.76).

Doświadczalnie ustalono, że wyższe harmoniczne mają nieduży wpływ na kąt wahań  $\beta$ . Dla uproszczenia naszych rozważań uwzględnimy jedynie pierwsze harmoniczne. Prędkości i przyspieszenia wahań otrzymamy przez zróżniczkowanie równania (2.76), pamiętając, że  $\frac{d\Psi}{dt} = \Omega = \text{const}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\beta}{dt} = \dot{\beta} &= \Omega (a_1 \sin \Psi - b_1 \cos \Psi) \\ \frac{d^2\beta}{dt^2} = \ddot{\beta} &= \Omega^2 (a_1 \cos \Psi + b_1 \sin \Psi) \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Współczynniki  $a_0$ ,  $a_1$  i  $b_1$  otrzymamy na tej podstawie, że suma momentów względem przegubu poziomego wszystkich sił działających na łopatę ma być równa zeru. Jak wiadomo, na łopatę działają następujące siły:

- siła ciężkości,
- siła odśrodkowa,
- siła bezwładności,
- siła ciągu.

Momenty tych sił względem przegubu poziomego można obliczyć za pomocą następujących zależności:

$$M_g = \int_0^R mgr dr = mg \frac{R^2}{2} \quad (3.23)$$

$$M_{ods} = \int_0^R m \Omega^2 r (r \beta) dr = m \Omega^2 \beta \frac{R^2}{3} \quad (3.24)$$

$$M_{bez} = \int_0^R \left( m \frac{d^2 \beta}{dt^2} r^2 \right) dr = m \frac{d^2 \beta}{dt^2} \frac{R^2}{3} \quad (3.25)$$

Można wykazać, że moment od sił bezwładności i sił odśrodkowych w każdym układzie współrzędnych nie zależy od azymutalnego położenia łopaty  $\psi$ :

$$M_{ods} + M_{bez} = m \frac{R^2}{3} \left( \Omega^2 \beta + \frac{d^2 \beta}{dt^2} \right) \quad (3.26)$$

Podstawiając równanie (2.76) i (3.22) do (3.26), otrzymamy:

$$M_{ods} + M_{bez} = m \frac{R^2}{3} \frac{1}{2\pi} \Omega^2 \int_0^{2\pi} \left[ (a_0 - a_1 \cos \Psi - b_1 \sin \Psi) + (a_1 \cos \Psi + b_1 \sin \Psi) \right] d\Psi$$

Uwzględniając całki (3.17), otrzymamy:

$$M_{ods} + M_{bez} = m \frac{R^2}{3} \Omega^2 a_0 \quad (3.27)$$

Zakładając równomierny rozkład masy wzdłuż promienia łopaty, moment bez-

władności jednej łopaty względem przegubu poziomego wyrazi się jako  $J = m \frac{R^2}{3}$ , stąd:

$$M_{ods} + M_{bez} = J \Omega^2 a_0 \quad (3.28)$$

Ponieważ suma momentów wszystkich sił względem przegubu poziomego równa jest zeru, a suma trzech momentów nie zależy od *kąta*  $\psi$ , to moment ciągu względem przegubu też nie zależy od kąta  $\psi$ . Można więc napisać (rys. 3.5)

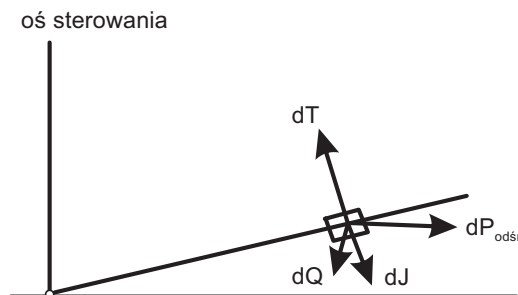
$$M_g + M_{bez} + M_{ods} + M_T = 0$$

lub uwzględniając (3.28), otrzymamy:

$$M_T - M_g = J \Omega^2 a_0 \quad (3.29)$$

Stąd wyznaczymy kąt stożka  $a_0$ :

$$a_0 = \frac{M_T - M_g}{J \omega^2} \quad (3.30)$$



**Rys. 3.5.** Siły działające na element łopaty wirnika nośnego

Moment ciągu względem przegubu wahań dla dowolnego  $\Psi$  możemy wyrazić za pomocą równania:

$$M_T = \int_0^R r \frac{dT}{dr} dr$$

Podstawiając równanie (3.15) do powyższego związku i rozpatrując tylko jedną łopatę, otrzymamy:

$$M_T = \int_0^R \frac{1}{2} \rho a_p \left( \Theta V_X^2 + V_Z V_X \right) c r dr \quad (3.31)$$

Podstawiając z kolei wartości  $V_X$  i  $V_Z$  ze wzoru (3.18), otrzymamy:

$$M_T = \frac{1}{2} \rho a_p c_A \Omega^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[ \left( \Theta r^3 + \frac{1}{2} \Theta \mu^2 R^2 r + \lambda R r^2 \right) + \sin \Psi \left( 2\mu R r^2 \Theta - a_1 \mu \lambda R^2 r + \frac{1}{4} \mu^2 R^2 r a_1 \right) + \cos \Psi \left( r^3 b_1 - \mu^2 R^2 r^2 a_0 + \frac{1}{4} \mu^2 R^2 r b_1 \right) \right] d\Psi dr \quad (3.32)$$

Poprzednio udowodniliśmy, że przy przyjętych założeniach  $M_T$  nie zależy od azymutu  $\Psi$  (na podstawie całek 3.17). Dlatego też pominiemy wyrazy drugi i trzeci (zależny od  $\sin \Psi$  i  $\cos \Psi$ ). Całkując więc równanie (3.32), jako że współczynniki przy  $\sin \Psi$  i  $\cos \Psi$  są równe zero, otrzymamy:

$$M_T = \frac{1}{2} \rho a_p c_A \Omega^2 R^4 \left[ \frac{\Theta}{4} (1 + \mu^2) + \frac{\lambda}{3} \right] \quad (3.33)$$

Kąt stożka  $a_0$  możemy wyznaczyć podstawiając równanie (3.23) i (3.33) do równania (3.30)

$$a_0 = \frac{\frac{1}{2} \rho a_p c \Omega^2 R^4 \left[ \frac{\Theta}{4} (1 + \mu^2) + \frac{\lambda}{3} - M_g \right]}{J \omega^2} \quad (3.34)$$

W rozważaniach na tematy stateczności często posługujemy się charakterystyką masową łopaty, zdefiniowaną jako:

$$\gamma = \frac{\rho a_p c R^4}{2J} \quad (3.35)$$

wyrażającą stosunek sił aerodynamicznych do sił masowych, działających na łopatę wirnika nośnego śmigłowca. Współczynnik ten nazywany jest często w literaturze liczbą Locka (lub stałą masową łopaty wirnika nośnego). Dla nieskończone ciężkiej łopaty  $\gamma = 0$ , zaś dla łopaty zwykłych  $\gamma = 4 \div 7,5$ . Podstawiając równanie (3.35) do równania (3.34), otrzymamy:

$$a_0 = \frac{1}{2} \gamma \left[ \frac{\Theta}{4} (1 + \mu^2) + \frac{\lambda}{3} \right] - \frac{M_g}{J \Omega^2} \quad (3.36)$$

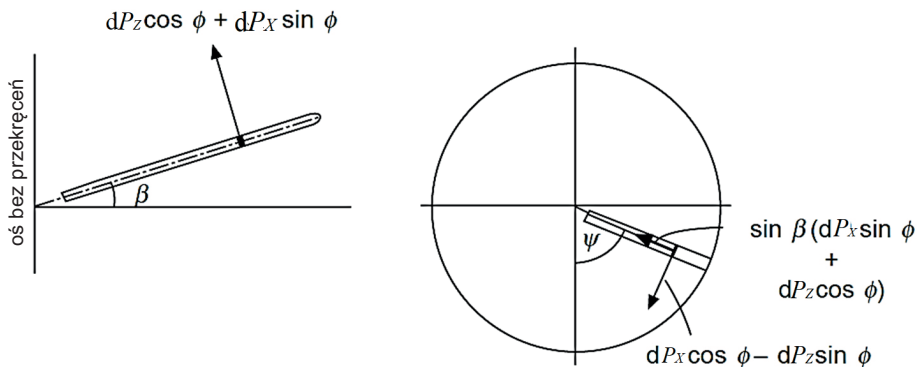
Współczynniki  $a_1$  i  $b_1$  wyznaczmy z równania (3.22), przyrównując wyrazy przy  $\sin\Psi$  i  $\cos\Psi$  do zera. Tak więc:

$$a_1 = \frac{\mu \left( \frac{8}{3} \Theta + 2\lambda \right)}{1 - \frac{1}{2} \mu^2} \quad (3.37)$$

$$b_1 = \frac{4\mu a_0}{3 \left( 1 + \frac{1}{2} \mu^2 \right)} \quad (3.38)$$

We wzorze (3.36) drugi człon reprezentuje ciężar łopaty; na ogół jest on pomijany, ponieważ jest bardzo mały w porównaniu z pierwszym.

### 3.4. Moment wirnika nośnego w ustalonym locie postępowym



Rys. 3.6. Składowe siły na wirniku śmigłowca

Moment elementarny elementu łopaty można zapisać w postaci (rys. 3.6):

$$dM = r(dP_x \cos \beta_* - dP_z \sin \beta_*) \quad (3.39)$$

Jeżeli założymy, że współczynnik oporu profilowego jest stały wzdłuż promienia łopaty i równy średniej wartości  $\delta$ , otrzymamy:

$$dM = \frac{1}{2} \rho V_x^2 \delta r c dr - \frac{1}{2} \rho V_x^2 C_z r c \beta_* dr \quad (3.40)$$

Sumaryczny moment oporu profilowego łopaty wirnika nośnego będzie się równał:

$$M_p = \frac{n}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \rho V_x^2 \delta c r d\psi dr \quad (3.41)$$

Podstawiając średnią wartość zamiast  $V_x^2$  ze wzoru (3.18), otrzymamy:

$$M_p = \frac{1}{2} n \rho c_A \delta \Omega^2 \int_0^R \left( r^3 + \frac{1}{2} \mu R^2 r \right) dr = \frac{n}{8} \rho c_A \delta \Omega^2 R^4 (1 + \mu^2) \quad (3.42)$$

Moment przechodzący od oporu indukowanego  $M_i$  określimy jako całkę podwójną z drugiego członu wzoru (3.40):



$$M_i = \frac{k}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \rho V_X^2 C_Z c r \beta_* d\Psi dr$$

Po podstawieniu wzoru (3.13) otrzymamy:

$$M_i = \frac{n}{2\pi} \frac{1}{2} \rho a_p c_A \int_0^R \int_0^{2\pi} (\Theta V_Z V_X r + V_Z^2 r) d\Psi dr \quad (3.43)$$

Całkę obliczamy po podstawieniu średnich wartości  $V_Z$ ,  $V_X$  i  $V_Z^2$  ze wzorów (3.18):

$$M_i = \frac{n}{2} \rho a_p c_A \int_0^R \Omega^2 \left[ \Theta \lambda R r^2 + \lambda^2 R^2 r + \frac{1}{2} r^3 (a_1^2 + b_1^2) + \mu \lambda R^2 r a_1 + \right. \\ \left. + \mu^2 R^2 r \left( \frac{1}{2} a_0^2 + \frac{3}{8} a_1^2 + \frac{1}{8} b_1^2 \right) - \mu R^2 r^2 a_0 b_1 \right] dr \quad (3.44)$$

Po scałkowaniu powyższego związku oraz uwzględniając (3.42), otrzymamy ostateczny wzór na moment wirnika nośnego w postaci:

$$M = \frac{n}{2} \rho a_p c_A \Omega^2 R^4 \left[ \frac{1}{4} (1 + \mu^2) - \frac{1}{3} \lambda \Theta - \frac{1}{2} \lambda^2 - \frac{1}{8} (a_1^2 + b_1^2) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \mu^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{8} a_1^2 + \frac{1}{8} b_1^2 \right) - \frac{1}{2} \mu \lambda a_1 + \frac{1}{3} \mu a_0 b_1 \right] \quad (3.45)$$

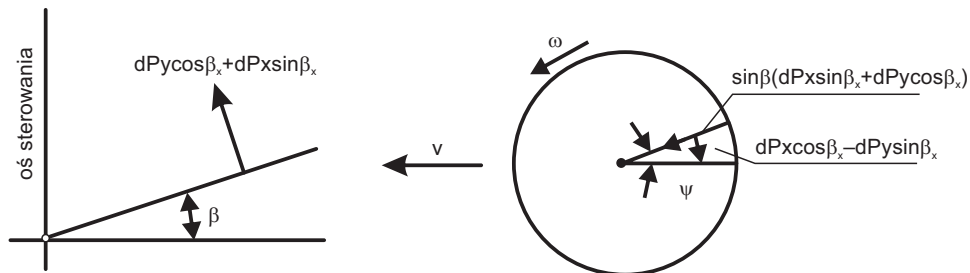
lub w postaci bezwymiarowej:

$$C_M = \sigma a_p \left[ \frac{\delta}{4 a_p} (1 + \mu^2) - \frac{1}{3} \lambda \Theta - \frac{1}{2} \lambda^2 - \frac{1}{8} (a_1^2 + b_1^2) + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \mu^2 \left( \frac{a_0^2}{2} + \frac{3}{8} a_1^2 + \frac{1}{8} b_1^2 \right) - \frac{1}{2} \mu \lambda \right] \quad (3.46)$$

### 3.5. Siła podłużna wirnika nośnego w ustalonym locie postępowym

Składowa wypadkowej siły wirnika nośnego w płaszczyźnie prostopadłej do osi sterowania  $H$  składa się z dwóch członów: z siły nośnej i siły oporu profilowego leżących na tej samej płaszczyźnie. Siła  $H$  jest dodatnia wówczas, jeśli przeciwsta-

wia się ruchowi śmigłowca. Wzór na elementarną siłę  $dH$  otrzymamy na podstawie analizy (rys. 3.7).



**Rys. 3.7.** Siła nośna i siła oporu łopaty wirnika nośnego

Składowe sił  $dP_z$ ;  $dP_x$  działające w płaszczyźnie prostopadłej do podłużnej osi łopaty, zrzucone równoległe i prostopadłe do osi sterowania (rys. 3.7) wynoszą:

$$\begin{aligned} & \perp dP_z \cos \beta_* + dP_x \sin \beta_* \\ & \parallel dP_x \cos \beta_* - dP_z \sin \beta_* \end{aligned} \quad (3.47)$$

zaś składowe tych sił, leżące w płaszczyźnie prostopadłej do osi sterowania (rys. 3.7) równają się:

$$\begin{aligned} & (dP_z \cos \beta_* + dP_x \sin \beta_*) \sin \beta \\ & dP_x \cos \beta_* - dP_z \sin \beta_* \end{aligned} \quad (3.48)$$

Rzutując składowe (3.47) na kierunek ruchu wirnika nośnego (rys. 3.7), otrzymamy:

$$dH = (dP_x \cos \beta_* - dP_z \sin \beta_*) \sin \Psi - (dP_z \cos \beta_* + dP_x \sin \beta_*) \sin \beta \cos \Psi \quad (3.49)$$

Zakładając że  $\beta_*$  i  $\beta$  są małe, przekształcimy równanie (3.42) do postaci:

$$dH = dP_x \sin \Psi - dP_z (\beta \cos \Psi + \beta_* \sin \Psi) \quad (3.50)$$

Część oporu profilowego tkwiąca w sile  $H$  wynosi:

$$H_p = \frac{n}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \rho V_X^2 c \delta \sin \Psi d\Psi dr \quad (3.51)$$

Całkując (3.44) względem  $\Psi$ , otrzymamy:

$$H_p = \frac{n}{2} \rho c_A \delta \mu \Omega^2 R \int_0^R r dr \quad (3.52)$$

Po scałkowaniu wzdłuż promienia otrzymamy:

$$H_p = \frac{n}{4} \rho c_A \delta \mu \Omega^2 R^3 \quad (3.53)$$

Składowe oporu indukowanego wyrazi się całką:

$$\begin{aligned} H_i &= \frac{n}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \rho V_X^2 C_Z c_A (\beta \cos \Psi + \beta_* \sin \Psi) d\Psi dr = \\ &= \frac{n}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \rho c a_p \left[ (\Theta V_X^2 + V_X V_Z) \beta \cos \Psi + (\Theta V_X V_Z + V_Z^2) \sin \Psi \right] d\Psi dr \end{aligned} \quad (3.54)$$

Całkując (3.54) najpierw względem  $\Psi$ , zaś później względem  $r$  oraz otrzymany wynik dodając do (3.51) zgodnie z równaniem (3.52), mamy:

$$H = \frac{n}{2} \rho a_p c_A \Omega^2 R^3 \left( \frac{\delta \mu}{2a_p} + \frac{1}{3} \Theta a_1 - \frac{1}{2} \mu \lambda \Theta + \frac{3}{4} \lambda a_1 + \frac{1}{4} \mu a_1^2 - \frac{1}{6} a_0 b_1 + \frac{1}{4} \mu a_0^2 \right) \quad (3.55)$$

lub wprowadzając współczynnik siły  $H$  jako

$$C_H = \frac{H}{\pi R^2 \frac{\rho}{2} (\Omega R)^2} \quad (3.56)$$

Otrzymamy:

$$C_H = \sigma a_p \left( \frac{\delta \mu}{2a_p} + \frac{1}{3} \Theta a_1 - \frac{1}{2} \mu \lambda \Theta + \frac{3}{4} \lambda a_1 + \frac{1}{4} \mu a_1^2 - \frac{1}{6} a_0 b_1 + \frac{1}{4} \mu a_0^2 \right) \quad (3.57)$$

### 3.6. Prostoliniowy ustalony lot śmigłowca – analiza założeń

Wyprowadzone związki określające charakterystyki wirnika nośnego można wykorzystywać do obliczenia osiąarów śmigłowca, stateczności i sterowności oraz wyznaczania naprężeń, jak również do badania zjawisk aerospężystości.

Jednak aby prawidłowo korzystać z powyższych związków, należy w każdym przypadku przeanalizować założenia, które były czynione przy ich wyprowadzaniu. Jest to bardzo ważne z punktu widzenia prawidłowej oceny zjawisk, które badamy, gdyż niektóre równania mogą być wystarczające do badania jednych zjawisk, natomiast do innych mogą okazać się niewystarczające. Na przykład założenie o równomierności strumienia jest zupełnie wystarczające do obliczenia charakterystyk śmigłowca, natomiast to samo założenie jest nie do przyjęcia przy badaniu zjawisk aerospężystości. Innym przykładem może być założenie dotyczące strat brzegowych  $B$ , wykorzystywane z powodzeniem do obliczania charakterystyk wirnika, natomiast w analizie naprężeń staje się zupełnie nieprzydatne.

Mając na uwadze powyższe względy, musimy przeanalizować przynajmniej w kilku słowach założenia poczynione przy wyprowadzaniu niektórych równań w rozdziałach 2 i 3. Założenia te były następujące:

1. Łopaty są płaskie, prostokątne.
2. Składowa promieniowa wypadkowej prędkości elementu łopaty nie była uwzględniana. Strumień promieniowy nieznacznie zwiększa sumaryczny opór profilowy wirnika nośnego i jego wpływ na ciąg wirnika jest pomijalny.
3. Prędkość indukowana przez tarcze wirnika jest stała. Udowodniono, że założenie to jest dopuszczalne przy obliczaniu charakterystyk wirnika nośnego przy  $\mu > 0,1$ ; jednak prowadzi do błędów przy wyznaczaniu toru ruchu łopaty, w szczególności przy wyznaczaniu współczynnika  $b_1$ . Oprócz tego pewne typy drgań występujących na śmigłowcu na zakresach przejściowych lotu, tj. w przedziale 0–45 km/h, możemy wyjaśnić jedynie rozważając strumień niesymetryczny.

4. Kąty stożka wirnika nośnego  $\beta$  i kąt  $\beta_*$  są małe, dlatego też przyjęliśmy, że

kąt  $\cos \beta = 1$  i  $\cos \beta_* = 1$ , zaś  $\sin \beta = \beta$  oraz  $\sin \beta_* = \beta_*$ . Założenie, że  $\beta_*$  jest małym kątem jest do przyjęcia dla dużej części przedziału pracy śmigłowca, jednak może doprowadzić do znacznych błędów w pewnych warunkach lotu, tj. wtedy gdy prędkość strumienia przez tarcze wirnika jest duża, np. podczas stromego opadania lub wznoszenia, gdy wirnik nośny pracuje jako śmigło.

5. Do obliczenia kąta  $\beta$  wykorzystaliśmy tylko pierwsze wyrazy szeregu Fouriera, natomiast wyższe harmoniczne pominęliśmy. O ile pominięcie wyższych harmonicznych nie wpływa na przybliżone wyznaczenie charakterystyk wirnika nośnego i na jego stateczność, o tyle w badaniu zjawisk aerospężystości

i wyznaczaniu naprężeń prowadzi do dużych błędów, ponieważ są one głównym źródłem tych zjawisk.

6. Wpływ obszaru przeciwnego strumienia pominęliśmy. Obszar taki występuje u nasady łopaty, biegnącej do tyłu, gdzie prędkość strumienia napływającego, pochodzącego od prędkości postępowej śmigłowca, przewyższa lokalną prędkość obwodową. Łopata w tym obszarze opływana jest strumieniem od krawędzi spływu w kierunku krawędzi natarcia. Obszar przeciwnego strumienia wzrasta przy wzroście  $\mu$ .
7. Zakładaliśmy, że łopata kończy się na osi obrotu i przegub poziomy znajduje się na niej (pominęliśmy odległość pomiędzy osią przegubu poziomego i płaszczyzną łopaty. Przy obliczaniu stateczności takiego założenia nie wolno czynić).
8. Współczynnik oporu profilowego i  $a_p = \frac{\partial C_z}{\partial \alpha}$  przyjęliśmy jako stałe. Założenie

to nie uwzględnia zmiany kąta natarcia, a więc zmiany oporu profilowego w tarczy wirnika, nawet jeśli nie występuje zjawisko oderwania. Bardziej istotnym błędem jest pominięcie zjawiska oderwania. Przy dużych  $\mu$ , tj. gdy na większej części łopaty cofającej się następuje oderwanie strumienia, opór profilowy nagle wzrasta, przy jednoczesnym spadku siły nośnej. Przez pominięcie tego zjawiska otrzymujemy zawyżone charakterystyki wirnika nośnego. W rzeczywistości są one nieco gorsze od otrzymanych z obliczeń.

9. Zakładaliśmy, że łopaty są nieskończenie sztywne we wszystkich kierunkach. W rzeczywistości są one sprężyste, co wpływa na zmienne rozkładu prędkości i kąta natarcia. W obliczaniu charakterystyk wirnika nośnego zmiany te były pomijane, co oczywiście nie prowadziło do dużych błędów. Jednak badając zjawiska aerosprężystości i statyczności, powyższych zjawisk pomijać nie wolno.
10. Straty brzegowe pomijaliśmy, co prowadzi do zaniżenia oporów indukowanych wirnika nośnego.

Wszystkie związki wyprowadzone w niniejszym rozdziale, z uwzględnieniem powyższych założeń, pozwalają w przybliżeniu ocenić z punktu widzenia ilościowego charakterystyki wirnika nośnego. Do zrozumienia istoty zjawisk i przybliżonego obliczenia sił i momentów aerodynamicznych wirnika nośnego w zakresie obliczenia osiągow śmigłowca jest to wystarczająco dokładne. Jednak do badań szczegółowych mogą one nie wystarczać. W drugiej części monografii zostaną podane modele i zależności pozwalające na obliczenie obciążeń aerodynamicznych wirnika w zakresie niezbędnym do analizy stateczności dynamicznej i dynamiki nieustalonych ruchów śmigłowca.



## METODYKA OBLICZANIA OSIĄGÓW ŚMIGŁOWCA

Do osiągnięć śmigłowca, podobnie jak i samolotu, zaliczamy charakterystyczne prędkości lotu poziomego, prędkość wznoszenia, prędkość opadania, udźwig, pułap statyczny, pułap dynamiczny, zasięg i długotrwałość lotu oraz zasięg lotu ślizgowego na zakresie autorotacji.

Wiele jest metod obliczania osiągnięć, jednak najczęściej można spotkać metodę ciągu i metodę mocy. Są jeszcze różne kombinacje tych podstawowych metod, które niejednokrotnie upraszczają tok obliczeń. Nie będziemy jednak omawiać szczegółowo wszystkich metod obliczeń osiągnięć śmigłowca, jedynie podamy analizę poszczególnych parametrów śmigłowca ze wskazaniem sposobu wyznaczenia, w oparciu o metodę mocy.

### 4.1. Moc rozporządzalna

Moc uzyskana od silnika nie jest całkowicie wykorzystywana przez wirnik nośny. Część jej jest tracona na chłodzenie silnika, na pokonanie strat mechanicznych oraz na obracanie śmigła ogonowego, tj.:

$$N_r = N - N_{ch} - N_f - N_{SO} \quad (4.1)$$

gdzie:

$N$  – moc silnika;

$N_{ch}$  – moc zużyta na chłodzenie silnika ( $q$  przypadku silników tłokowych);

$N_t$  – moc zużyta na tarcie w układach transmisji napędu;

$N_{SO}$  – moc pobierana przez śmigło ogonowe.

Straty chłodzenia bywają dość duże. Wynikają one z zabudowania silnika tłokowego w kadłubie śmigłowca. Wartość tych strat waha się od 3% do 10% mocy

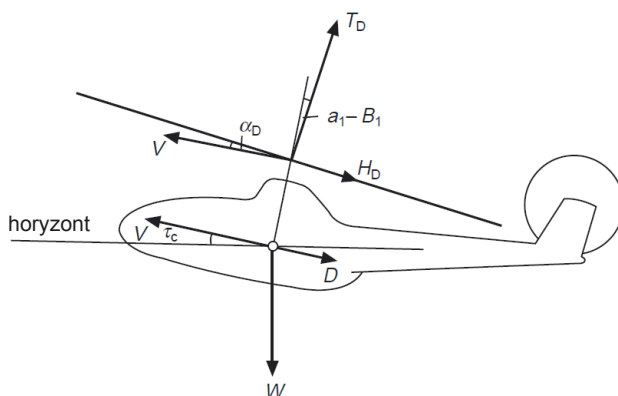
silnika. Jeżeli chodzi o straty mechaniczne, to wynikają one z konieczności redukcji obrotów, co zmusza konstruktorów do stosowania przekładni o dużym przełożeniu: 11÷13. Straty te liczbowo sięgają do 8%. Wreszcie moc pobierana przez śmigło ogonowe wynosi ok. 8%.

## 4.2. Moc niezbędna

Analiza charakterystyk śmigłowca, podobnie jak samolotu, bazuje się na krzywych mocy niezbędnych w funkcji prędkości dla różnych warunków lotu. Przy budowaniu krzywych mocy niezbędnych, musimy zdawać sobie sprawę, na co ta moc jest zużywana w locie ustalonym. Moc niezbędna  $N_n$  tracona jest na:

- 1) poruszanie wirnika nośnego;
    - a)  $N_i$  – pokonanie strat indukowanych;
    - b)  $N_p$  – pokonanie strat profilowych wirnika nośnego;
  - 2)  $N_{sz}$  – pokonanie oporu szkodliwego kadłuba, podwozia itp.;
  - 3)  $N_w$  – zmianę potencjalnej energii śmigłowca przy zmianie wysokości lotu.
- Można więc napisać, że moc niezbędna jest sumą następujących składników:

$$N_n = N_p + N_i + N_{sz} + N_w \quad (4.2)$$



**Rys. 4.1.** Siły działające na śmigłowca w płaszczyźnie symetrii

Na podstawie rys. 4.1 możemy zapisać warunki równowagi podłużnej śmigłowca w ustalonym locie poziomym:

$$\begin{aligned} T_D \cos(\alpha_D + \gamma_c) &= mg + D_{sz} \sin \gamma_c \\ T_D \sin(\alpha_D + \gamma_c) + H_D \cos(\alpha_D + \gamma_c) &= -D_{sz} \cos \gamma_c \end{aligned} \quad (4.3)$$



Ze względu na to, że kąty  $\alpha_D$  oraz  $\gamma_c$  są małe, możemy przyjąć, że  $\cos(\alpha_D + \gamma_c) \approx 1$ ,  $\sin(\alpha_D + \gamma_c) \approx \alpha_D + \gamma_c$ . Równania (4.3) możemy zatem zapisać:

$$\begin{aligned} T_D \approx T_Z = T &= mg + D_{sz} \gamma_c \\ T(\alpha_D + \gamma_c) + H_D &= -D_{sz} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Każdą moc możemy przedstawić jako określoną dyssypację energii w jednostce czasu, równoważną oporowi poruszającego się z prędkością postępową śmigłowca. Tak więc jeżeli przez  $D_n$  oznaczamy sumę równoważnych oporów, tj.:

$$H_X = H_p + H_i + D_{sz} + H_W \quad (4.5)$$

to:

$$\left. \begin{aligned} H_X V &= N_n \\ H_p V &= N_p \\ H_i V &= N_i \\ D_{sz} V &= N_{sz} \\ H_W V &= N_W \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Dzieląc równanie (4.5) stronami przez ciąg wirnika nośnego  $T$ , ( $T \approx T_D \approx T_Z$ ), otrzymamy to samo równanie w postaci bezwymiarowej:

$$\frac{H_X}{T} = \frac{H_p}{T} + \frac{H_i}{T} + \frac{D_{sz}}{T} + \frac{H_W}{T} \quad (4.7)$$

Pierwsze dwa wyrazy możemy przedstawić w postaci

$$\left( \frac{H}{T} \right)_{WN} = \left( \frac{H}{T} \right)_p + \left( \frac{H}{T} \right)_i \quad (4.8)$$

gdzie:

$\left( \frac{H}{T} \right)_{WN} = \frac{1}{K}$  – stosunek oporu wirnika nośnego do ciągu wirnika nośnego (odwrotność dokładności  $K = \left( \frac{T}{H_X} \right)$ ).

Doskonałość aerodynamiczną wirnika nośnego  $K$  można przedstawić jako stosunek mocy na pokonanie momentu oporowego wirnika nośnego do mocy ciągu wirnika nośnego:

$$K = \frac{M\Omega}{TV} \quad (4.9)$$

Wykorzystując równanie (4.6), otrzymamy

$$\left(\frac{H}{T}\right)_i = \frac{C_T}{4\mu\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}} \quad (4.10)$$

lub dla większych wartości kąta natarcia wirnika płaszczyzny końców łopat wirnika nośnego gdy  $T_z = T \cos \alpha_D$  otrzymamy:

$$(H)_i = \frac{C_z}{4} \left[ \frac{\mu}{\cos^3 \alpha \sqrt{\mu^2 + \lambda^2}} \right] \quad (4.11)$$

Jeżeli  $\mu > 0,1$ , cały nawias w powyższym wzorze można przyjąć za równy jedności i stosunek oporu indukowanego do siły nośnej możemy obliczać jedynie wg współczynnika siły nośnej profilu łopaty, tj.

$$\left(\frac{H}{T}\right)_i = \frac{C_z}{4} \quad (4.12)$$

Z powyższego wzoru można korzystać przy wszystkich prędkościach oprócz zakresu zbliżonego do zawisu lub na dużych kątach natarcia wirnika nośnego. Dla tych prędkości musimy prowadzić obliczenia za pomocą wzorów (4.10) i (4.11).

$$\frac{D_{sz}}{T} = \frac{\frac{1}{2}\rho V^2 \pi R^2 C_{x_{sz}}}{\frac{1}{2}\rho(\Omega R)^2 \pi R^2 C_T} = \frac{1}{C_T} \frac{f}{\pi R^2} \mu \quad (4.13)$$

gdzie:

$f = C_{x_{sz}} \pi R^2$  – jest nazywana powierzchnią ekwiwalentnego oporu, co odpowiada powierzchni płaskiej o równoważnym oporze.

Moc na wznoszenie obliczamy z zależności:

$$H_w V = mgW \quad (4.14)$$

Dzieląc obie strony tego równania przez prędkość  $V$ , otrzymamy:

$$H_w = mg \frac{W}{V}$$

Ponieważ (rys. 4.1)  $mg = \frac{T}{\cos \gamma_c}$  oraz  $\frac{W}{V} = \sin \gamma_c$  otrzymamy

$$\frac{H_w}{T} = \tan \gamma_c \quad (4.15)$$

Jeżeli kąt  $\gamma_c$  jest mały, to możemy przyjąć, że  $\tan \gamma_c \approx \sin \gamma_c \approx \gamma_c \approx \frac{W}{V}$ , zatem:

$$\frac{H_w}{T} = \tan \gamma_c \approx \frac{W}{V} \quad (4.16)$$

Przy opadaniu śmigłowca siła ciężkości zmniejsza moc niezbędną do lotu i stosunek (4.16) staje się ujemny.

Pozostaje jeszcze do wyznaczenia stosunek oporu profilowego do ciągu wirnika nośnego. W tym celu musimy najpierw wyznaczyć kąt nastawienia łopat oraz strumień przepływający przez wirnik nośny. Zakładając, że łopaty są liniowo skrócone geometrycznie według wzoru:

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 \left( \frac{r}{R} \right) \quad (4.17)$$

gdzie:  $\theta_1 = \theta_k - \theta_0$ , stosunek oporu profilowego do siły nośnej można obliczyć ze wzoru:

$$\begin{aligned} \mu \frac{C_T}{\sigma a_p} \left( \frac{H_X}{T} \right)_p &= \frac{\delta_0}{a_p} \phi_1 + \frac{\delta_1}{a_p} (\phi_2 \lambda + \phi_3 \theta_0 + \phi_4 \theta_1) + \\ &+ \frac{\delta_2}{a_p} (\phi_5 \lambda^2 + \phi_6 \lambda \theta_0 + \phi_7 \lambda \theta_1 + \phi_8 \theta_0^2 + \phi_9 \theta_0 \theta_1 + \phi_{10} \theta_1^2)_1 \end{aligned} \quad (4.18)$$

gdzie wartości współczynników  $\phi_i$  podane są w tabeli 4.1, zaś współczynnik oporu profilowego przekroju łopaty wyraża się wzorem:

$$Cx_p = \delta_0 + \delta_1 \alpha_r + \delta_2 \alpha_r^2 \quad (4.19)$$

Dla określonego śmigłowca, lecącego z daną prędkością na danej wysokości, wszystkie parametry w równaniu (4.18), oprócz  $\lambda$  i  $\theta$ , są znane. Przy wyznaczaniu  $\lambda$  i  $\theta$  należy skorzystać z następujących równań dla ciągu:

$$\frac{C_T}{\sigma a_p} = C_1 \lambda + C_2 \theta_0 + C_3 \theta_1 \quad (4.20)$$

Wartości liczbowe współczynników  $C_i$  podane są w tabeli 4.2 i dla momentu oporowego wirnika nośnego (przyśpieszanie obrotów):

$$\left( \frac{C_M}{\sigma a_p} \right)_{przysp} = \kappa_1 \lambda^2 + \kappa_2 \lambda \theta_0 + \kappa_3 \lambda \theta_1 + \kappa_4 \theta_0^2 + \kappa_5 \theta_0 \theta_1 + \kappa_6 \theta_1^2 \quad (4.21)$$

Wartości współczynników  $\kappa_i$  podane są w tabeli 4.3 oraz dla momentu opóźniającego:

$$\begin{aligned} \left( \frac{C_M}{\sigma} \right)_{opozn} &= \chi_1 \delta_0 + \delta_1 (\chi_2 \lambda + \chi_3 \theta_0 + \chi_4 \theta_1) + \\ &+ \delta_2 (\chi_5 \lambda^2 + \chi_6 \lambda \theta + \chi_7 \lambda \theta_1 + \chi_8 \theta_0^2 + \chi_9 \theta_0 \theta_1 + \chi_{10} \theta_1^2) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Wartości liczbowe współczynników  $\chi_i$  podane są w tabeli 4.4. Z równań (4.20), (4.21) i (4.22) wynika, że  $k_i$  i  $k_m$  są funkcjami  $\lambda$ ,  $\theta$  i  $\mu$ , tj.

$$\begin{aligned} C_T &= f(\lambda, \theta, \mu) \\ C_M &= g(\lambda, \theta, \mu) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Aby wyznaczyć z tych równań  $\lambda$  i  $\theta$ , muszą być znane  $\mu$ ,  $C_T$  i  $C_M$ . Wiadome są  $\mu$  i  $C_T$ , zaś  $C_M$  reprezentującego całkowity moment obliczyć od razu nie możemy. Musimy najpierw wyznaczyć opór profilowy. Do obliczenia stosunku  $\left( \frac{H_X}{T} \right)_p$  należy założyć kilka wartości  $C_{Mp}$  dopóki wartość momentu nie stanie się równa sumie wszystkich czynników wchodzących do wzoru na całkowity moment.

Kolejność obliczeń powinna być następująca:

- 1) Zakładamy kilka wartości  $C_M$  i wyznaczamy  $\lambda$  i  $\theta$ , rozwiązując równania (4.21) i (4.22).
- 2) Mając  $\lambda$  i  $\theta$ , wyznaczamy za pomocą równania (4.18) wartość  $\left( \frac{H_X}{T} \right)_p$ .
- 3) Za pomocą równania (4.7) obliczamy  $\frac{H_X}{T}$ .

- 4) Z równania (4.9) obliczamy  $M$ , następnie przechodzimy do współczynnika  $C_M$ .
- 5) Porównujemy obliczony współczynnik momentu  $C_M$  z założonym w punkcie 1. Jeżeli wystąpi różnica pomiędzy tymi wartościami, czynności te powtarzamy jeszcze raz, względnie po raz trzeci. Wartości obliczone i założone muszą się pokryć.

### 4.3. Prędkość wznoszenia śmigłowca

Przy obliczaniu parametrów wznoszenia śmigłowca interesuje nas przede wszystkim prędkość wznoszenia, czas wznoszenia na poszczególne wysokości i pułap śmigłowca. Obliczenia te możemy przeprowadzić poprzez wyznaczenie nadmiaru mocy lub na podstawie stosunku poszczególnych mocy do siły nośnej.

Obliczając wznoszenie, można rozwiązywać dwa zagadnienia:

- 1) obliczać prędkości wznoszenia przy założonych prędkościach ruchu postępowego i mocy rozporządzalnej,
- 2) obliczać niezbędną moc do uzyskania założonej prędkości wznoszenia, przy określonej prędkości ruchu postępowego.

Prędkość wznoszenia śmigłowca obliczamy dla różnych mas śmigłowca i wysokości lotu. Obliczenie prędkości wznoszenia (lub opadania) przy danej mocy rozporządzalnej prowadzi się według kolejności:

1. Przy danej mocy rozporządzalnej i ciężarze śmigłowca (zakładając że  $T = mg$ ) wyznaczamy  $\frac{H_X}{T}$ .

2. Przy danym ciężarze, wysokości i prędkości lotu oraz geometrycznych charakterystykach wirnika nośnego wyznaczamy  $\frac{C_Z}{\sigma}$ ,  $\left(\frac{H_X}{T}\right)_i$  i  $\left(\frac{D_{sz}}{T}\right)$ .

3. Obliczamy następnie  $\left(\frac{H_X}{T}\right)_p$ . Możemy to wyznaczyć tak, jak to czyniliśmy

w poprzednim rozdziale lub możemy wykorzystać w tym celu wykresy zawarte np. w monografii [1.4, s. 173–175].

Tabela 4.1

Wartości współczynników w równaniu (4.18), potrzebne do obliczenia

$\mu \frac{C_T}{\sigma a_p} \left( \frac{H_X}{T} \right)_p$ ( $\gamma = 7,5 ; B = 0,97$ )												
$\varphi_i$	$\mu = 0$	0,5	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	
$\varphi_1$	0,2500	0,2519	0,2575	0,2669	0,2802	0,2973	0,3183	0,3433	0,3724	0,4057	0,4434	
$\varphi_2$	0,3333	0,3337	0,3348	0,3367	0,3394	0,3430	0,3475	0,3532	0,3601	0,3683	0,3781	
$\varphi_3$	0,2500	0,2507	0,2529	0,2566	0,2618	0,2685	0,2767	0,2866	0,2982	0,3115	0,3266	
$\varphi_4$	0,2000	0,2004	0,2017	0,2038	0,2067	0,2106	0,2153	0,2210	0,2277	0,2353	0,2441	
$\varphi_5$	0,5000	0,5024	0,5097	0,5220	0,5395	0,5626	0,5918	0,6276	0,6707	0,7217	0,7816	
$\varphi_6$	0,6667	0,6716	0,6863	0,7111	0,7467	0,7940	0,8545	0,9298	1,0219	1,1333	1,2666	
$\varphi_7$	0,5000	0,5030	0,5121	0,5277	0,5502	0,5804	0,6194	0,6684	0,7286	0,8019	0,8900	
$\varphi_8$	0,2500	0,2522	0,2587	0,2700	0,2867	0,3095	0,3395	0,3779	0,4263	0,4864	0,5602	
$\varphi_9$	0,4000	0,4029	0,4116	0,4266	0,4487	0,4788	0,5182	0,5685	0,6316	0,7069	0,8051	
$\varphi_{10}$	0,1667	0,1667	0,1709	0,1765	0,1845	0,1955	0,2097	0,2278	0,2502	0,2779	0,3114	

Tabela 4.2

Wartości współczynników w równaniu (4.18), potrzebne do obliczenia

$\mu \frac{C_T}{\sigma a_p} \left( \frac{H_X}{T} \right)_p$ ( $\gamma = 7,5 ; B = 97$ )												
$C_i$	$\mu = 0$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	
$C_1$	0,4704	0,4711	0,4730	0,4762	0,4807	0,4868	0,4944	0,5038	0,5152	0,5286	0,5445	
$C_2$	0,3042	0,3054	0,3090	0,3148	0,3229	0,3333	0,3460	0,3612	0,3790	0,3996	0,4331	
$C_3$	0,2213	0,2219	0,2237	0,2267	0,2310	0,2366	0,2523	0,2627	0,2627	0,2749	0,2892	

Tabela 4.3

Wartości współczynników  $K_i$  w równaniu (4.21) ( $\gamma = 7,5$ ;  $B = 0,97$ )

$K_i$	$\mu = 0$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$K_1$	0,4704	0,4739	0,4844	0,5018	0,5265	0,5585	0,5982	0,6457	0,7016	0,7662	0,8399
$K_2$	0,3042	0,3113	0,3324	0,3685	0,4205	0,4900	0,5787	0,6891	0,8238	0,9859	1,1789
$K_3$	0,2231	0,2264	0,2419	0,2681	0,3059	0,3562	0,4205	0,5003	0,5975	0,7144	0,8536
$K_4$	0	0,0023	0,0093	0,0216	0,0399	0,0656	0,1000	0,1450	0,2029	0,2762	0,3676
$K_5$	0	0,0033	0,0136	0,0316	0,0584	0,0958	0,1460	0,2116	0,2959	0,4026	0,5357
$K_6$	0	0,0012	0,0050	0,0115	0,0213	0,0350	0,0533	0,0772	0,1079	0,1467	0,1951

Tabela 4.4

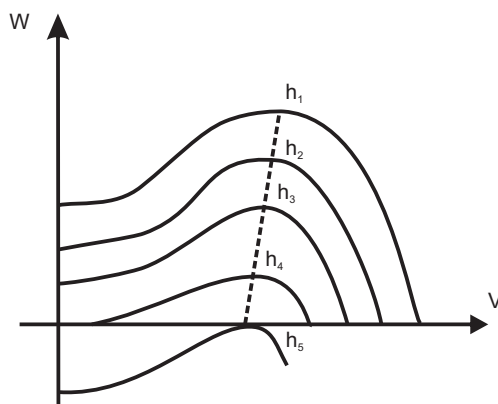
Wartości liczbowe współczynników  $\chi_i$  w równaniu (4.22) ( $\gamma = 7,5$ ;  $B = 0,97$ )

$\chi_i$	$\mu = 0$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\chi_1$	0,5200	0,2506	0,2525	0,2556	0,2600	0,2655	0,2722	0,2802	0,2892	0,2993	0,3105
$\chi_2$	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333	0,3332	0,3330	0,3327	0,3323	0,3316	0,3307
$\chi_3$	0,2500	0,2506	0,2525	0,2556	0,2599	0,2654	0,2721	0,2799	0,2887	0,2985	0,3093
$\chi_4$	0,2000	0,2004	0,2017	0,2037	0,2066	0,2103	0,2147	0,2198	0,2257	0,2322	0,2393
$\chi_5$	0,5000	0,5038	0,5153	0,5345	0,5607	0,5971	0,6411	0,6940	0,7563	0,8287	0,9116
$\chi_6$	0,6667	0,6743	0,6976	0,7373	0,7946	0,8713	0,9694	1,0918	1,2413	1,4217	1,6367
$\chi_7$	0,5000	0,5056	0,5225	0,5513	0,5927	0,6480	0,7187	0,8066	0,9139	1,0432	1,1974
$\chi_8$	0,2500	0,2532	0,2630	0,2798	0,3047	0,3389	0,3839	0,4419	0,5150	0,6061	0,7181
$\chi_9$	0,4000	0,4046	0,4186	0,4429	0,4787	0,5280	0,5930	0,6768	0,7827	0,9147	1,0773
$\chi_{10}$	0,1667	0,1684	0,1735	0,1824	0,1955	0,2135	0,2372	0,2676	0,3060	0,3537	0,4124

4. Z równania (4.7) obliczamy  $\left(\frac{H_X}{T}\right)_{WN}$ .
5. Prędkość wznoszenia możemy obliczyć z równania  $\left(\frac{H_X}{T}\right)_{WN} = \frac{W}{V}$ .

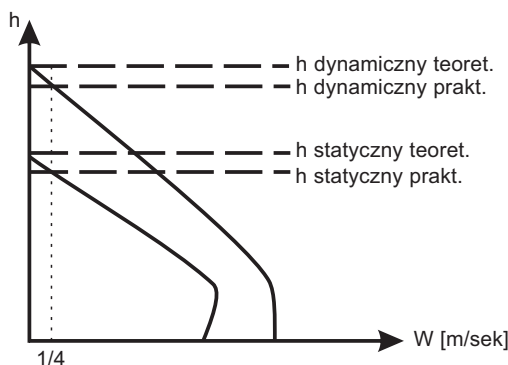
Jeżeli okaże się, że kąt wznoszenia jest znaczny, to tę czynność powtarzamy, wychodząc z założenia, że  $T = mg \cos \alpha$ , zamiast  $T = mg$ .

Obliczając prędkość opadania na zakresie autorotacji, punkt 1 pomijamy, ponieważ  $\left(\frac{H_X}{T}\right)_{WN} = 0$ . Wykres prędkości wznoszenia ma przebieg jak na rys. 4.2.



**Rys. 4.2.** Prędkość wznoszenia śmigłowca w funkcji prędkości lotu

Największe prędkości wznoszenia są przy ziemi. Ze wzrostem wysokości maleją i na pułapie jest równe zero ( $H_5$ ). Odczytując z poszczególnych wykresów  $W_{\max}$  i rysując krzywą w układzie  $(W_{\max}, h)$  otrzymamy zmianę  $W_{\max} = f(h)$ . Krzywa ta jest przedstawiona na wykresie rys. 4.3.



**Rys. 4.3.** Barogram wznoszenia



Śmigłowiec ma dwa pułapy: statyczny i dynamiczny. Statycznym pułapem nazywamy największą wysokość, jaką śmigłowiec jest w stanie osiągnąć w locie pionowym. Natomiast pułap dynamiczny osiągany jest w locie ukośnym. Pułap statyczny oraz prędkość wznoszenia pionowego są mniejsze od pułapu dynamicznego oraz od prędkości wznoszenia w locie ukośnym. Współczesne śmigłowce mają pułap statyczny w granicach 1000 ÷ 3500 m. Ta ciekawa własność śmigłowca może być przyczyną dużych trudności podczas eksploatacji w górach. Może się okazać, że możliwy jest jedynie start ukośny. Nastąpi to wówczas, gdy wysokość miejsca startu według atmosfery wzorcowej będzie większa od pułapu statycznego. Dla śmigłowców o małym nadmiarze mocy podobna trudność może zaistnieć podczas gorących dni letnich. Mowa tu oczywiście o starcie, tzn. o osiągnięciu wysokości pierwszych parudziesięciu metrów wysokości. Z powodu oddziaływania Ziemi samo oderwanie się od niej może być pionowe.

#### 4.4. Barogram wznoszenia

Mając krzywą prędkości wznoszenia, można zbudować krzywą czasu wznoszenia (barogram wznoszenia), posługując się metodą całkowania wykreślnego. Procedura jest następująca:

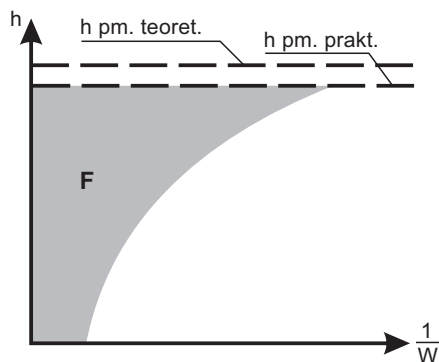
$$\begin{aligned} dh &= W dt \\ \text{lub} \\ dt &= \frac{dh}{W} \end{aligned} \tag{4.24}$$

Całkując to wyrażenie, otrzymamy

$$t = \int_0^h \frac{dh}{W} \tag{4.25}$$

Całkę tę obliczamy, budując krzywą  $\frac{1}{W} = f(h)$ , rys. 4.4. Powierzchnia zakre-

skowana w odpowiedniej skali daje wartość omawianej całki. Całkę obliczamy numerycznie:

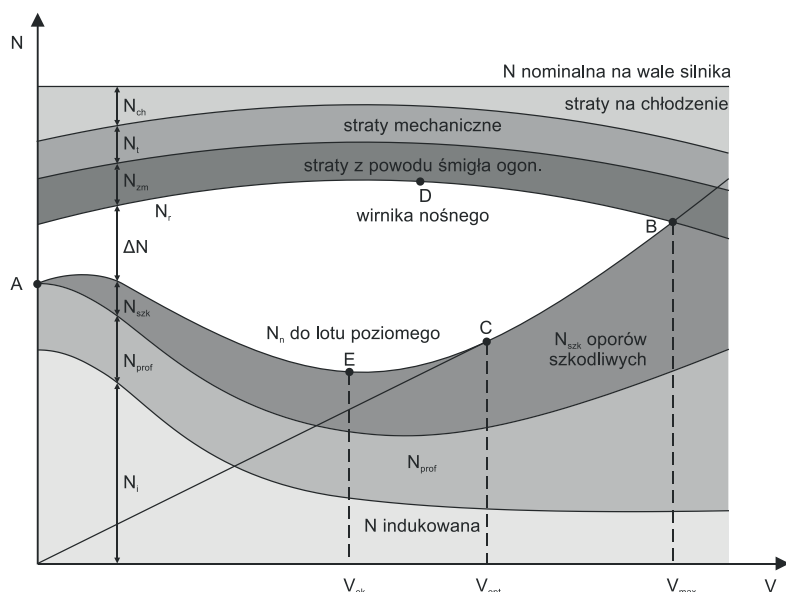


Rys. 4.4. Krzywa  $\frac{1}{W} = f(h)$

Barogram wznoszenia podany jest na zestawieniowym wykresie osiągow (rys. 4.6).

## 4.5. Zestawienie mocy i charakterystyczne zakresy lotu

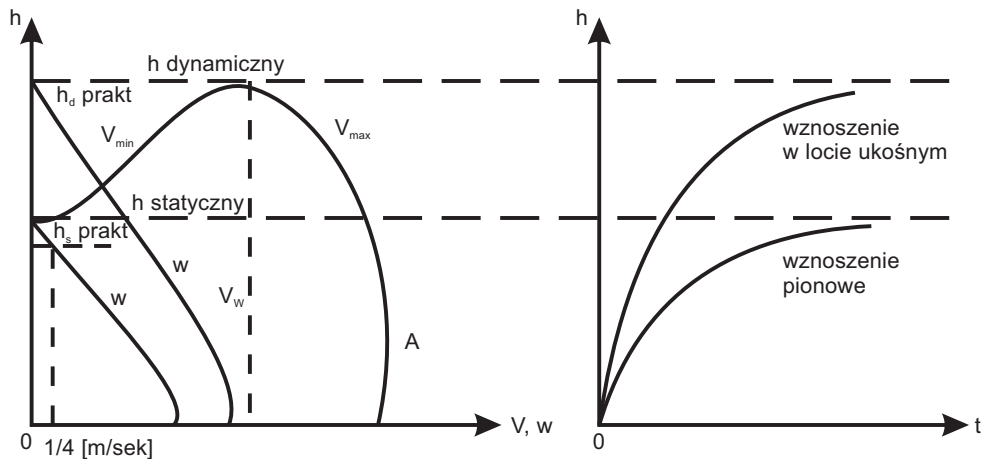
Poprzednio stwierdziliśmy, że moc rozporządzalna na wale silnika nie jest w pełni wykorzystywana na przemieszczanie śmigłowca w przestrzeni. Pewna część mocy tracona jest na chłodzenie, straty mechaniczne i na napędzanie śmigła ogonowego. Można to przedstawić wykreślnie za pomocą rys. 4.5.



Rys. 4.5. Zestawienie mocy niezbędnej i rozporządzanej

Ze względu na opisane w punkcie 4.1 straty, moc rozporządzana  $N_r$  jest znacznie mniejsza od mocy  $N$  na wale silnika. Natomiast moc niezbędna  $N_n$  jest sumą mocy indukowanej, mocy profilowej i mocy traconej na pokonanie oporów szkodliwych. Punkt  $B$  jest punktem przecięcia się mocy rozporządzalnej i mocy niezbędnej. Podobnie jak w przypadku samolotu, jest to maksymalna prędkość śmigłowca. Punkt  $A$  odpowiada warunkom zawisu. W punkcie  $C$  prosta poprowadzona z początku układu jest styczną do krzywej  $N_n = f(V)$ . Punkt ten odpowiada prędkości optymalnej  $V_{opt}$ . Punkt  $D$  odpowiada prędkości ekonomicznej. Przy tej prędkości nadmiar mocy jest w tym punkcie największy.

Wykonując obliczenia dla kilku wysokości, można określić charakterystyczne prędkości dla każdej z nich. Zestawiając wszystkie zasadnicze osiągi śmigłowca na różnych wysokościach, otrzymamy tzw. wykres ofertowy (rys. 4.6).



Rys. 4.6. Wykres ofertowy

Z wykresu ofertowego wynika, w jakich warunkach śmigłowiec osiąga największą prędkość lotu poziomego (punkt  $A$ ) oraz że na wysokościach większych od pułapu statycznego ( $h_{st}$ ) śmigłowiec może latać jedynie z prędkością poziomą, zawierającą się w przedziale pomiędzy  $V_{min}$  i  $V_{max}$ . Krzywą przerywaną podana jest prędkość pozioma, przy której prędkość pionowa  $w$  jest maksymalna. Na podstawie barogramu wznoszenia można określić czas wznoszenia na dowolną wysokość. Pożądane jest wykonanie takich zestawień osiągnięć dla kilku wariantów obciążenia śmigłowca.

## 4.6. Zasięg i długotrwałość lotu

Zasięg i długotrwałość lotu śmigłowca zależy od zapasu paliwa (masy paliwa w zbiornikach śmigłowca) oraz od zakresu lotu, tj. od prędkości lotu, wysokości lotu, obrotów wirnika nośnego oraz od warunków atmosferycznych.

Na zasięg lotu wpływa w dużej mierze prędkość i kierunek wiatru. Oprócz wpływu wymienionych parametrów i warunku, należy jeszcze podkreślić, że zasięg i długotrwałość lotu zależą też od masy śmigłowca. Im większa jest masa śmigłowca, tym moc niezbędna do lotu  $N_n$  musi być większa, a więc większe zużycie paliwa. Zatem zmieniać się będzie godzinowe i kilometrowe zużycie paliwa. Obliczenie zasięgu i długotrwałości lotu można przeprowadzić dla średniej masy śmigłowca:

$$m_{sr} = \frac{m_{pocz} + m_{końc}}{2} \quad (4.26)$$

Do obliczenia kilometrowego i godzinowego zużycia paliwa musimy mieć dane jednostkowe zużycie paliwa. Jest to ilość paliwa zużywanego do wytworzenia 1 wata mocy (lub kilowata mocy) w jednostce czasu, tj.  $\frac{kg}{Ws}$  lub  $\frac{kg}{kWh}$ .

Godzinowe zużycie paliwa określa ilość paliwa spalane go przez silnik w ciągu 1 godziny. Wzór na godzinowe zużycie paliwa jest następujący:

$$C_h = \frac{m_{pal}}{t}$$

Między jednostkowym a godzinowym zużyciem paliwa zachodzi związek:

$$C_h = C_e N \left[ \frac{kg}{h} \right] \quad (4.27)$$

Kilometrowe zużycie paliwa  $C_k$  określa się jako ilość paliwa zużywanego przez silnik w trakcie przelotu dystansu 1 km. Można je obliczyć ze wzoru:

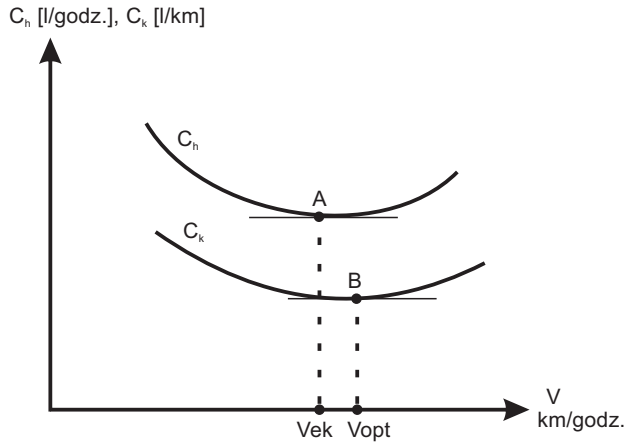
$$C_k = \frac{m_{pal}}{L} \left[ \frac{kg}{km} \right]$$

Między kilometrowym a jednostkowym zużyciem paliwa zachodzi związek:

$$C_k = \frac{C_h}{3,6Vt} = \frac{C_e}{3,6V} N \left[ \frac{kg}{km} \right] \quad (4.28)$$

W powyższych wzorach prędkość lotu  $V$  jest w  $\left[ \frac{m}{s} \right]$ .

Wykres  $C_h$  i  $C_k$  w funkcji prędkości lotu podano na rys. 4.7.



Rys. 4.7. Godzinowe i kilometrowe zużycie paliwa w funkcji prędkości lotu

Punkt  $A$  na tym wykresie odpowiada najmniejszemu godzinowemu zużyciu paliwa, zaś prędkość odpowiadająca  $C_{h\min}$  jest prędkością odpowiadającą największej długotrwałości lotu, równą w przybliżeniu  $V_{ek}$ .

Punkt  $B$  odpowiada najmniejszemu kilometrowemu zużyciu paliwa, a prędkość odpowiadająca  $C_{k\min}$  jest prędkością, przy której zasięg jest maksymalny. W przybliżeniu jest ona równa  $V_{opt}$ . Obliczenie  $C_{k\min}$  i  $C_{h\min}$  oraz  $L_{\max}$  i  $T_{\max}$  wykonujemy metodą jak dla samolotu z silnikiem turbośmigłowym lub tłokowym.

## 4.7. Ograniczenia maksymalnej prędkości śmigłowca

Podczas lotu poziomego kąt nastawienia łopaty wirnika nośnego jest funkcją okresową azymutu, którą możemy przedstawić w postaci:

$$\Theta = \Theta_0 - \Theta_1 \sin \Psi \quad (4.29)$$

Kąt nastawienia  $\Theta_0$  i amplituda  $\Theta_1$  są funkcjami przepływu  $\lambda$  oraz współczynnika prędkości  $\mu$ . Gdy łopata znajduje się w położeniu  $\Psi = 90^\circ$ , tj. gdy prędkość lotu  $V$  dodaje się do prędkości obwodowej  $WR$ , kąt  $\Theta$  jest minimalny, tj.

$$\Theta_{\min} = \Theta_0 - \Theta_1$$

Gdy  $\Psi = 270^\circ$ , tj. gdy względna prędkość elementu łopaty jest różnicą prędkości obwodowej i prędkości lotu, kąt nastawienia

$$\Theta_{\max} = \Theta_0 + \Theta_1$$

Wraz z prędkością lotu wyrażoną przez współczynnik prędkości  $\mu$  wzrasta kąt nastawienia łopaty, odpowiadający położeniu  $\psi = 270^\circ$ .

Kąt natarcia elementu łopaty w przekroju  $\bar{r}$  i dla  $\Psi$  przy założeniu stałej wartości  $v_p$ , można wyrazić jako:

$$\alpha_r = \Theta_0 - \Theta_1 \sin \psi - \frac{U}{\Omega \bar{r} + V \sin \psi} \quad (4.30)$$

Największe wartości kątów natarcia osiągają przekroje w położeniach zbliżonych do  $\psi = 270^\circ$ .

W tych obszarach tarczy wirnika, przy pewnej prędkości lotu, powstaje oderwanie na łopatach i obszar oderwania rozszerza się wraz ze wzrostem prędkości lotu. Zjawisko oderwania jest szkodliwe. Powoduje ono:

- 1) spadek sterowności śmigłowca,
- 2) silne i niebezpieczne drgania konstrukcji,
- 3) zwiększa opór profilowy, a przez to zwiększa zapotrzebowanie mocy.

Na rys. 4.8 pokazane jest zjawisko oderwania strumienia przy dwóch prędkościach lotu i przy dwóch liczbach obrotów wirnika.

Obszary oderwania przenoszą się ku środkowi wirnika przy zastosowaniu zwichrzenia łopat. Opóźniać oderwanie można przez zastosowanie profilów o dużym  $\alpha_{kr}$  oraz przez zwiększenie prędkości obwodowej.

Prędkość  $V_{max}$  może być ograniczona ze względu na zjawisko oderwania. W praktyce ustalono, że w locie poziomym, z prędkością zbliżoną do  $V_{max}$ , można dopuścić oderwanie około 15–20% powierzchni wirnika. Opóźnianie oderwania przez zwiększenie prędkości obwodowej jest ograniczone z powodu powstawania dodatkowego oporu wywołanego ściśnięciem powietrza.

Liczba Macha dla elementu łopaty w przekroju  $r$  i  $\Psi = 90^\circ$  jest równa:

$$M = \frac{\Omega r (1 + \mu)}{a} \quad (4.31)$$

Tę liczbę Macha należy porównać z  $M_{kr}$  dla profilu i współczynnika siły nośnej  $C_z$ . Zjawisko ściśnięcia powietrza powoduje wzrost oporu, a więc zapotrzebowanie mocy niezbędnej do lotu poziomego.

## LITERATURA DO CZĘŚCI I

- 1.1. Bailey J.: *A Simplified Theoretical Method of Determining the Characteristics of a Lifting Rotor In Forward Flight*. NACA Report No. 716, 1941.
- 1.2. Bramwell A.R.S., Done G., Balmford D.: *Bramwell's Helicopter Dynamics*, 2<sup>nd</sup> ed., Butterworth-Heinemann, Oxford 2001.
- 1.3. Bratuchin I.P.: *Projektowanie i konstrukcje śmigłowców*. Państwowe Wydawnictwa Techniczne, Warszawa 1958.
- 1.4. Gessow A., Myers G.: *Aerodynamics of the Helicopter*. Frederick Ungar Publishing Co., New York 1985.
- 1.5. Hirschberg M.J.: The American Helicopter, An Overview of Helicopter Developments in America 1908-1999, s. 6, 2000, <https://vtol.org/files/dmfile/the-american-helicopter.pdf>.
- 1.6. Juriew B.N.: *Aerodynamika śmigieł i śmigłowca*. Wyd. MON, Warszawa 1959.
- 1.7. Krzyżanowski A.: *Mechanika lotu śmigłowców*. Wyd. WAT, Warszawa 2010.
- 1.8. Leishman J.: *Principles of helicopter aerodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge 2000.
- 1.9. Padfield G.D.: *Dynamika lotu śmigłowców*. WKŁ, Warszawa 1998.
- 1.10. Payne P.R.: *Helicopter Dynamics and Aerodynamics*. Pitman, London 1959.
- 1.11. Seddon J., Newman S.: *Basic Helicopter Aerodynamics*, 2<sup>nd</sup> ed., Blackwell Science Ltd., Oxford 2002.
- 1.12. Sobiera W., Sibilski K.: *Pionowzloty – Ilustrowany Leksykon Lotniczy*. WKŁ, Warszawa 1992.
- 1.13. Stępniewski W.Z., Keys C.N.: *Rotary-Wing Aerodynamics*. Dover Publications, Inc., New York 1984.
- 1.14. Stępniewski W.Z.: *Basic Aerodynamics and Performance of the Helicopter*, w: *Helicopter Aerodynamics and Dynamics*. AGARD Lecture Series No. 63, London 1973.

- 1.15. Szabelski K., Jancelewicz B., Łucjanek W.: *Wstęp do konstrukcji śmigłowców*. WKŁ, Warszawa 1995.
- 1.16. Witkowski R.: *Śmigłowce mają 100 lat*. „Prace Instytutu Lotnictwa”, nr 3-4, 2008.
- 1.17. Witkowski R.: *Wprowadzenie do wiedzy o śmigłowcach*. Biblioteka Naukowa Instytutu Lotnictwa, Warszawa 2003.



# CZĘŚĆ II

## Dynamika lotu śmigłowca



## SPIS WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ W CZĘŚCI II

$A$	– pole powierzchni wirnika nośnego [m <sup>2</sup> ]
$A_1$	– kąt skoku cyklicznego sterowania poprzecznego
$a$	– pochodna współczynnika siły nośnej względem kąta natarcia
$a_0, a_1$	– współczynniki wahań łopaty wirnika nośnego względem płaszczyzny bez przekręceń
$a_{1w}$	– współczynnik wahań łopaty wirnika nośnego względem płaszczyzny konstrukcyjnej
$B$	– współczynnik strat końcowych
$B_1$	– kąt skoku cyklicznego sterowania podłużnego
$B_\beta$	– siła bezwładności [N]
$b_1$	– współczynnik wahań łopaty wirnika nośnego względem płaszczyzny bez przekręceń
$b_{1w}$	– współczynnik wahań łopaty względem płaszczyzny konstrukcyjnej wirnika nośnego
$C_{b,x,z}$	– współczynniki sił aerodynamicznych: bocznej, oporu i nośnej
$C_m$	– współczynnik momentu aerodynamicznego
$C_{ms}$	– współczynnik momentu pochylającego śmigłowca
$c$	– cięciwa profilu łopaty wirnika nośnego [m]
$c_o$	– cięciwa profilu łopaty wirnika nośnego przy nasadzie [m]
$d_0$	– współczynnik oporu kadłuba
$e$	– odległość osi przegubu poziomego łopaty od osi wału wirnika nośnego [m]
$e_a$	– odległość aerodynamicznie czynnej części łopaty wirnika nośnego od osi przegubu poziomego [m]
$f$	– współrzędna osi wału wirnika nośnego wzdłuż osi Ox [m]
$f_j$	– $j$ -ta częstość drgań [s <sup>-1</sup> ]
$f_1$	– współrzędna osi wału wirnika nośnego wzdłuż osi Oy [m]
$G$	– ciężar śmigłowca [N]

$g$	– przyspieszenie ziemskie [m/s <sup>2</sup> ]
$h$	– współrzędna piasty wirnika nośnego wzdłuż osi Oz
$h_c$	– współczynnik siły wzdłużnej wirnika nośnego
$I_{x,y,z}, I_{xz}, I_{xz'}, I_{yz}$	– składowa tensora bezwładności śmigłowca [kgm <sup>2</sup> ]
$i_{x,y,z}, i_{xz}, i_{xz'}, i_{yz}$	– bezwymiarowe składowe tensora bezwładności śmigłowca
$K_{x,y,z}$	– składowe wektora momentu ilości ruchu śmigłowca względem środka masy [Nms]
$k_{1,2}$	– współczynniki kąta ustawienia statecznika poziomego względem kadłuba
$L$	– składowa wzdłuż osi Ox wektora momentu M (moment przechylający śmigłowiec) [Nm]
$L_{a,b,w}$	– momenty przechylające śmigłowiec [Nm]
$M$	– składowa wzdłuż osi Oy wektora momentu M (moment pochylający śmigłowiec) [Nm]
$M_{o,b,w,s}$	– momenty pochylające śmigłowiec [Nm]
$M_{op}$	– moment oporowy wirnika nośnego
$M_2$	– moment aerodynamiczny działający na łopatę wirnika nośnego względem osi przegubu poziomego [Nm]
$m$	– masa łopaty wirnika nośnego [kg]
$m_p$	– masa śmigłowca [kg]
$m(b)$	– masa jednostki długości łopaty wirnika nośnego [kg/m]
$m_{op}$	– współczynnik momentu oporowego wirnika nośnego
$N$	– składowa wzdłuż osi Oz wektora momentu M (moment odchylający śmigłowiec) [Nm]
$N_{o,w}$	– momenty odchylające śmigłowiec [Nm]
$n$	– liczba łopat wirnika nośnego
$n$	– współczynnik przeciążenia
$n_0$	– współczynnik momentu $N_0$
$P$	– składowa wzdłuż osi Ox prędkości kątowej śmigłowca [s <sup>-1</sup> ]
$P_{x,z}$	– siły aerodynamiczne: oporu i nośna [N]
$p$	– przyrost (zaburzenie) prędkości kątowej przechylania $P$ [s <sup>-1</sup> ]
$Q$	– składowa wzdłuż osi Oy prędkości kątowej śmigłowca – prędkość kątowa pochylania $e$ [s <sup>-1</sup> ]
$q$	– przyrost (zaburzenie) prędkości kątowej pochylania $Q$ [s <sup>-1</sup> ]
$R_{wN}$	– promień wirnika nośnego [m]
$R$	– składowa wzdłuż osi Oz prędkości kątowej śmigłowca – prędkość odchylania [s <sup>-1</sup> ]
$r$	– przyrost (zaburzenie) prędkości kątowej $R$ [s <sup>-1</sup> ]
$S$	– powierzchnia odniesienia [m <sup>2</sup> ]
$S_2$	– moment statyczny łopaty wirnika nośnego względem osi przegubu poziomego [kgm]

$s_c$	– współczynnik siły bocznej wirnika nośnego
$T$	– ciąg wirnika nośnego [N]
$T^*$	– energia kinetyczna wahań łopaty w przegubie poziomym [Nm]
$T_j$	– okres drgań [s]
$T_{so}$	– ciąg śmigła ogonowego [N]
$t$	– czas [s]
$t_a$	– czas aerodynamiczny [s]
$t_c$	– współczynnik ciągu wirnika nośnego
$t_{so}$	– współczynnik ciągu śmigłowca ogonowego
$U$	– składowa wzdłuż osi $Ox$ prędkości lotu śmigłowca [m/s]
$u$	– przyrost (zaburzenie) $U$ [m/s]
$V$	– składowa wzdłuż osi $Oy$ prędkości lotu śmigłowca [m/s]
$V_0$	– moduł wypadkowej prędkości lotu i prędkości opływu śmigłowca [m/s]
$V_k$	– prędkość końców łopat wirnika nośnego w zawisie śmigłowca [m/s]
$V_{0,1}$	– składowe prędkości śmigłowca [m/s]
$v$	– przyrost (zaburzenie) $V$ [m/s]
$W$	– składowa wzdłuż osi $Oz$ prędkości lotu śmigłowca [m/s]
$W_{0,1}$	– składowe prędkości śmigłowca [m/s]
$w$	– przyrost (zaburzenie) $W$ [m/s]
$X$	– składowa siły wzdłuż osi $Ox$ [N]
$x$	– współrzędna wzdłuż osi $Ox$ [m]
$Y$	– składowa siły wzdłuż osi $Oy$ [N]
$y$	– współrzędna wzdłuż osi $Oy$ [m]
$Z$	– składowa siły wzdłuż osi $Oz$ [N]
$z$	– współrzędna wzdłuż osi $Oz$ [m]
$\alpha$	– kąt natarcia
$\beta$	– kąt wahań w przegubie poziomym łopatki wirnika nośnego
$\gamma$	– kąt toru lotu śmigłowca
$\gamma$	– stała masowa łopaty
$\eta$	– część urojona $\lambda$
$Q$	– kąt pochylenia śmigłowca
$\theta_0$	– kąt skoku ogólnego wirnika nośnego
$\theta_0$	– kąt ustawienia profilu łopaty przy nasadzie
$\theta_s$	– kąt skręcania łopaty wirnika nośnego
$q$	– przyrost (zaburzenie) $Q$
$\kappa_H$	– cechy objętościowe: statecznika poziomego
$\lambda$	– wartość własna macierzy stanu
$l$	– współczynnik przepływu wirnika nośnego
$\lambda_{i, io}$	– bezwymiarowe prędkości indukowane wirnika nośnego

$\mu_0$	– względna gęstość śmigłowca
$\xi$	– część rzeczywista wartości własnej $\lambda$
$\rho$	– gęstość powietrza [kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma$	– współczynnik wypełnienia wirnika nośnego
$f$	– kąt opływu profilu łopaty
$\Phi$	– kąt przechylenia śmigłowca
$\varphi$	– przyrost (zaburzenie) $\Phi$
$\psi$	– azymut łopaty wirnika nośnego
$\Psi$	– przyrost (zaburzenie) $\Psi$
$\Omega$	– prędkość kątowna wału wirnika nośnego [s <sup>-1</sup> ]

#### Macierze i wektory

<b>A, B, C, D, H, T</b>	– macierze transformacji
<b>A</b>	– macierz bezwładności
<b>B</b>	– macierz w sztywności
<b>F<sub>a</sub></b>	– wektor sił aerodynamicznych [N]
<b>F<sub>0</sub></b>	– wektor obciążeń aerodynamicznych od sterowania [N]
<b>G</b>	– wektor sił ciężkości
<b>I</b>	– macierz jednostkowa
<b>K</b>	– moment ilości ruchu względem środka ciężkości śmigłowca [Nms]
<b>M</b>	– moment sił aerodynamicznych [Nm]
<b>R</b>	– macierz stanu
<b>r<sub>0</sub>, r</b>	– promień wektor [m]
<b>V</b>	– prędkość lotu śmigłowca [m/s]
<b>V<sub>c,w</sub></b>	– wektory prędkości śmigłowca [m/s]
<b>V<sub>so</sub></b>	– prędkość piasty śmigła ogonowego [m/s]
<b>x</b>	– wektor stanu
<b><math>\dot{x}</math></b>	– pochodna wektora stanu względem czasu bezwymiarowego
<b><math>\Omega</math></b>	– wektor prędkości prędkość kątownej kadłuba śmigłowca
<b><math>\omega</math></b>	– wektor zaburzeń $\Omega$
<b>( )</b>	– wielkość bezwymiarowa
<b>(<math>\dot{\phantom{x}}</math>)</b>	– pochodna względem czasu
<b>(<math>\dot{\phantom{x}}\phantom{}</math>)</b>	– pochodna względem azymutu

#### Indeksy:

<i>a</i>	– wielkość związana z siłami aerodynamicznymi
<i>c</i>	– wielkość związana ze środkiem ciężkości śmigłowca
<i>g</i>	– wielkość związana z siłą ciężkości

$H$	– wielkość związana ze statecznikiem poziomym
$k$	– wielkość związana z kadłubem
$s, s_o$	– wielkość związana ze śmigłem ogonowym
$w, WN$	– wielkość związana z wirnikiem nośnym
$zaw$	– wielkość związana z zawisem śmigłowca



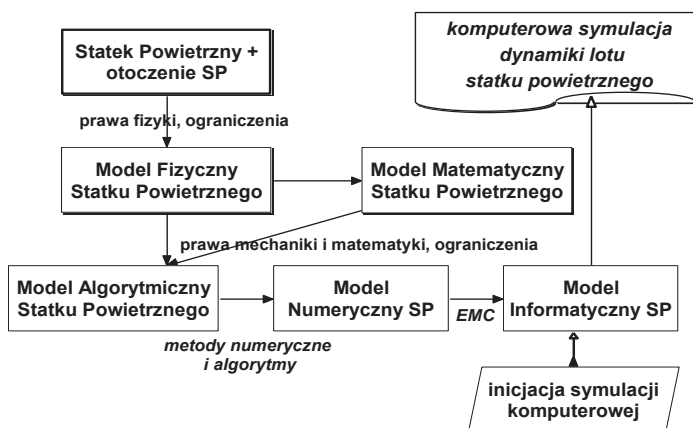


## RÓWNANIA RUCHU ŚMIGŁOWCA

### 5.1. Model fizyczny śmigłowca

Słowo „model” wywodzi się z łacińskiego słowa *modus*, co oznacza miarę, obraz, sposób. W technice, podobnie jak w naukach przyrodniczych słowa „model” używa się do oznaczenia tego, do czego dana teoria się odnosi i co opisuje. Można za W. Sztoffem przyjąć następującą definicję modelu: „za model rozumie się taki dający się pomyśleć lub materialnie zrealizować układ, który odzwierciedlając lub odtwarzając przedmiot badania, zdolny jest zastępować go tak, że jego badanie dostarcza nowej informacji o tym przedmiocie, a także pozwala na sprawdzenie informacji znanych” [2.75].

W sensie podanej definicji model może oznaczać urządzenie, na ogół zmniejszone, za pomocą którego można otrzymać informacje służące do otrzymania informacji o obiekcie rzeczywistym (np. pomniejszony w odpowiedniej skali model samolotu przeznaczony do badania w tunelu aerodynamicznym).



**Rys. 5.1.** Schemat funkcjonalny tworzenia, miejsce i wzajemne powiązania pomiędzy kolejnymi etapami modelowania statku powietrznego

Model może także oznaczać pojęcie służące do matematycznego opisu badanego zjawiska [2.76]. W tym sensie można mówić o modelu fizycznym i odpowiadającym mu modelu matematycznym. Modelowaniem fizycznym nazywa się czynność polegającą na wyodrębnieniu z rozważanego rzeczywistego zjawiska istotnych elementów, sprowadzającą się do: ustalenia celu modelowania, praw fizycznych rządzących modelowanym zjawiskiem jego cech jakościowych i ilościowych oraz charakterystyk sygnałów wejściowych (szersze ujęcie tego zagadnienia można znaleźć np. w książce Arczewskiego i Pietruchy „Mathematical modeling of complex mathematical systems” [2.1]).

Etap procesu modelowania polegający na stworzeniu sformalizowanego opisu modelu fizycznego nazywa się modelowaniem matematycznym. Model matematyczny powstaje w wyniku zastosowania praw fizyki, z uwzględnieniem istniejących ograniczeń do przyjętego modelu fizycznego. Model algorytmiczny powstaje w wyniku zastosowania matematycznego opisu praw fizyki do przyjętego modelu (np. statku powietrznego) i zawiera:

- równania ruchu,
- równania związków kinematycznych,
- równania opisujące pracę zespołu napędowego,
- równania praw sterowania,
- równania opisujące otoczenie (np. turbulencję atmosfery, uskok wiatru itp.).

Zazwyczaj wynikiem takiego działania jest układ równań różniczkowo-algebraicznych opisujących sterowany ruch statku powietrznego w atmosferze.

Sposób modelowania zależy od zagadnienia, które należy rozwiązać. I tak statek powietrzny może być modelowany jako:

- punkt materialny,
- ciało sztywne,
- układ połączonych ciał sztywnych,
- ciało odkształcalne lub układ połączonych ciał odkształcalnych itp.

W przypadku, gdy przedmiotem zainteresowania jest optymalizacja toru lotu samolotu pasażerskiego (np. [2.50]) lub modelowanie ruchu samolotu na symulatorach przeznaczonych do szkolenia nawigatorów naprowadzania [2.47], wystarczająco dokładnym modelem będzie punkt materialny (model tzw. uskrzydłonego punktu materialnego). Jeżeli przedmiotem rozważań są zagadnienia dynamiki lotu należy przyjmować bardziej złożone modele fizyczne. Można przy tym, za K. Ogatą stwierdzić: „(...) wyprowadzenie dogodnego modelu matematycznego obiektu jest – poza prostymi przypadkami – zagadnieniem trudnym i można tu popełnić błędy. Trudności w sformułowaniu modelu matematycznego powstają dlatego, ponieważ nowoczesne obiekty są w ogólnym przypadku bardzo złożone. W dodatku nie są dostępne wystarczające dane o właściwościach obiektu...” [2.59].

Z punktu widzenia dynamiki lotu, śmigłowiec w porównaniu z samolotem jest znacznie bardziej złożonym układem dynamicznym. Nawet przyjmując, że wszystkie elementy śmigłowca są nieskończenie sztywne, w modelu fizycznym należałoby uwzględnić nie tylko sześć stopni swobody opisujących postępowe i obrotowe ruchy kadłuba, ale także wszystkie stopnie swobody wynikające z przegubowego zamocowania łopat wirnika nośnego i śmigła ogonowego, przemieszczenia w układzie sterowania, wywołane niestacjonarnością obciążeń zewnętrznych, zmiany prędkości kątowych wałów napędowych wirnika nośnego i śmigła ogonowego itp. Poza przypadkiem zawisu ustalonego, w którym środek masy śmigłowca jest nieruchomy względem Ziemi i nie ma sterowania skokiem cyklicznym, w innych stanach lotu na łopatach wirnika nośnego będą występowały obciążenia zmienne w funkcji azymutu (czasu), co przejawia się w postaci zmiennych współczynników w równaniach ruchu śmigłowca. W chwili obecnej dostępne są pakiety programów komputerowych pozwalających na symulację ruchu obiektów latających traktowanych jako obiekty wieloczłonowe. Przykładem może być produkt firmy Advanced Rotorcraft Technology, Inc. pakiet FLIGHTLAB<sup>1</sup>. Także w literaturze ukazało się wiele prac stanowiących próby kompleksowego podejścia do dynamiki lotu śmigłowca traktowanego jako mechaniczny układ wieloczłonowy. Można tu wymienić klasyczne już prace Esaulowa [2.15] i Storma [2.73] lub nowsze prace Jankowskiego i Maryniaka [2.34] oraz Kowaleczki [2.40, 2.41]. Jednak w wielu praktycznych zastosowaniach złożone modele fizyczne śmigłowca można uprościć. Okazuje się bowiem, że złożony model obiektu nie zawsze jest niezbędny do prawidłowego opisu zachodzących procesów. Jest wiele prac, których autorzy, posługując się uproszczonymi modelami, uzyskiwali zadawalające rezultaty obliczeń. (np. prace Bramwella [2.8], Brawiermana i Vajnštuba [2.9], Johnsona [2.37], Padfielda [2.60], czy też Szumańskiego [2.77]). Należy jednak podkreślić, że istotną sprawą jest taki dobór założeń upraszczających, aby nie zmieniając charakteru ruchu, możliwie uprościć jego analizę.

Poza przypadkami szczególnymi, jak np. rezonans powietrzny, największa częstość zaburzonego ruchu śmigłowca jest znacznie mniejsza niż częstość ruchu łopaty wirnika w przegubach, co umożliwia traktowanie wirnika nośnego jako wirującego płata, który reaguje bez opóźnień na zmiany ruchu kadłuba. W konsekwencji umożliwia to traktowanie wirnika nośnego jako jednego elementu, bez konieczności analizy ruchu poszczególnych łopat. Zwykle duża bezwładność układu napędowego typowego śmigłowca oraz małe wahania momentu oporowego usprawiedliwiają założenie stałości prędkości kątowych wałów wirnika nośnego i śmigła ogonowego. Reasumując, w pracach poświęconych dynamice lotu i sterowaniu śmigłowców można przyjąć tzw. model sztywny zwany także samolotowym, który obejmuje następujące założenia:

<sup>1</sup> <https://www.flightlab.com/flightlab.html#flightlab-ov>

- a) śmigłowiec jest nieodkształcalny i ma pionową płaszczyznę symetrii;
- b) początek związanego z samolotem układu współrzędnych pokrywa się z jego środkiem masy lub z innym ściśle zdefiniowanym punktem (np. środkiem piasty wirnika nośnego);
- c) uwzględnione są momenty giroskopowe wirujących mas silników, wirnika nośnego i śmigła ogonowego;
- d) sterowanie lotem odbywa się przez zmianę położenia przestrzennego osi sterowania (płaszczyzny bez przekręceń) oraz zmianę ciągu wirnika nośnego i śmigła, ogólne zasady sterowania śmigłowcem zostały opisane w części pierwszej tej książki (podrozdział 2.2.2.);
- e) opływ śmigłowca jest quasi-stacjonarny (podejście takie stosowano nie tylko w pracach dotyczących analizy klasycznych zagadnień dynamiki lotu).

Bardzo często także przyjmuje się, że masa, momenty bezwładności i położenie środka masy śmigłowca są stałe. W niektórych zagadnieniach konieczne jest także uwzględnienie niestacjonarności opływu i innych zjawisk aerodynamicznych (np. takich jak efekt głębokiego przeciągnięcia dynamicznego czy też histereza współczynników aerodynamicznych).

Należy podkreślić, że w pracach poświęconych dynamice lotu śmigłowca przyjmowany jest zarówno model uproszczony „sztywny” lub „samolotowy”, jak też znacznie bardziej złożony model „indywidualnej łopaty”. Założenia modelu „samolotowego” są identyczne jak dla sztywnego samolotu (w założeniach tego modelu pomija się stopnie swobody wirnika nośnego). Wirnik nośny traktowany jest tu jako urządzenie generujące siłę nośną, siłę „ciągnącą” (odpowiednik siły ciągu śmigła samolotu), boczną siłę aerodynamiczną oraz momenty aerodynamiczne (w tym momenty sterujące). W modelu złożonym przyjmuje się, że śmigłowiec stanowi układ połączonych, nieskończenie sztywnych (lub odkształcalnych) ciał: kadłuba, łopat wirnika nośnego, elementów piasty (łączników pośrednich), łopat śmigła ogonowego itp. Zazwyczaj zakłada się, że:

- a) kadłub śmigłowca jest nieodkształcalny, jego masa i momenty bezwładności są stałe;
- b) łopaty wirnika nośnego są sztywne i są połączone z piastą za pomocą trzech przegubów (można w stosunkowo prosty sposób uwzględnić odkształcalność łopat);
- c) łopaty śmigła ogonowego są nieodkształcalne i są połączone z piastą przegubowo;
- d) w przegubach wirnika nośnego znajdują się elementy sprężyste i tłumiące;
- e) opływ łopat wirnika nośnego może być quasi-stacjonarny lub niestacjonarny. W modelu niestacjonarnym uwzględniany jest efekt głębokiego przeciągnięcia dynamicznego na profilu łopaty oraz histereza współczynników aerodynamicznych. Modele matematyczne opisujące te zjawiska aerodynamiki niestacjonarnej można opracować np. w oparciu o klasyczną teorię Theodor-

sena [2.80] lub nowsze modele opisujące zjawisko głębokiego przeciągnięcia dynamicznego (szeroki przegląd tych modeli można znaleźć np. w pracach: Johnsona [2.37], Mila [2.53], czy też Narkiewicza [2.57, 2.58]);

f) uwzględnione są momenty giroskopowe wirujących mas silników.

Na zakończenie ogólnych rozważań o modelowaniu dynamiki lotu dodajmy, że podczas badania granicznych stanów lotu niezbędne jest uwzględnienie reakcji zespołu napędowego na narastające obciążenia. Brak modelu opisującego dynamikę zespołu napędowego w algorytmach obliczeniowych może prowadzić do pojawienia się znacznych błędów (i to nie tylko ilościowych, lecz także jakościowych).

## 5.2. Układy współrzędnych

Najbardziej ogólny ruch obiektu w przestrzeni jest złożeniem przemieszczenia i obrotu. Ruch obiektu z unieruchomionym jednym punktem (np. środkiem masy) można przedstawić jako obrót wokół pewnej osi przechodzącej przez ten punkt. Zarówno przesunięcie, jak i obrót są transformacjami liniowymi i mogą być przedstawione za pomocą macierzy. Także położenie układu związanego z obiektem względem układu inercjalnego można przedstawić jako złożenie przesunięcia i obrotu odpowiednich układów współrzędnych. Istotne znaczenie ma sposób (kolejność), w jaki dokona się złożenia tego obrotu.

W analizie dynamiki ruchu statków powietrznych zazwyczaj stosowane są prostokątne i prawoskrętne układy współrzędnych. Definicje układów współrzędnych, zalecaną terminologię i oznaczenia, w odniesieniu do mechaniki lotu samolotów i szybowców określa Polska Norma PN-ISO 1151-1:2004, Dynamika lotu – Pojęcia, wielkości i symbole – Część 1: Ruch statku powietrznego względem powietrza. Układy stosowane do opisu dynamiki ruchu śmigłowca, a w szczególności łopat wirnika nośnego i śmigła ogonowego, nie są sprecyzowane normami.

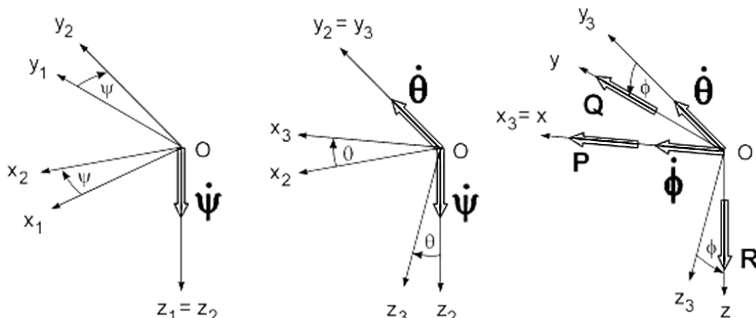
*Inercyjny układ współrzędnych  $O_x y z$ .* Początek tego układu znajduje się w dowolnym punkcie (może to być punkt leżący na płycie lotniska). Osie tego układu są równoległe do odpowiadających im osi grawitacyjnego układu współrzędnych.

*Grawitacyjny układ współrzędnych  $O_{x_g} y_{g_g} z_{g_g}$*  związany jest z kierunkiem działania przyspieszenia ziemskiego. Jego początek  $O$  znajduje się w wybranym punkcie leżącym wewnątrz konstrukcji śmigłowca (zazwyczaj jest to być środek masy śmigłowca). Oś  $Oz_{g_g}$  jest pionowa, jej kierunek i zwrot pokrywają się z kierunkiem i zwrotem przyspieszenia ziemskiego. Osie  $Ox_g$  i  $Oy_g$  leżą w płaszczyźnie poziomej (rys. 5.2 i 5.3).

*Układ współrzędnych związanych ze śmigłowcem  $Oxyz$*  jest związany z kadłubem śmigłowca. Początek  $O$  jest ten sam co układu  $O_{x_g} y_{g_g} z_{g_g}$ . Oś  $Ox$  leży w płaszczyźnie symetrii kadłuba, jest prostopadła do osi wału wirnika nośnego i jest skierowana „do przodu” (w stronę kabiny pilota). Oś  $Oz$  pokrywa się z osią wału wirnika i jest

skierowana „w dół”. Oś  $Oy$  dopełnia prawoskrętny, kartezjański układ. Położenia układu współrzędnych  $Oxyz$  względem układu grawitacyjnego  $Ox_g y_g z_g$  określają quasi-eulerowskie kąty obrotu (są to tzw. kąty Bryanta) –  $\Psi$ ,  $\Theta$ ,  $\Phi$ . Kolejność obrotów układów jest następująca (rys. 5.2):

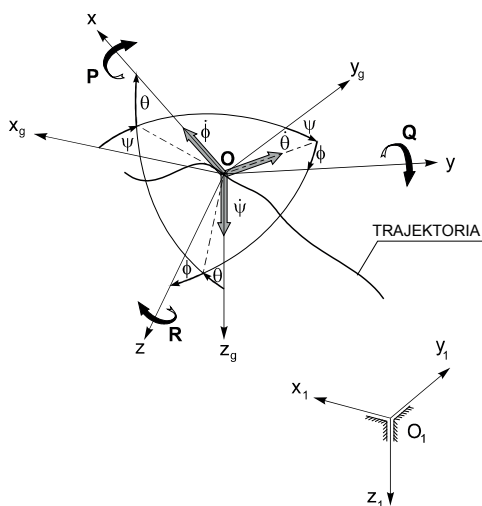
- I obrót – o kąt  $\Psi$  wokół osi  $Oz$  z prędkością kątową  $\dot{\Psi}$ ,
- II obrót – o kąt  $\Theta$  wokół osi  $Oy$  z prędkością kątową  $\dot{\Theta}$ ,
- III obrót – o kąt  $\Phi$  wokół osi  $Ox$  z prędkością kątową  $\dot{\Phi}$ .



**Rys. 5.2.** Kątowe położenie śmigłowca w przestrzeni, kolejność obrotów

Po wykonaniu kolejno trzech wyżej wymienionych obrotów współrzędne wektora  $v$  wyrażone w układzie inercyjnym transformują się do związanego ze śmigłowcem układu nieinercyjnego następująco:

$$\mathbf{x}_g = \mathbf{A}_1(\Psi) \mathbf{A}_2(\Theta) \mathbf{A}_3(\Phi) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}_G(\Psi, \Theta, \Phi) \cdot \mathbf{x} \quad (5.1)$$



**Rys. 5.3.** Definicja kątów Bryanta

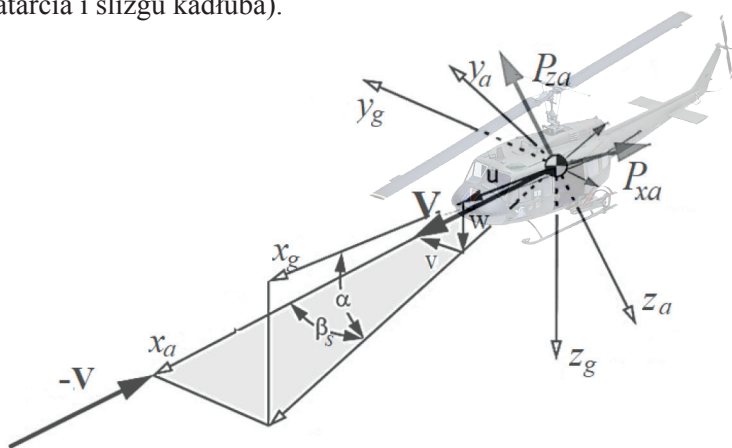
Między współrzędnymi w inercyjnym i grawitacyjnym układzie współrzędnych zachodzi związek:

$$\mathbf{x}_I = \mathbf{x}_I + \mathbf{x}_g \quad (5.2)$$

przy czym  $\mathbf{x}_g$  jest promieniem-wektorem łączącym początek inercyjnego układu współrzędnych z początkiem grawitacyjnego układu współrzędnych. Współrzędne wektora  $\mathbf{x}_I$  określają tor lotu śmigłowca. Macierze transformacji  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$ ,  $\mathbf{A}_3$  dane są zależnościami:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi & 0 \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & -\sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & \sin \Phi \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Układ współrzędnych związanych z opływem kadłuba śmigłowca  $Ox_a y_a z_a$  (rys. 5.4) związany jest z wektorem prędkości ustalonego lotu statku powietrznego. Początek  $O$  układu  $Ox_a y_a z_a$  pokrywa się z początkiem związanego układu współrzędnych. Kierunek i zwrot osi  $Ox_a$  są zgodne z kierunkiem i zwrotem wektora prędkości opływu statku powietrznego  $\mathbf{V}$ . Oś  $Oz_a$  leży w płaszczyźnie symetrii kadłuba, jest prostopadła do osi  $Ox_a$  i jest skierowana w kierunku podwozia. Kierunek wektora prędkości opływu statku powietrznego w stosunku do układu współrzędnych  $Oxyz$  związanego ze statkiem powietrznym określają kąty natarcia i ślizgu  $\alpha$  i  $\beta_s$  (są to kąty natarcia i ślizgu kadłuba).



Rys. 5.4. Układy współrzędnych związane z opływem kadłuba śmigłowca

Transformacja współrzędnych między układem  $Ox_g y_g z_g$  i  $Ox_a y_a z_a$  ma postać:

$$\mathbf{x}_g = \mathbf{A}_a \mathbf{x}_a \quad (5.4)$$



gdzie macierz transformacji  $\mathbf{A}_a$  ma postać:

$$\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} -\cos \beta \cos \alpha & \sin \beta \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ -\cos \beta \sin \alpha & -\sin \beta \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Układ współrzędnych wirnika nośnego  $Ox_{WN}y_{WN}z_{WN}$  (rys. 5.4) związany jest z głowicą wirnika nośnego. Początek  $O$  leży na przecięciu osi wału z płaszczyzną obrotu piasty. Płaszczyzna obrotu piasty jest prostopadła do osi wału i jest wybierana dowolnie, np. w zależności od sposobu zamocowania łopat do wału wirnika nośnego. Oś  $Oz_{WN}$  pokrywa się z osią wału i jest skierowana „w dół”, tj. w stronę podwozia. Oś  $Ox_{WN}$  leży w płaszczyźnie zewnętrznej symetrii kadłuba śmigłowca i jest skierowana „do przodu” (w stronę kabiny pilota). Oś  $Oy_{WN}$  dopełnia układ. Związek między współrzędnymi punktu w układach  $Oxyz$  oraz  $Ox_{WN}y_{WN}z_{WN}$  określony jest zależnością:

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{e}_0 + \mathbf{x}_g, \quad \mathbf{e}_0 = \text{col}[h_1, h_2, h_3] \quad (5.6)$$

przy czym:  $\mathbf{e}_0$  jest odległością punktu przecięcia płaszczyzny obrotu piasty z osią wału wirnika nośnego od przyjętego bieguna (przeważnie środka masy śmigłowca).

Układy współrzędnych głowicy wirnika nośnego  $Or_i s_i z_{WN}$  ( $i=1,2,...,n$ ;  $n$  – liczba łopat wirnika nośnego) są związane z głowicą wirnika. Układy współrzędnych  $Or_i s_i z_{WN}$  obracają się wokół osi  $Oz_{WN}$  z prędkością kątową wału wirnika nośnego  $\Omega$ . Jako dodatni kierunek obrotu wału przyjęto obrót zgodny z ruchem wskazówek zegara patrząc od strony osi  $Oz_{WN}$ . Osie  $Or_i$  pokrywają się z osią podłużną łącznika  $\mathbf{a}_i$  (rys. 5.4) Osie  $Os_i$  skierowane w stronę krawędzi spływu łopaty dopełniają układ. Położenie katowe  $i$ -tego układu współrzędnych względem układu śmigłowca określa kąt azymutu  $y_i = \omega t + y_0$ ,  $y_0 = 2\pi(n-1)/n$ . Związek między współrzędnymi punktu w układach  $Ox_{WN}y_{WN}z_{WN}$  i  $Or_i s_i z_{WN}$  ma postać:

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{D}(\psi_i) \mathbf{x}_{ei} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \cos \psi_i & \sin \psi_i & 0 \\ -\sin \psi_i & \cos \psi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Układy współrzędnych łopat wirnika nośnego (rys. 5.5). Łopata wirnika nośnego jest zamocowana do wału przy pomocy trzech przegubów umieszczonych w punktach  $PW$ ,  $PO$  i  $PP$  połączonych nieodkształcalnymi łącznikami, z których pierwszy, oznaczony  $\mathbf{a}$ , związany jest z wałem wirnika, następne, oznaczone  $\mathbf{e}$  i  $\mathbf{g}$ , są elementami pośrednimi między przegubami wahań i odchyłeń ( $\mathbf{e}$ ) oraz odchyłeń



i przekręceń ( $\mathbf{q}$ ) (rys. 5.4). Łopata jest zamocowana przegubowo do końca łącznika  $\mathbf{g}$ . W punkcie  $PW$  znajduje się przegub wahań, w punkcie  $PO$  jest umieszczony przegub odchylenia, zaś w punkcie  $PP$  znajduje się przegub przekręceń. Przeguby umożliwiają obrót następnego elementu względem poprzedniego wokół jednej z osi układu współrzędnych o początku w danym punkcie. W przegubach mogą znajdować się elementy sprężyste i tłumiące.

Macierze transformacji układów współrzędnych są zdefiniowane następująco:

- macierz  $\mathbf{B}(\beta)$  określa obrót wokół osi leżącej w płaszczyźnie  $PWt_{i\beta}$  równoległej do osi  $Os$  (wahania łopaty). Kąt obrotu jest dodatni, gdy łopata wychyla się „w górę”, tj. w stronę przeciwną do kabiny pilota.

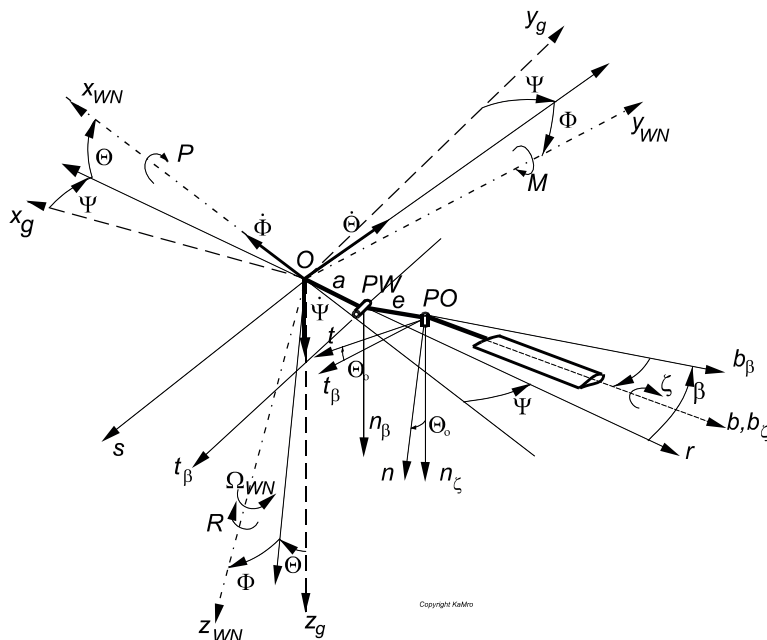
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

- macierz  $\mathbf{A}(\zeta)$  określa obrót wynikający z odchylenia łopat w płaszczyźnie obrotu piasty, a więc wokół osi prostopadłej do płaszczyzny  $PWt_b b_{\beta}$ , kąt odchylenia jest dodatni, gdy łopata przemieszcza się w kierunku przeciwnym do osi obrotu wału wirnika.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \zeta & -\sin \zeta & 0 \\ \sin \zeta & \cos \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

- macierz  $\mathbf{C}(\theta)$  określa obrót wynikający z przekręceń łopaty wokół osi podłużnej, a więc osi  $POb$ . Kąt przekręceń łopaty jest dodatni, gdy krawędź natarcia łopaty przemieszcza się „w górę”, tj. w kierunku dodatniej części osi  $POt$ . Do kąta  $\theta$  można dodać kąt sterowania skokiem wirnika nośnego  $q_w$  oraz kąty spowodowane sprzężeniami geometrycznymi wynikającymi z konstrukcji głowicy.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (5.10)$$



**Rys. 5.5.** Układy współrzędnych wirnika nośnego

W przegubach mogą być umieszczone: element sprężysty i tłumik o dowolnych charakterystykach. Uwzględniono możliwość sprzężenia kinematycznego obrotów w przegubach. Sprzężenie to ma postać:

$$Dq_k = -k\beta(\psi) \quad (5.11)$$

Do kąta obrotu  $\theta$  w przegubie przekręceń (jeśli przegub taki występuje w piaście wirnika) dodawany jest kąt sterowania skokiem łopaty  $\theta(t)$

$$\theta_w(t) = \theta_0 + \theta_1 \cos(\Omega t) + \theta_2 \sin(\Omega t) \quad (5.12)$$

Łopata może być modelowana jako ciało sztywne lub odkształcalna belka o prostoliniowej osi sprężystej, którą tworzą środki skręceń przekrojów. Łopata jest skręcona geometrycznie o kąt  $q_g(x)$  wokół osi sprężystej lub (gdy jest nieodkształcalna), wokół osi przekręceń. Wzdłuż łopaty może zmieniać się długość cięciwy oraz profil. Przemieszczenia łopaty (rys. 5.6) mogą wynikać z odkształceń sprężystych łopaty  $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{\phi}$  (odkształcalne stopnie swobody) oraz obrotów w przegubach głowicy  $\beta, \zeta, \theta$  (sztywne stopnie swobody). Odkształcenia sprężyste łopaty wirnika nośnego

$\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{\phi}$  są dyskretyzowane poprzez postacie odkształceń własnych spełniające odpowiednie warunki brzegowe:

$$\hat{v}(x, t) = \sum_{i=1}^{n_v} \eta_i(x) q_i(t) \quad \hat{w}(x, t) = \sum_{i=n_v+1}^{n_v+n_w} \eta_i(x) q_i(t) \quad \hat{\phi}(x, t) = \sum_{i=n_v+n_w+1}^{n_v+n_w+n_f} \eta_i(x) q_i(t)$$

gdzie:

$q_i(t)$  – współrzędne uogólnione odkształceń,

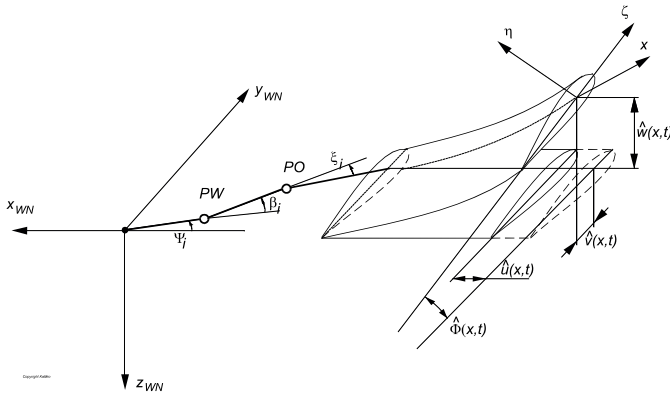
$\eta_i(x)$  – postacie odkształceń własnych,

$n_v, n_w, n_f$  – liczby postaci dla odkształceń w kierunku odchylenia, wahań i skręcenia.

Zakładając, że odkształcenia  $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{\phi}$  są małe, macierz transformacji wynikająca z uwzględnienia zjawisk sprężystych dana jest równaniem [2.70, 2.71]:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -\hat{v} \cos \theta_g + \hat{w} \sin \theta_g & -\hat{v} \sin \theta_g - \hat{w} \cos \theta_g \\ \hat{v} & \cos \theta_g - \hat{\phi} \sin \theta_g & \sin \theta_g + \hat{\phi} \cos \theta_g \\ \hat{w} & -\sin \theta_g - \hat{\phi} \cos \theta_g & \cos \theta_g - \hat{\phi} \sin \theta_g \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

*Układy współrzędnych śmigła ogonowego.* (Poniżej podano przykład układów współrzędnych dla dwułopatowego śmigła ogonowego z tzw. huśtawkowym mocowaniem do głowicy). Układy te przedstawiono na rys. 5.7. Azymut  $\psi$  łopaty śmigła jest mierzony między płaszczyzną montażową kadłuba i osią łącznika  $A_I$ – $A_{II}$  w kierunku obrotu wału śmigła. Dla  $\psi=0$  łopata znajdująca się bliżej kabiny pilota została oznaczona jako łopata numer I, a łopata przeciwna jako łopata numer II. Wyrażenia określające położenie łopaty II można otrzymać z tych samych zależności co dla łopaty I, przyjmując:  $\psi_{II} = \psi_I + \pi$ ,  $\beta_{II} = -\beta_I$ . Poniżej scharakteryzowano przyjęte układy współrzędnych (podane zależności dotyczą łopaty I). Do opisu dynamiki wirnika nośnego zastosowano następujące układy współrzędnych (rys. 5.6):



**Rys. 5.6.** Odkształcenia i przemieszczenia łopaty wirnika nośnego

Związany ze śmigłowcem układ  $O_s x_s y_s z_s$ . Początek  $O_s$  znajduje się w punkcie przecięcia osi obrotu wału napędowego śmigła z osią przegubu poziomego. Oś  $O_s z_s$  pokrywa się z osią wału i jest skierowana w stronę belki ogonowej. Oś  $O_s x_s$  jest równoległa do płaszczyzny montażowej kadłuba i skierowana w przód. Oś  $O_s y_s$  dopełnia układ. Układ  $O_R x_R y_R z_R$  jest związany z nieodkształconym wałem śmigła. Początek  $O_R$  znajduje się w punkcie  $O_s$ . Oś  $O_R z_R$  pokrywa się z osią  $O_s z_s$ . Układ  $O_R x_R y_R z_R$  jest obrócony względem układu  $O_s x_s y_s z_s$  wokół osi  $O_s z_s$  o kąty:

- azymutu  $y_s$  zgodnie z kierunkiem obrotu wału

$$y_s = W_s t \quad (5.14)$$

Macierz transformacji  $\mathbf{D}(y_s)$  ma postać:

$$\mathbf{D}(\psi_s) = \begin{bmatrix} \cos \psi_s & \sin \psi_s & 0 \\ -\sin \psi_s & \cos \psi_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

- kąt skosu  $d_3$  przegubu poziomego.

Macierz transformacji  $\mathbf{A}_R(d_3)$  ma postać:

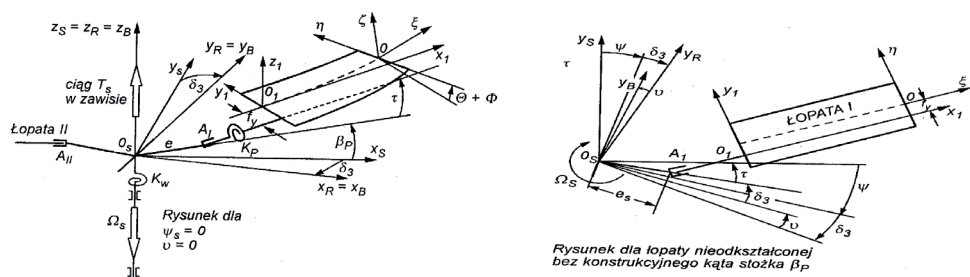
$$\mathbf{A}_R(\delta_3) = \begin{bmatrix} \cos \delta_3 & -\sin \delta_3 & 0 \\ \sin \delta_3 & \cos \delta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Transformację współrzędnych określa zależność:

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{D}(\psi) \mathbf{A}_R(d_3) \mathbf{x}_R. \quad (5.17)$$

Związany z osią przegubu poziomego po odkształceniu wału układ  $O_B x_B y_B z_B$ . Początek  $O_B$  znajduje się w punkcie  $O_R$ . Oś  $O_B z_B$  pokrywa się z osią  $O_R z_R$ . Oś  $O_B y_B$  pokrywa się z osią przegubu poziomego po odkształceniu skrętnym wału śmigła. Oś  $O_B x_B$  dopełnia układ. Układ  $O_B x_B y_B z_B$  jest obrócony względem układu  $O_R x_R y_R z_R$  wokół osi  $O_R z_R$  o kąt  $\nu$  odkształcenia wału; macierz transformacji  $\mathbf{A}_B(\nu)$  ma postać:

$$\mathbf{A}_B(\nu) = \begin{bmatrix} \cos \nu & \sin \nu & 0 \\ -\sin \nu & \cos \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$



Rys. 5.7. Układy współrzędnych śmigła ogonowego

Transformację współrzędnych określa zależność

$$\mathbf{x}_R = \mathbf{A}_B(\nu) \mathbf{B}(\beta) \mathbf{x} \quad (5.19)$$

Związany z nieodkształconą osią sprężystą układ  $O_x y_z$ . Początek  $O_l$  układu znajduje się w początku osi sprężystej przy nasadzie łopaty w pierwszym aerodynamicznie czynnym przekroju łopaty. Oś  $O_x$  pokrywa się z nieodkształconą osią sprężystą łopaty, zwrot w stronę końca łopaty. Oś  $O_y$  jest równoległa do cięciwy w początkowym przekroju łopaty i skierowana w stronę krawędzi spływu. Oś  $O_z$  dopełnia układ. Przejście z układu  $O_B x_B y_B z_B$  do układu  $O_x y_z$  składa się z:

- obrotu  $\beta$  w przegubie poziomym wokół osi  $O_B y_B$ ; macierz  $\mathbf{B}(\beta)$  transformacji dana jest równaniem (5.8);
- obrotu wokół nowej osi  $O_B z_B$  o kąt  $d_3$  przeciwnie do kąta skosu przegubu poziomego; macierz transformacji  $\mathbf{C}_1(d_3)$  ma postać:

$$\mathbf{C}_1(d_3) = \begin{bmatrix} \cos d_3 & \sin d_3 & 0 \\ -\sin d_3 & \cos d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

- przesunięcia o wektor  $\mathbf{e}$  do punktu  $A_l$ ;
- obrotu wokół osi  $O_c z_c$  o kąt  $\tau$  odchylenia przegubu osiowego; macierz transformacji  $\mathbf{C}_2(\tau)$  ma postać:

$$\mathbf{C}_2(\tau) = \begin{bmatrix} \cos \tau & -\sin \tau & 0 \\ \sin \tau & \cos \tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

- obrotu o kąt  $q_s$  w przegubie osiowym wokół osi przekręceń; kąt  $q_s$  składa się z kąta skoku ogólnego  $q_{so}$  oraz kąta  $D\theta = -k\beta$  przekręcania łopaty wynikającego ze sprzężenia z wahaniami; stąd kąt przekręceń I łopaty:

$$\theta_1 = q_{so} - kb \quad (5.22)$$

macierz transformacji  $\mathbf{G}(\theta_1)$  ma postać:

$$\mathbf{G}(\theta_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

- przesunięcia o wektor  $\mathbf{f}_y$ .

Transformacja współrzędnych ma postać:

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{B}(\beta)\mathbf{C}_1(d_3)[\mathbf{e} + \mathbf{C}_2(\tau)\mathbf{G}(q_{os})(\mathbf{f}_y + \mathbf{x}_l)]. \quad (5.24)$$

Układ  $Oxh\zeta$  jest związany z bieżącym przekrojem łopaty. Początek  $O$  układu znajduje się w punkcie leżącym na odkształconej osi sprężystej. Oś  $O\zeta$  jest styczna w tym punkcie do osi sprężystej i skierowana w stronę końca łopaty. Oś  $O\eta$  jest równoległa do cięciwy przekroju i skierowana w stronę krawędzi spływu. Oś  $O\zeta$  dopełnia układ.

Przejście od układu  $Ox_p y_p z_p$  do układu  $Oxh\zeta$  składa się z:

- przesunięcia o wektor  $\mathbf{x}_l + \mathbf{v}$ ,
- obrotów o kąty:
  - skręcenia geometrycznego  $q_g(\mathbf{x})$ ,
  - odkształcenia giętnego w płaszczyźnie obrotu  $\mathbf{v}'$ ,
  - odkształcenia giętnego w płaszczyźnie ciągu  $\mathbf{w}'$ ,
  - skręcenia  $\phi$  wokół osi sprężystej.

Macierz transformacji  $\mathbf{T}$  wynikająca z tych obrotów dana jest równaniem:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -v' \cos \theta_g + w' \sin \theta_g & -v' \sin \theta_g - w' \cos \theta_g \\ v' & \cos \theta_g - \phi \sin \theta_g & \sin \theta_g + \phi \cos \theta_g \\ w'' & -\sin \theta_g - \phi \cos \theta_g & \cos \theta_g - \phi \sin \theta_g \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Układ współrzędnych statecznika poziomego  $Ox_p y_p z_p$  związany jest z osią obrotu statecznika. Początek  $O_T$  leży na przecięciu osi obrotu statecznika z płaszczyzną symetrii kadłuba. Osie  $O_T x_T$  oraz  $O_T z_T$  związane są z cięciwą zerowej siły nośnej profilu statecznika. Kąt  $\alpha_T$  określa obrót cięciwy statecznika względem płaszczyzny równoległej do  $O_p x_p y_p$ . Macierz  $\mathbf{A}_{ST}$  obrotu statecznika o kąt nastawienia  $\alpha_T$  ma postać:

$$\mathbf{A}_{ST} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_T & 0 & \sin \alpha_T \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha_T & 0 & \cos \alpha_T \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Dla zerowego kąta  $a_T$  osie układu  $O_T x_T y_T z_T$  są równoległe do osi układu  $O_p x_p y_p z_p$ , zwroty zgodne. Związek między współrzędnymi w układach  $O_p x_p y_p z_p$  i  $O_T x_T y_T z_T$  ma postać:

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{e}_T + \mathbf{A}_T \mathbf{x}_T \quad (5.27)$$

Wektor położenia osi statecznika poziomego  $\mathbf{e}_T$  ma składowe:

$$\mathbf{e}_T = [e_{Tx}, 0, e_{Tz}] \quad (5.28)$$

### 5.3. Związki kinematyczne

Dynamiczne równania ruchu śmigłowca zazwyczaj wyprowadzane są w nieinercyjnym układzie współrzędnych związanym z obiektem (rys. 5.3). Dlatego też należy je uzupełnić równaniami związków kinematycznych wiążących wektor prędkości uogólnionych<sup>2</sup>  $\dot{\mathbf{r}} = [\dot{x}_G, \dot{y}_G, \dot{z}_G, \dot{\Phi}, \dot{\Theta}, \dot{\Psi}]^T$  i wektora quasi prędkości  $\mathbf{X} = [U, V, W, P, Q, R]^T$ . Równanie związków kinematycznych ma postać:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{X} \quad (5.29)$$

Macierz transformacji  $\mathbf{H}$  ma postać:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_G & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_T \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

przy czym  $\mathbf{0}$  jest macierzą zerową, a macierz transformacji  $\mathbf{C}_T$  dana jest zależnością:

$$\mathbf{C}_T = \begin{bmatrix} 1 & \sin \Phi \cdot \operatorname{tg} \Theta & \cos \Phi \cdot \operatorname{tg} \Theta \\ 0 & \cos \Phi & -\sin \Phi \\ 0 & \sin \Phi \cdot \sec \Theta & \cos \Phi \cdot \sec \Theta \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Macierz  $\mathbf{A}_G$  jest równa:

$$\mathbf{A}_G = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \quad (5.32)$$

Macierze transformacji  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$ ,  $\mathbf{A}_3$  dane są zależnościami (5.3).

<sup>2</sup> Śmigłowiec traktowany jako ciało nieodkształcalne ma w trójwymiarowej przestrzeni sześć stopni swobody. Zatem do jednoznacznego opisu jego przestrzennego położenia niezbędne są trzy współrzędne liniowe określające przestrzenne położenie środka masy i trzy współrzędne kątowe określające jego przestrzenną orientację. Współrzędnymi tymi mogą być klasyczne kąty Eulera lub kąty quasi-Eulerowskie (np. opisane powyżej kąty Bryanta).

Relacje pomiędzy prędkościami kątowymi będącymi pochodnymi względem czasu kątów Bryanta:  $[\dot{\Phi}, \dot{\Theta}, \dot{\Psi}]^T$  a quasi-prędkościami, czyli składowymi wektora prędkości kątowej śmigłowca na osie układu współrzędnych związanego ze śmigłowcem:  $[P, Q, R]^T$ , dane są zależnością:

$$\begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \Phi \cdot \operatorname{tg} \Theta & \cos \Phi \cdot \operatorname{tg} \Theta \\ 0 & \cos \Phi & -\sin \Phi \\ 0 & \sin \Phi \cdot \sec \Theta & \cos \Phi \cdot \sec \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

Symulacja numeryczna wielu przestrzennych manewrów wykonywanych przez niektóre typy śmigłowców (np. pętli, beczki, zwrotu bojowego itp.), ze związkami kinematycznymi zdefiniowanymi kątami Eulera (Bryanta), jest trudna do zrealizowania w okolicy kąta pochylenia  $\Theta=90^\circ$ . Istnienie punktów osobliwych zmusza do stosowania „chwytów” numerycznych pozwalających na ominięcie osobliwości (np. poprzez zmianę współrzędnych).

Jednak istnieje inna możliwość uniknięcia pojawiającej się osobliwości. Polega ona na wykorzystaniu parametrów Eulera–Rodriguesa do zapisu równań związków kinematycznych.

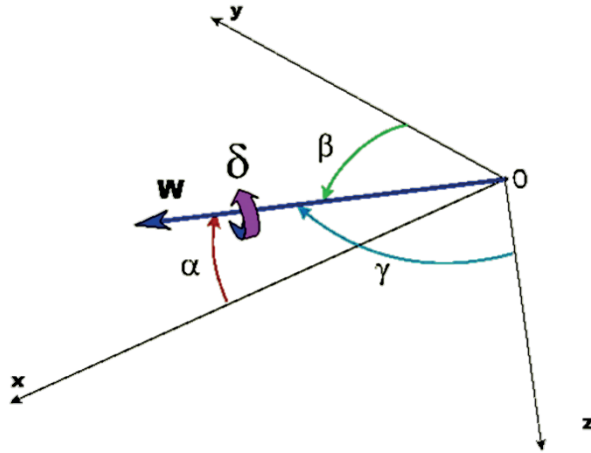
### 5.3.1. Parametry Eulera–Rodriguesa

Z twierdzenia Eulera wynika, że obiekt w trójwymiarowej przestrzeni można przeprowadzić z dowolnego położenia początkowego do danego położenia końcowego za pomocą jednego tylko obrotu względem odpowiednio dobranej osi. Zatem w celu zdefiniowania przestrzennej orientacji układu współrzędnych związanego z mikrosamolotem względem układu inercyjnego wystarczy podać trzy kosinusy kierunkowe osi obrotu i wartość kąta obrotu względem tej osi (rys. 5.8).

Szersze omówienie tej kwestii można znaleźć w źródłowych pracach Eulera [2.16, 2.17, 2.18, czy też 2.19]. Zdefiniowane w ten sposób cztery liczby nazywane są parametrami Eulera. Parametry Eulera mogą być zapisane w postaci kwaternionów. Kwaternionowy zapis parametrów Eulera po raz pierwszy został podany w 1840 r. przez Rodriguesa [2.67], stąd często są one nazywane kwaternionami Eulera–Rodriguesa.

Ponad sześćdziesiąt lat temu Robinson [2.66] szczegółowo omówił zalety kwaternionowego sformułowania Eulera–Rodriguesa nad klasycznymi kątami Eulera. Robinson większość swoich obserwacji poczynił na maszynach analogowych, ale wyciągnie przez niego wnioski są prawdziwe także w epoce maszyn cyfrowych. Natomiast sformułowania wykorzystujące kosinusy kierunkowe i kwaterniony choć wolne od tej osobliwości, łączą się z trudnościami z ich interpretacją fizyczną.





**Rys. 5.8.** Oś obrotu i kosinusy kierunkowe definiujące położenie przestrzenne bryły

Osobnym problemem są błędy związane z całkowaniem numerycznym związków kinematycznych. Problem ten został dobrze udokumentowany w wielu pracach [2.7, 2.20, 2.27, 2.28, 2.52, 2.55, 2.64, 2.71, 2.83]. Jak się wydaje najkorzystniejszą cechą sformułowania kwaternionowego w porównaniu ze sformulowaniem kątów Eulera jest zwiększenie prędkości obliczeń [2.25, 2.27, 2.28, 2.51]. Całkowanie numeryczne dziewięcioskładnikowego sformułowania za pomocą kosinusów kierunkowych jest niewątpliwie bardziej czasochłonne w porównaniu z czteroskładnikowym sformulowaniem za pomocą kwaternionów Eulera-Rodriguesa. Z drugiej strony funkcje trygonometryczne występujące w macierzy transformacji kątów Eulera (porównaj zależność 5.33) powodują, że czas obliczeń jest dłuższy w porównaniu z liniowym sformulowaniem kwaternionowym. Dlatego też wykorzystanie kwaternionów jest korzystne, zarówno ze względu na czas jak też i na dokładność obliczeń. Jednak mimo to, w wielu pakietach programów przeznaczonych do cyfrowej symulacji lotu wykorzystywane są zarówno kąty Eulera jak też kosinusy kierunkowe (np. [2.20, 2.22, 2.25, 2.28]). Czasami stosowane jest jedynie sformułowanie klasyczne – za pomocą kątów Eulera (np. [2.2, 2.61, 2.85]). Przypuszczalnie dzieje się tak ze względu na to, że część społeczności mechaników lotu uważa, że sformułowanie kwaternionowe jest w sensie fizycznym nieczytelne. Należy jednak podkreślić, że nawet ignorując osobliwości występujące w transformacjach kątów Eulera, kwaternionowe sformułowanie związków kinematycznych jest znacznie lepsze od klasycznego (za pomocą kątów Eulera lub kosinusów kierunkowych) ze względu na wydajność obliczeniową.

### 5.3.1.1. Sformułowanie związków kinematycznych za pomocą parametrów Eulera–Rodriguesa

Jeżeli poprzez  $\delta_E$  oznaczmy kąt obrotu własnego, zaś przez  $E_x$ ,  $E_y$ , i  $E_z$  – kartezjańskie składowe wektora jednostkowego skierowanego wzdłuż osi Eulera (lub Bryanta), wówczas można wprowadzić następujące parametry [2.7, 2.22, 2.52, 2.54, 2.55]:

$$\begin{cases} e_0 = \cos \frac{\delta_E}{2} & e_1 = E_x \sin \frac{\delta_E}{2} \\ e_2 = E_y \sin \frac{\delta_E}{2} & e_3 = E_z \sin \frac{\delta_E}{2} \end{cases} \quad (5.34)$$

Zdefiniowane powyżej cztery liczby są nazywane symetrycznymi parametrami Eulera–Rodriguesa lub kwaternionami skończonego obrotu.

Parametry Eulera–Rodriguesa muszą spełniać dodatkowe równanie wiążące:

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1 \quad (5.35)$$

Pochodne względem czasu kwaternionów Eulera–Rodriguesa spełniają następującą zależność [2.7, 2.22, 2.52, 2.54, 2.55]:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_0 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & P & Q & R \\ -P & 0 & -R & Q \\ -Q & R & 0 & -P \\ -R & -Q & P & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Układ równań różniczkowych (5.36) stanowi formułę związków kinematycznych, pozwalających na określenie przestrzennego położenia mikrosamolotu w funkcji czasu.

Związki kinematyczne określające położenie środka masy wiroplata dane są przy tym następującymi zależnościami:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_Q \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

gdzie:

$$\mathbf{A}_Q = \begin{bmatrix} e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 & 2(e_1 e_2 - e_0 e_3) & 2(e_0 e_2 + e_1 e_3) \\ 2(e_0 e_3 + e_1 e_2) & e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 & 2(e_2 e_3 - e_0 e_1) \\ 2(e_1 e_3 - e_0 e_2) & 2(e_0 e_1 + e_2 e_3) & e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2 \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

Podstawowym problemem obliczeniowym w modelu kwaternionowym jest spełnienie równania wiążącego (5.37). Aby spełnić to równanie, stosuje się tzw. poprawianie parametrów Eulera. Algorytm tego poprawiania można sformułować w następujący sposób [2.25]:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_0 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & P & Q & R \\ -P & 0 & -R & Q \\ -Q & R & 0 & -P \\ -R & -Q & P & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} - \iota \cdot \Lambda \cdot \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

gdzie:

$\iota$  – stały współczynnik (dobierany doświadczalnie)

$\Lambda$  – wskaźnik naruszenia równania wiążącego (w idealnym przypadku  $\Lambda=0$ ):

$$\Lambda = e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 - 1 \quad (5.40)$$

Jak już wspomniano, zastosowanie parametrów Eulera powoduje pewną trudność w ich interpretacji fizycznej, gdyż są one związane z orientacją osi obrotu, a nie z orientacją samego statku powietrznego. Dlatego też, dla właściwej interpretacji wyników obliczeń można zastosować transformację tych parametrów na kąty Eulera, które są naturalnymi współrzędnymi określającymi położenie statku powietrznego w przestrzeni. Można tego dokonać za pomocą następujących związków [2.7, 2.22, 2.52, 2.54, 2.55]:

$$\Phi = \arctan \left[ \frac{2(e_0 e_1 + e_2 e_3)}{e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2} \right], \Theta = \arcsin(2e_0 e_2 - e_1 e_3), \Psi = \arctan \left[ \frac{2(e_0 e_3 + e_1 e_2)}{e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2} \right] \quad (5.41)$$

Testowe obliczenia wykazują, że w długotrwałych symulacjach numerycznych sterowanego lotu wiroplątów celowe jest zastosowanie parametrów Eulera. Jednakowoż związki kinematyczne opisane z pomocą parametrów Eulera prowadzą do mniej zrozumiałych postaci wektorów własnych. Trudno jest w oparciu o nie przeprowadzić interpretację fizyczną. Dlatego też, mimo wad opisu za pomocą kątów Eulera (występowanie punktów osobliwych), modele zbudowane w oparciu o nie lepiej nadają się do analizy modalnej. Parametry Eulera są natomiast dogodniejsze w budowie modeli matematycznych stosowanych w algorytmach przeznaczonych do długotrwałej symulacji manewrowego lotu (zwłaszcza na stacjach roboczych lub superkomputerach). Unika się wówczas osobliwości występujących przy określeniu orientacji przestrzennej statku powietrznego za pomocą kątów Eulera.

## 5.4. Równania ruchu śmigłowca

Śmigłowiec jest wieloczłonowym układem dynamicznym. Wyprowadzenie równań ruchu układu dynamicznego o wielu stopniach swobody i skomplikowanej geometrii jest zagadnieniem trudnym i pracochłonnym. Znane są przynajmniej dwie grupy metod wyprowadzania równań ruchu takich układów [2.26]:

- na zasadach mechaniki ogólnej,
- na zasadach mechaniki analitycznej.

W grupie metod wykorzystujących zasady mechaniki ogólnej wyróżnić można przynajmniej dwa podejścia wyprowadzenia równań ruchu:

- Pierwsze z nich polega na wykorzystaniu zasady zmiany pędu i krętu oddzielnie dla wszystkich brył, na które został podzielony statek powietrzny (np. kadłub śmigłowca, piasta i łopaty wirnika nośnego, piasta i łopaty śmigła ogonowego). Otrzymuje się w ten sposób więcej równań od liczby stopni swobody badanego układu. Wyprowadzone w ten sposób równania zawierają reakcje wewnętrzne, które nie zawsze są interesujące w rozwiązaniu problemu;
- Drugie podejście polega na zastosowaniu zasady zmiany pędu i krętu dla statku powietrznego traktowanego jako integralna całość (ciało nieodkształcalne). Można przy tym zasadę zmiany krętu zastosować względem dowolnie wybranego bieguna (niekoniecznie w stosunku do środka masy).

W grupie metod mechaniki analitycznej wyróżnić można także przynajmniej dwa podejścia wyprowadzenia równań ruchu złożonych układów dynamicznych:

- Podejście opierające się na wykorzystaniu współrzędnych uogólnionych inercyjnych i odwołujące się wprost do zastosowania zasady Hamiltona lub równań Lagrange’a. Pojawia się tu pewna niedogodność, gdyż uogólnione siły aerodynamiczne są zazwyczaj określane jako funkcje quasi-prędkości. Konieczne jest zatem ciągle dokonywanie transformacji prędkości uogólnionych do quasi-prędkości. Jest to niewątpliwie słaby punkt tego podejścia. Jego zaletą jest unikanie osobliwości, które pojawiają się w równaniach związków kinematycznych w pewnych warunkach lotu;
- Podejście polegające na zastosowaniu równań mechaniki analitycznej w quasi-współrzędnych (np. równań Boltzmanna–Hamela, Apela–Gibsa czy Keyna). Równania ruchu układów mechanicznych zapisane w quasi-współrzędnych i quasi-prędkościach są z reguły bardziej złożone. I tak w przypadku stosowania równań Boltzmanna–Hamela pojawia się konieczność wyznaczania trójwskaznikowych symboli Boltzmanna. Metody analityczne wymagają dwukrotnego różniczkowania energii kinetycznej. Daje to dużą liczbę składników równań. Wzrasta prawdopodobieństwo popełnienia błędu oraz pojawiają się trudności z weryfikacją poprawności otrzymanych równań (tracony jest sens fizyczny dokonywanych przekształceń). Zaletą metod analitycznych jest to, że w oparciu o nie można stworzyć algorytmy automatycznej generacji równań ruchu na maszynach cyfrowych.

### 5.4.1. Wektorowa metoda wyprowadzenia równań ruchu

Pierwszy sposób wyprowadzenia równań ruchu statku powietrznego polega na zastosowaniu zasady zmiany pędu i krętu oddzielnie dla wszystkich brył, na które został podzielony statek powietrzny. Podejście to zastosowano do wyprowadzenia równań ruchu śmigłowca (traktowanego jako układ dynamiczny złożony z nieodkształcalnego kadłuba i przegubowego wirnika nośnego) m.in. w pracach [2.15, 2.40, 2.41, 2.73], zaś np. w pracy [2.39] do wyprowadzenia równań ruchu odkształcalnego samolotu.

Pierwszym krokiem wyprowadzenia równań jest podział statku powietrznego na elementy. I tak, w przypadku modelowania dynamiki lotu śmigłowców zazwyczaj przyjmuje się, że kadłub jest bryłą poruszającą się ruchem przestrzennym, natomiast wirnik nośny jest modelowany układem wirujących ciał składających się z nieodkształcalnych łopat połączonych z kadłubem za pomocą przegubowej piasty, której elementy są także nieodkształcalne.

Dynamiczne równania ruchu śmigłowca traktowanego jako układ mechaniczny składający się ze sztywnego kadłuba oraz przegubowego wirnika nośnego, wyprowadzone w oparciu o ogólne zasady mechaniki, zapisane wektorowo mają postać:

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \sum_{i=1}^n \left[ \int_{PO}^R \mathbf{A} dm + \int_{PW}^{PO} \mathbf{A}' dm \right] + \iiint_{V_{piasty}} \mathbf{A}'' dm = \mathbf{F} + \mathbf{S} \quad (5.42)$$

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^n \left[ \int_{PO}^R \mathbf{q}^* dr + \int_{PW}^{PO} \mathbf{q}' dl' \right] + \mathbf{F}_V \quad (5.43)$$

gdzie:

$dm$  – masa elementu łopaty wirnika nośnego,

$\mathbf{A}$  – wektor całkowitego przyspieszenia elementu łopaty wirnika nośnego,

$\mathbf{A}'$  – wektor całkowitego przyspieszenia elementu łącznika piasty

$\mathbf{A}''$  – wektor całkowitego przyspieszenia elementu korpusu piasty,

$\mathbf{q}^*$  – bieżące obciążenie zewnętrzne elementu łopaty wirnika nośnego,

$\mathbf{q}'$  – bieżące obciążenie zewnętrzne łącznika piasty,

$dr$  – długość elementu łopaty wirnika nośnego,

$dl'$  – długość elementu łącznika piasty,

$\mathbf{F}_V$  – wypadkowy wektor sił zewnętrznych działających na piastę wirnika nośnego,

$n$  – liczba łopat wirnika nośnego,

$\mathbf{F}$  – wypadkowy wektor sił działających na kadłub śmigłowca. Ruch kulisty śmigłowca wraz z łopatami wirnika nośnego względem jego środka masy opisany jest równaniem [2.15, 2.40, 2.41]:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} + \sum_{i=1}^n \left[ \int_{PO}^R (\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{A}) dm + \int_{PW}^{PO} (\boldsymbol{\rho}' \times \mathbf{A}') dm \right] + \iiint_{V_{\text{piasty}}} (\boldsymbol{\rho}'' \times \mathbf{A}'') dm = \mathbf{M} + \mathbf{M}_W \quad (5.44)$$

gdzie:

$$\mathbf{M}_W = \sum_{i=1}^n \left[ \int_{PO}^R (\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{q}) dr + \int_{PW}^{PO} (\boldsymbol{\rho}' \times \mathbf{q}') de \right] + \iiint_{V_{\text{piasty}}} (\boldsymbol{\rho}'' \times d\mathbf{F}_V) \quad (5.45)$$

$\mathbf{M}_W$  jest głównym wektorem momentu pochodzącego od sił zewnętrznych, działających na wirnik nośny, liczonym względem środka masy kadłuba, ponadto:

$\mathbf{K}$  – wektor krętu kadłuba śmigłowca,

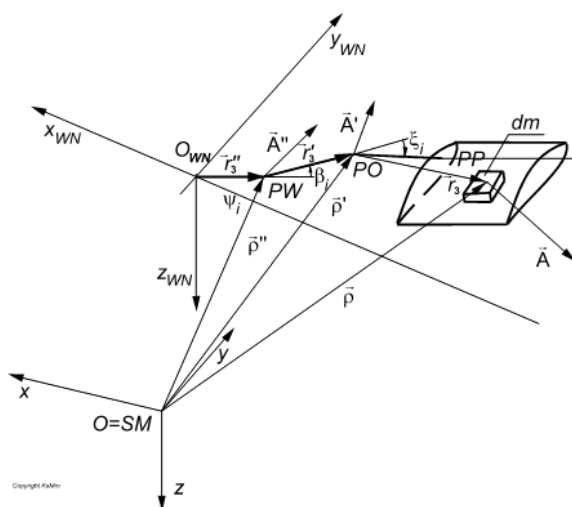
$\mathbf{M}$  – wektor momentu wszystkich sił zewnętrznych działających na kadłub śmigłowca względem jego środka masy,

$\mathbf{M}_W$  – moment reakcji wirnika nośnego na kadłub śmigłowca,

$\boldsymbol{\rho}$  – promień wektor łączący środek masy śmigłowca (początek układu współrzędnych) z bieżącym przekrojem łopaty wirnika nośnego,

$\boldsymbol{\rho}'$  – promień wektor łączący początek układu współrzędnych z bieżącym przekrojem łącznika pośredniego piasty wirnika nośnego,

$\boldsymbol{\rho}''$  – promień wektor łączący środek masy śmigłowca z elementem korpusu piasty wirnika nośnego.



Rys. 5.9. Położenie punktów, promieni – wektorów i wektorów przyspieszeń na wirniku nośnym śmigłowca

Równania ruchu łopat wirnika nośnego śmigłowca względem środka piasty mają postać [2.15, 2.40, 2.41, 2.71]:

$$\sum_{i=1}^n \left[ \int_{PO}^R (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{A}) dm + \int_{PW}^{PO} (\mathbf{r}'_3 \times \mathbf{A}') dm \right] + \iiint_{V_{piasty}} \mathbf{r}_3'' \times \mathbf{A}'' dm = \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_{RK} \quad (5.46)$$

gdzie:

$$\mathbf{M}_0 = \sum_{i=1}^n \left[ \int_{PO}^R (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{q}) dr + \int_{PW}^{PO} (\mathbf{r}'_3 \times \mathbf{q}') de \right] + \iiint_{V_{piasty}} (\mathbf{r}_3'' \times d\mathbf{F}_V) \quad (5.47)$$

$\mathbf{M}_0$  jest wektorem momentu sił zewnętrznych działających na wirnik nośny śmigłowca, ponadto:

$\mathbf{M}_{RK}$  – moment reakcji kadłuba na wirnik nośny śmigłowca,

$\mathbf{r}_3$  – promień wektor łączący środek piasty z bieżącym przekrojem łopaty wirnika nośnego,

$\mathbf{r}'_3$  – promień wektor łączący środek piasty z bieżącym przekrojem łącznika pośredniego,

$\mathbf{r}_3''$  – promień wektor łączący środek piasty wirnika nośnego z elementem korpusu.

Pochodne prędkości i krętu w równaniach (5.44) i (5.46) są wyznaczone w nieinercyjnym układzie współrzędnych i są równe:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\delta\mathbf{V}}{\delta t} + \boldsymbol{\Omega}_K \times \mathbf{V} \\ \frac{d\mathbf{K}}{dt} = \frac{\delta\mathbf{K}}{\delta t} + \boldsymbol{\Omega}_K \times \mathbf{K} \end{cases} \quad (5.48)$$

Po rzutowaniu wektorów występujących w równaniach (5.42), (5.44) i (5.46) na osie układu współrzędnych związanego ze śmigłowcem oraz na osie układów współrzędnych związanych z odpowiednimi przegubami otrzymuje się, po dokonaniu przekształceń, układ równań różniczkowych zwyczajnych opisujących ruch kadłuba śmigłowca wraz z przegubowo zamocowanymi łopatami wirnika nośnego. Układ ten można zapisać w postaci macierzowej:

$$\mathbf{B}_B \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_B(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{x}) \quad (5.49)$$

Przy czym wektor stanu  $\mathbf{x}$  ma następującą postać:

$$\mathbf{x} = \left[ U, V, W, P, Q, R, \Omega, \dot{\beta}_1, \dots, \dot{\beta}_n, \dot{\zeta}_1, \dots, \dot{\zeta}_n, \Psi, \beta_1, \dots, \beta_n, \zeta_1, \dots, \zeta_n \right]^T \quad (5.50)$$

Elementy macierzy  $\mathbf{B}_B$  i  $\mathbf{C}_B$  podano np. w pracach [2.15, 2.40, 2.41, 2.71, 2.73].

$\mathbf{II}(\mathbf{x})$  jest wektorem uogólnionych obciążeń aerodynamicznych śmigłowca. Algoritmy wyznaczania obciążeń aerodynamicznych zostały podane w rozdziale 7.

Model śmigłowca zdefiniowany układem nieliniowych zwyczajnych równań różniczkowych (5.49) należy uzupełnić równaniami elementów sprężystych oraz tłumiących, które mogą znajdować się w przegubach wirnika nośnego. Dla liniowego modelu tłumienia i sprężystości w przegubie wahań otrzymuje się związek [2.8, 2.57, 2.63, 2.71]:

$$M_{0_{PW}} = -k_H \beta - c_H \dot{\beta} \quad (5.51)$$

Podobnie dla przegubu odchylenia, przy założeniu liniowego modelu tłumienia i sprężystości otrzymuje się związek [2.8, 2.57, 2.63, 2.71]:

$$M_{0_{PO}} = -k_V \zeta - c_V \dot{\zeta} \quad (5.52)$$

Równania ruchu śmigłowca (5.50) należy uzupełnić zależnościami związków kinematycznych.

Dynamiczne równania śmigłowca traktowanego jako ciało nieodkształcalne (tzw. model samolotowy śmigłowca) można wyprowadzić, stosując zasady zmiany pędu i krętu dla śmigłowca traktowanego jako integralna całość. W takim przypadku wirnik nośny traktuje się jako urządzenie wytwarzające siłę nośną, siłę napędową oraz momenty sterujące śmigłowcem. Można przy tym zasadę zmiany krętu zastosować względem dowolnie wybranego bieguna (niekoniecznie w stosunku do środka masy). Jeżeli biegunem będzie punkt  $A$  (pokrywający się np. ze środkiem piast wirnika nośnego, wówczas równania te przyjmą postać:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_a + \mathbf{G} + \mathbf{T} \\ \frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M}_A + \mathbf{r}_A \times \mathbf{G} + \mathbf{M}_A^T \end{cases} \quad (5.53)$$

gdzie wektory pędu  $\mathbf{P}$  i krętu  $\mathbf{K}$  dane są zależnościami.

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= m(\mathbf{V}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_A) \\ \mathbf{K} &= \mathbf{J}_A \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{r}_A \times \mathbf{V}_A \end{aligned} \quad (5.54)$$

W układzie współrzędnych  $Oxyz$  tensor bezwładności ma składowe:

$$\mathbf{J}_A = \begin{bmatrix} J_X & -J_{XY} & -J_{XZ} \\ -J_{XY} & J_Y & -J_{YZ} \\ -J_{XZ} & -J_{YZ} & J_Z \end{bmatrix} \quad (5.55)$$



Wektor siły ciężkości w grawitacyjnym układzie współrzędnych  $Ox_g y_g z_g$  ma składowe:

$$\mathbf{G}^{(g)} = [0, 0, mg]^T \quad (5.56)$$

Wektor siły ciężkości śmigłowca  $\mathbf{G}$  w samolotowym układzie współrzędnych  $Oxyz$  ma natomiast składowe:

$$\mathbf{G} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{G}^{(g)} = \begin{bmatrix} -mg \sin \Theta \\ mg \cos \Theta \sin \Phi \\ mg \cos \Theta \cos \Phi \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

Sposób wyznaczania obciążeń aerodynamicznych śmigłowca zostanie przedstawiony w rozdziale 7.

Układy równań (5.53) dogodnie jest zapisać w formie równania macierzowego:

$$\mathbf{B}_B \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{P} \mathbf{B}_B \mathbf{x} = \mathbf{Q} \quad (5.58)$$

gdzie:

– wektor stanu:

$$\mathbf{x} = [U, V, W, P, Q, R]^T \quad (5.59)$$

– macierz bezwładności:

$$\mathbf{B}_B = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & S_z & -S_y \\ 0 & m & 0 & -S_z & 0 & S_x \\ 0 & 0 & m & S_y & -S_x & 0 \\ 0 & -S_z & S_y & J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ S_z & 0 & -S_x & -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -S_y & S_x & 0 & -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

– pomocnicza macierz prędkości dana jest zależnością:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & -R & Q & 0 & 0 & 0 \\ R & 0 & -P & 0 & 0 & 0 \\ -Q & P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -W & V & 0 & -R & Q \\ W & 0 & -U & R & 0 & -P \\ -V & U & 0 & -Q & P & 0 \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

– wektor sił zewnętrznych wynosi:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_a + \mathbf{G} + \mathbf{T} \\ \mathbf{M}_A + \mathbf{R}_A \times \mathbf{G} + \mathbf{M}_A^T \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

Bardzo często początek układu współrzędnych pokrywa się ze środkiem masy śmigłowca. W takim przypadku momenty statyczne oraz momenty dewiacji  $J_{xy}$  i  $J_{yz}$  są równe zero ( $S_x = S_y = S_z = J_{xy} = J_{yz} = 0$ ).

#### 5.4.2. Wyprowadzenie dynamicznych równań ruchu śmigłowca w oparciu o zasady mechaniki analitycznej

W grupie metod mechaniki analitycznej wyróżnić można dwa podejścia do wyprowadzenia równań ruchu. Pierwsze z nich opiera się na wykorzystaniu współrzędnych uogólnionych inercyjnych i odwołuje się wprost do zastosowania zasady Hamiltona lub równań Lagrange’a. Ze względu na to, że uogólnione siły aerodynamiczne są zazwyczaj określane jako funkcje quasi-prędkości, konieczne jest ciągle dokonywanie transformacji prędkości uogólnionych do quasi-prędkości. Jest to niewątpliwie słaby punkt tego podejścia. Jego zaletą jest unikanie osobliwości, które pojawiają się w równaniach związków kinematycznych w pewnych warunkach lotu.

##### 5.4.2.1. Wyprowadzenie równań ruchu z wykorzystaniem zasady Hamiltona

Równania ruchu układu śmigłowiec – wirnik nośny – śmigło ogonowe można wyprowadzić z wykorzystaniem zasady Hamiltona [2.29, 2.30, 2.62]. Minimalizując funkcjonal Hamiltona:

$$\mathbf{S} = \int_{t_1}^{t_2} (T^* - U_B + W_N) dt \quad (5.63)$$

Wyodrębniono operatory obciążeń:

$$- \text{ masowych: } Q_M = - \int_{t_1}^{t_2} (\delta T^*) dt \quad (5.64)$$

$$- \text{ sprężystych: } Q_E = \int_{t_1}^{t_2} (\delta U_e) dt \quad (5.65)$$

$$- \text{ niepotencjalnych: } Q_N = \int_{t_1}^{t_2} (\delta W_N) dt \quad (5.66)$$

Przemieszczenia układu wynikają z:

- przesunięć  $\mathbf{p}=[p_i]$ ,  $i=1, \dots, n_s$  – liczba „sztywnych” stopni swobody układu,
- odkształceń  $\mathbf{s}=[s_j]$ ,  $j=1, \dots, n_o$  – liczba przyjętych odkształceń.

Obciążenia od sił niepotencjalnych można rozdzielić na składniki odpowiadające przesunięciom  $\mathbf{p}$  i odkształceniom  $\mathbf{s}$ :

$$Q_N = \int_{t_1}^{t_2} (\delta W_N) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{i=1}^{n_o} (Q_{pi} \delta p_i) + \sum_{i=1}^{n_s} (Q_{si} \delta s_i) \right] dt \quad (5.67)$$

Energia kinetyczna  $T^*(t, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}, \mathbf{s}, \mathbf{s}', \dot{\mathbf{s}}, \dot{\mathbf{s}}')$  oraz praca sił niepotencjalnych  $W_N(t, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}, \mathbf{s}, \mathbf{s}', \dot{\mathbf{s}}, \dot{\mathbf{s}}')$  są funkcjami czasu  $t$ , przemieszczeń  $\mathbf{p}$  i  $\mathbf{s}$  oraz ich pochodnych względem czasu  $(\dot{\mathbf{p}}, \dot{\mathbf{s}})$ , pochodnych przestrzennych  $\mathbf{s}'$  oraz pochodnych mieszanych  $\mathbf{s}''$ . Energia potencjalna odkształceń  $U_e(\mathbf{p}, \mathbf{s}, \mathbf{s}', \mathbf{s}'')$  jest funkcją przemieszczeń  $\mathbf{p}$  i  $\mathbf{s}$  oraz ich pochodnych przestrzennych  $\mathbf{s}'$ ,  $\mathbf{s}''$ .

Sumę obciążeń masowych i sprężystych otrzymuje się, wyznaczając wariacje energii kinetycznej i potencjalnej:

$$Q_M + Q_E = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \left( -\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\mathbf{p}}} \delta \dot{\mathbf{p}} - \frac{\partial T^*}{\partial \mathbf{p}} \delta \mathbf{p} + \frac{\partial U_e}{\partial \mathbf{p}} \delta \mathbf{p} \right) + \left( -\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\mathbf{s}}} \delta \dot{\mathbf{s}} - \frac{\partial T^*}{\partial \mathbf{s}} \delta \mathbf{s} + \frac{\partial U_e}{\partial \mathbf{s}} \delta \mathbf{s} \right) + \right. \\ \left. + \left( -\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\mathbf{s}}'} \delta \dot{\mathbf{s}}' - \frac{\partial T^*}{\partial \mathbf{s}'} \delta \mathbf{s}' + \frac{\partial U_e}{\partial \mathbf{s}'} \delta \mathbf{s}' + \frac{\partial U_e}{\partial \mathbf{s}''} \delta \mathbf{s}'' \right) \right] dt \quad (5.68)$$

Wyrażenia zawierające wariacje prędkości  $\delta \dot{\mathbf{p}}$ ,  $\delta \dot{\mathbf{s}}$ ,  $\delta \dot{\mathbf{s}}'$  są eliminowane z równania (5.68) w wyniku całkowania przez części względem czasu, wykorzystania

możliwości zmiany kolejności obliczania pochodnych i wariacji oraz zastosowania związku  $\delta \mathbf{p}(t_1) = \delta \mathbf{p}(t_2)$ . Ostatecznie otrzymuje się dwa rodzaje równań ruchu:

– równania przesunięć i obrotów:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^*}{\partial \dot{p}_i} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial p_i} + \frac{\partial U_e}{\partial p_i} = Q_{p_i} \quad (i = 1, \dots, n_s) \quad (5.69)$$

przy czym  $n_s$  oznacza liczbę stopni swobody układu mechanicznego (np. dla śmigłowca z czterołopatowym wirnikiem nośnym  $n_s = 19$ ).

– równania odkształceń:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^*}{\partial \dot{s}_i} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial s_i} + \frac{\partial U_e}{\partial s_i} \right] \delta s_i + \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^*}{\partial \dot{s}_i'} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial s_i'} + \frac{\partial U_e}{\partial s_i'} \right] \delta s_i' + \frac{\partial U_e}{\partial s_i''} \delta s_i'' \right\} dt = Q_{s_i} \delta s_i \quad (5.70)$$

przy czym  $i = 1, \dots, n_o$ .

Energię kinetyczną oblicza się z zależności:

$$T^* = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \dot{\mathbf{x}}^2 dV = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \dot{\mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{x}} dV \quad (5.71)$$

przy czym  $\mathbf{x}$  jest promieniem wektorem łączącym początek inercyjnego układu współrzędnych z bieżącym punktem należącym do układu.

Zależności (5.70), (5.71) zostały wykorzystane do wyprowadzenia równań ruchu śmigłowca z odkształcalnymi łopatami wirnika nośnego. Przyjęto, że wektor współrzędnych uogólnionych  $\mathbf{q}(t)$  ma następujące składowe:

$$\mathbf{q} = [\mathbf{p}, \mathbf{s}]^T \quad (5.72)$$

gdzie:

- $\mathbf{p} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \psi_{Li}, \mathbf{q}_{1,2i}]^T$  jest wektorem przemieszczeń i obrotów śmigłowca traktowanego jako układ nieodkształcalnych ciał, przy czym:
- $\mathbf{q}_1 = [x_0(t), y_0(t), z_0(t)]^T$  jest wektorem współrzędnych bieguna względem którego określane są prędkości i położenie elementów konstrukcyjnych śmigłowca,
- $\mathbf{q}_2 = [\Psi(t), \Theta(t), \Phi(t)]^T$  jest wektorem kątów Eulera określające położenie kadłuba śmigłowca w przestrzeni,
- $\psi_{Li}(t)$  to położenie azymutalne  $i$ -tej łopaty wirnika nośnego,

- $\mathbf{q}_{1,2i} = [\beta_i(t), \zeta_i(t), \theta_i(t)]^T$  jest wektorem kątów wahań, odchyień, przekręceń  $i$ -tej łopaty wirnika nośnego,
- $\mathbf{s} = \mathbf{v} + \mathbf{\Xi} + \mathbf{\xi}$  jest wektorem przemieszczeń i obrotów powstałych w wyniku odkształceń sprężystych łopaty, przy czym:
- $\mathbf{v} = [\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}]$  jest wektorem sprężystych przemieszczeń (rys. 5.6),
- $\mathbf{\Xi}, \mathbf{\xi}$  są wektorami sprężystych obrotów (rys. 5.6).

Odształcenia są dyskretyzowane (z wykorzystaniem znanych sprzężonych postaci własnych odkształceń wirującej belki modelującej łopatę wirnika nośnego), zgodnie z zależnościami:

$$\hat{v}(x, t) = \sum_{i=1}^{n_v} \eta_i(x) \hat{q}_i(t), \quad \hat{w}(x, t) = \sum_{i=n_v+1}^{n_v+n_w} \eta_i(x) \hat{q}_i(t), \quad \hat{\phi}(x, t) = \sum_{i=n_v+n_w+1}^{n_v+n_w+n_f} \eta_i(x) \hat{q}_i(x) \quad (5.73)$$

przy czym:

- $\hat{v}, \hat{w}$  i  $\hat{\phi}$  – sprężyste przemieszczenia i kąt skręcenia przekroju łopaty wirnika nośnego,
- $h_i(x)$  – postaci odkształceń własnych łopaty wirnika nośnego,
- $\hat{q}_i(t)$  – współrzędne uogólnione odkształceń,
- $n_v, n_w, n_f$  – liczby postaci dla odkształceń w kierunku odchyień, wahań i przekręceń.
- $\zeta = [0, \eta, \zeta]^T$  – wektor położenia punktu w przekroju łopaty (rys. 5.5, rys. 5.9)
- $\mathbf{\Xi}$  – macierz obrotu wynikająca z odkształceń sprężystych łopaty nośnej i jej skręcenia geometrycznego. Postać tej macierzy, przy założeniu, że odkształcenia są małe, podana została w pracy [2.71].

Promień wektor łączący początek inercyjnego układu odniesienia z bieżącym punktem leżącym wewnątrz konstrukcji śmigłowca  $\mathbf{x}$  dany jest zależnościami:

- dla punktów leżących wewnątrz kadłuba śmigłowca:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \sum_{l=1}^3 \mathbf{A}_l \cdot \mathbf{r}_k \quad (5.74)$$

- dla punktów leżących w obrębie łopaty wirnika nośnego:

$$\mathbf{x}_L = \mathbf{x}_p + \sum_{l=1}^3 \mathbf{A}_l \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{r}_L \quad (5.75)$$

przy czym:  $\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_0 + \sum_{l=1}^3 \mathbf{A}_l \cdot \mathbf{r}_p$ , gdzie  $\mathbf{r}_p$  jest promieniem wektorem łączącym środek piasty wirnika nośnego z biegunem  $O$ .

$$\mathbf{x}_L = \mathbf{x}_0 + \sum_{l=1}^3 \mathbf{A}_l \cdot (\mathbf{r}_p + \mathbf{D} \cdot \mathbf{r}_L) \quad (5.76)$$

$$\mathbf{r}_L = \mathbf{e} + \mathbf{P}_1(\beta_1)\mathbf{f} + \sum_{i=1}^2 \mathbf{P}_i(\beta_i)\mathbf{a} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{P}_i(\beta_i)[\mathbf{h} + \mathbf{r} + \mathbf{v} + \mathbf{\Xi} \cdot \boldsymbol{\xi}] \quad (5.77)$$

W celu uproszczenia zapisu (oraz ułatwienia algorytmizacji procesu generacji równań ruchu na maszynie cyfrowej) przyjęto, że  $b_1=\beta$ ,  $b_2=\zeta$ ,  $b_3=\theta$ ,  $\mathbf{P}_1=\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{P}_2=\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{P}_3=\mathbf{C}$ .

Ponadto (rys. 5.5):

- $\mathbf{x}_0 = [x_0(t), y_0(t), z_0(t)]^T$  – promień wektor łączący początek układu odniesienia z inercyjnym układem współrzędnych;
- $\mathbf{e}$  – promień wektor łączący środek piasty wirnika nośnego z osią przegubu wahań. Wektor ten w obracającym się z piastą układzie współrzędnych ma składowe:  $\mathbf{e} = [e, 0, 0]^T$ ;
- $\mathbf{f}$  – promień wektor łączący oś przegubu wahań z osią przegubu odchylenia. Wektor ten w poruszającym się z łącznikiem pośrednim układzie współrzędnych ma składowe:  $\mathbf{f} = [f, 0, 0]^T$ ;
- $\mathbf{a}$  – wektor łączący oś przegubu odchylenia z osią przegubu przekręceń. W układzie współrzędnych poruszającym się z łopata wirnika nośnego wektor ten ma współrzędne:  $\mathbf{a} = [a, 0, 0]^T$ ;
- $\mathbf{h}$  – wektor łączący przegub przekręceń z pierwszym czynnym przekrojem łopaty wirnika nośnego. W układzie współrzędnych poruszającym się z łopata wirnika nośnego wektor ten ma współrzędne:  $\mathbf{h} = [h, 0, 0]^T$ ;
- $\mathbf{r}$  – bieżący przekrój łopaty wirnika nośnego:  $\mathbf{r} = [x, 0, 0]^T$ .

Dla nieodkształcalnych łopat wirnika nośnego można przyjąć, że  $\mathbf{q} \equiv \mathbf{p}$ .

Pierwszym krokiem wyprowadzenia równań ruchu jest obliczenie pochodnych energii kinetycznej względem prędkości uogólnionych, pochodnych tych pochodnych względem czasu, oraz pochodnych energii kinetycznej względem współrzędnych uogólnionych:

$$\frac{\partial T^*}{\partial \dot{p}_i} = \iiint_V \rho \left( \dot{\mathbf{x}}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \dot{p}_i} \right) dV \quad (5.78)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^*}{\partial \dot{p}_i} \right) = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \left( \dot{\mathbf{x}}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \dot{p}_i} \right) dV = \iiint_V \rho \left[ \ddot{\mathbf{x}}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \dot{p}_i} + \dot{\mathbf{x}}^T \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \dot{p}_i} \right) \right] dV \quad (5.79)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial p_i} = \iiint_V \rho \left( \dot{\mathbf{x}}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial p_i} \right) dV = \iiint_V \rho \left\{ \left[ \left( \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} \right)^T \left[ \left( \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{p}} \right) \dot{\mathbf{p}} \right] \right\} dV \quad (5.80)$$

W celu obliczenia zależności (5.78), (5.79), (5.80) należy obliczyć pochodne promienia wektora  $\mathbf{x}$  względem współrzędnych uogólnionych i względem czasu. Sposób obliczania poszczególnych pochodnych znaleźć można w pracy [2.71]. Po obliczeniu tych pochodnych i wykonaniu odpowiednich przekształceń otrzymano zależności:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^*}{\partial \dot{p}_i} \right) &= \iiint_V \rho \left[ \ddot{\mathbf{x}}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \dot{p}_i} + \dot{\mathbf{x}}^T \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \dot{p}_i} \right) \right] dV = \\ &= \iiint_V \rho \left\{ \left[ \left( \frac{d^2 \mathbf{x}}{d\mathbf{p}^2} \dot{\mathbf{p}} \right) \dot{\mathbf{p}} + \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{p}} \ddot{\mathbf{p}} \right]^T \left[ \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{p}} \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}}{\partial \dot{p}_i} \right] + \left[ \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}} \right]^T \left[ \left( \frac{d^2 \mathbf{x}}{d\mathbf{p}^2} \dot{\mathbf{p}} \right) \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}}{\partial \dot{p}_i} \right] \right\} dV \end{aligned} \quad (5.81)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial p_i} = \iiint_V \rho \left( \dot{\mathbf{x}}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial p_i} \right) dV = \iiint_V \rho \left\{ \left[ \left( \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} \right)^T \left[ \left( \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{p}} \right) \dot{\mathbf{p}} \right] \right\} dV \quad (5.82)$$

Wstawiając (5.81) i (5.82) do (5.69), po dokonaniu odpowiednich przekształceń otrzymano następujący układ równań [2.71]:

$$\mathbf{M}(\mathbf{p}) \cdot \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{O}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) = \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) - \mathbf{U}(\mathbf{p}) \quad (5.83)$$

gdzie:  $\mathbf{M}(\mathbf{p})$  – macierz bezwładności:

$$M_{ik} = \iiint_V \rho \left[ \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial x_j}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial p_k} \right) \right] dV \quad (5.84)$$

$\mathbf{O}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}})$  – wektor obciążeń nieliniowych:

$$O_i(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) = \iiint_V \rho \left[ \sum_l \sum_m \sum_k \frac{\partial x_l}{\partial p_i} \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_m \partial p_k} \dot{p}_k \dot{p}_m + \sum_l \sum_m \sum_k \frac{\partial x_l}{\partial p_m} \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_m} \dot{p}_k p_m + \right. \\ \left. - \sum_l \sum_m \frac{\partial x_l}{\partial p_i} \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_m \partial p_k} \dot{p}_m \dot{p}_i \right] dV \quad (5.85)$$

#### 5.4.2.2. Wykorzystanie równań Boltzmanna–Hamela do generacji równań ruchu

Formalizm mechaniki analitycznej pozwala na zapisanie dynamicznych równań ruchu układów materialnych w quasi-współrzędnych, dostarczając niezwykle interesującego (i wygodnego) narzędzia konstrukcji równań ruchu statków powietrznych. Przykładem mogą być równania Boltzmanna–Hamela stanowiące uogólnienie równań Lagrange’a II rodzaju na przypadek quasi-współrzędnych. Mankamentem jest złożoność tych równań. Pojawia się konieczność wyznaczania trójwskaźnikowych symboli Boltzmanna. Równania Boltzmanna–Hamela mają postać [2.29, 2.30]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^*}{\partial \omega_\sigma} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_\sigma} + \sum_{\mu=1}^k \sum_{\lambda=1}^k \gamma_{\sigma\lambda}^\mu \frac{\partial T^*}{\partial \omega_\mu} \omega_\lambda = Q_\sigma^* \quad (5.86)$$

gdzie:

$T^*$  – energia kinetyczna (funkcja quasi prędkości i quasi współrzędnych),

$\omega_\sigma$  – quasi prędkość,

$\pi_\sigma$  – quasi współrzędna,

$q_\lambda, q_\sigma$  – współrzędne uogólnione,

$\gamma_{\mu\alpha}^r$  – trójwskaźnikowe symbole Boltzmanna [2.29, 2.30]:

$$\gamma_{\mu\alpha}^r = \sum_{r=1}^k \sum_{\alpha=1}^k \left( \frac{\partial a_{r\sigma}}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial a_{r\lambda}}{\partial q_\sigma} \right) b_{\sigma\mu} b_{\lambda\alpha} \quad (5.87)$$

gdzie  $a_{r\sigma}, b_{r\sigma}$  – elementy macierzy transformacji.

Zależności pomiędzy quasi-prędkościami a prędkościami uogólnionymi dane są równaniami:

$$\omega_\sigma = \sum_{\alpha=1}^k a_{\sigma\alpha}(q_1, q_2, \dots, q_k) \cdot \dot{q}_\alpha, \quad \dot{q}_\sigma = \sum_{\mu=1}^k b_{\sigma\mu}(q_1, q_2, \dots, q_k) \cdot \omega_\mu, \quad \sigma = 1, \dots, k \quad (5.88)$$

$Q_\sigma^* = \sum_{\sigma=1}^k Q_\sigma b_{\sigma\mu}$  – współrzędna wektora sił uogólnionych,

$k$  – liczba stopni swobody układu mechanicznego,



Równania (5.88) można zapisać w postaci macierzowej:

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{A}_T \dot{\mathbf{q}}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}_T^{-1} \mathbf{\Omega} = \mathbf{B}_T \mathbf{\Omega} \quad (5.89)$$

gdzie  $\mathbf{\Omega}$  jest wektorem quasi-prędkości,  $\mathbf{q}$  – wektorem współrzędnych uogólnionych, przy czym:

$$\mathbf{\Omega} = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k]^T, \quad \mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_k]^T \quad (5.90)$$

Budowa macierzy  $\mathbf{A}_T$  zależy od badanego zagadnienia. Dla modelu śmigłowca traktowanego jako układ materialny składający się z nieodkształcalnego kadłuba i  $n$  sztywnych łopat wirnika nośnego zamocowanych do piasty za pomocą trzech przegubów, wektory quasi-prędkości i quasi-współrzędnych mają postać:

$$\mathbf{\Omega} = \text{col}[u, v, w, p, q, r, \Omega, \beta_1, \dots, \beta_n, \zeta_1, \dots, \zeta_n, \theta_1, \dots, \theta_n] \quad (5.91)$$

$$\mathbf{q} = \text{col}[x_s, y_s, z_s, \Phi, \Theta, \Psi, \psi, \beta_1, \dots, \beta_n, \zeta_1, \dots, \zeta_n, \theta_1, \dots, \theta_n] \quad (5.92)$$

Macierz  $\mathbf{A}_T$  ma budowę:

$$\mathbf{A}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_G & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (5.93)$$

Macierz  $\mathbf{A}_G$  jest zdefiniowana zależnością (5.32), macierz  $\mathbf{C}_T$  dana jest zależnością (5.31), macierz jednostkowa  $\mathbf{I}$  ma wymiar  $(3n+1) \times (3n+1)$ ,  $n$  – liczba łopat wirnika nośnego.

Macierze  $\mathbf{D}_i$  można określić w następujący sposób:

$$\mathbf{D}_i = \frac{d\mathbf{a}_i}{d\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial q_1} & \dots & \dots & \frac{\partial a_{1k}}{\partial q_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial a_{k1}}{\partial q_1} & \dots & \dots & \frac{\partial a_{kk}}{\partial q_k} \end{bmatrix} \quad (5.94)$$

gdzie wektor  $\mathbf{a}_i$  oznacza  $i$ -ty wiersz macierzy  $\mathbf{A}_T$ .

W zapisie macierzowym trójwskaznikowe symbole Boltzmanna mogą być zaprezentowane w postaci elementów trójwymiarowej macierzy o budowie blokowej  $\Gamma(k \times (k \times k))$ :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma^1 \\ \Gamma^2 \\ \dots \\ \Gamma^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_T^T (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_1^T) \mathbf{B}_T \\ \mathbf{B}_T^T (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_2^T) \mathbf{B}_T \\ \dots \\ \mathbf{B}_T^T (\mathbf{D}_k - \mathbf{D}_k^T) \mathbf{B}_T \end{bmatrix} \quad (5.95)$$

Macierz  $\Gamma$  można przedstawić w postaci skróconej:

$$\Gamma = \mathbf{B}_T^T (\mathbf{D} - \mathbf{D}^T) \mathbf{B}_T \quad (5.96)$$

Ostatecznie równania Boltzmanna–Hamela zapisane w formie macierzowej przyjmują postać:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^*}{\partial \Omega} \right) + (\Gamma^T \Omega) \frac{\partial T^*}{\partial \Omega} - \mathbf{B}_T^T \frac{\partial T^*}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} - \mathbf{B}^T \frac{U_e}{\partial \mathbf{q}} \quad (5.97)$$

Równanie (5.98) jest bardzo dogodne do zastosowania w procedurach automatycznej generacji równań ruchu. Zależność (5.98) wraz z równaniami związków kinematycznych stanowią nieliniowy układ równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu opisujących ruch śmigłowca jako wieloczłonowego układu dynamicznego. Równania te są zapisane w formie umożliwiającej tworzenie procedur przeznaczonych do ich automatycznej generacji, (np. za pomocą takich pakietów programowych jak Mathematica®, Mathcad®, Matlab czy innych podobnych systemów). Wektor  $\mathbf{Q}$  jest sumą obciążeń aerodynamicznych i innych obciążeń niepotencjalnych działających na układ. Sposoby ich wyznaczania zostaną przedstawione w rozdziale 7.

#### 5.4.2.3. Wykorzystanie równań Apela–Gibbsa do wyprowadzenia równań ruchu śmigłowca

Innym przykładem równań mechaniki analitycznej są równania Gibbsa–Appela. Równania te mają następującą postać [2.29, 2.30, 2.62]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial S}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} \right) = \mathbf{Q} \quad (5.98)$$

gdzie:  $\mathbf{q}$  – jest wektorem współrzędnych uogólnionych;  $S(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t)$  jest tak zwaną funkcją Appela lub funkcjonalem przyspieszeń.

Funkcjonał  $S$   $i$ -tego elementu układu mechanicznego jest dany równaniem [2.6, 2.29, 2.30]:

$$S = \frac{1}{2} \iiint_{V^i} \dot{\mathbf{v}}^i \circ \dot{\mathbf{v}}^i dm^i \quad (5.99)$$

przy czym:  $\dot{\mathbf{v}}^i$  oznacza wektor całkowitego przyspieszenia elementarnej masy  $dm^i$   $i$ -tego ciała rozważanego układu dynamicznego. (rys. 5.10 i 5.11).

Wektor przyspieszenia bezwzględnego  $i$ -tego elementu układu dynamicznego dany jest zależnością:

$$\dot{\mathbf{v}}^i = \dot{\mathbf{v}}_0^i + \boldsymbol{\varepsilon}_0^i \times \boldsymbol{\rho}^i + \boldsymbol{\omega}_0^i \times (\boldsymbol{\omega}_0^i \times \boldsymbol{\rho}^i) \quad (5.100)$$

Przyjmując, że:

$$\mathbf{r}^i = \mathbf{r}_3'' + \mathbf{r}_3^{''i} + \mathbf{r}_3^i \quad (5.101)$$

oraz:

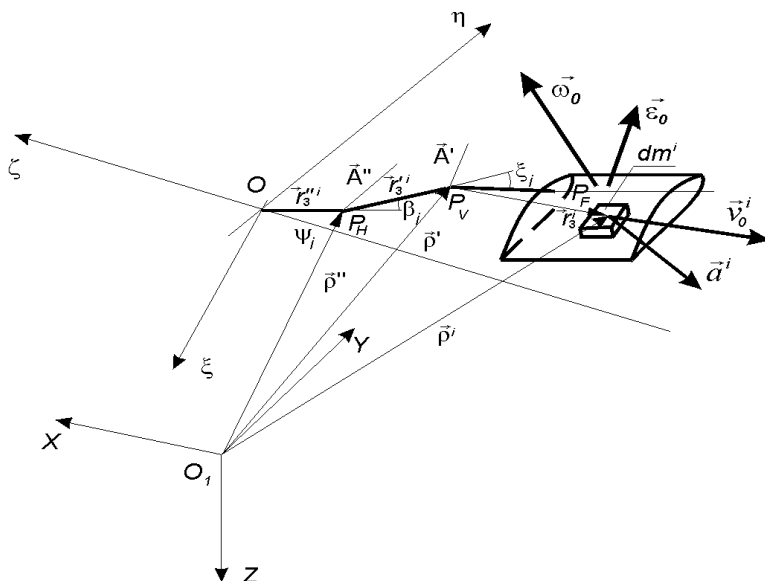
$$\mathbf{M}^i = \begin{bmatrix} m^i \mathbf{I} & m^i \tilde{\mathbf{r}}^{iT} \\ m \tilde{\mathbf{r}}^i & \mathbf{J}_O^i \end{bmatrix}; \quad \mathbf{h}^i = \begin{bmatrix} m^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 + m^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0^2 \mathbf{r}^i \\ m^i \tilde{\mathbf{r}}^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0^i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \mathbf{J}_O^i \boldsymbol{\omega}_0 \end{bmatrix} \quad (5.102)$$

gdzie  $m^i$  – masa  $i$ -tego elementu,  $\mathbf{J}_O^i$  tensor bezwładności  $i$ -tego elementu,  $\boldsymbol{\omega}_0$  wektor prędkości kątowej,  $\mathbf{v}_0^i$  wektor prędkości  $i$ -tego elementu, oraz przyjmując że:

$$\mathbf{a} = [a_\xi, a_\eta, a_\varsigma]^T \quad \text{to} \quad \tilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_\varsigma & a_\eta \\ a_\eta & 0 & -a_\xi \\ -a_\eta & a_\xi & 0 \end{bmatrix} \quad (5.103)$$

wyrażenie (5.99) można przedstawić w następującej formie macierzowej:

$$S^i = \frac{1}{2} \left[ \dot{\mathbf{v}}^i + (\mathbf{M}^i)^{-1} \mathbf{h}^i \right]^T \mathbf{M}^i \left[ \dot{\mathbf{v}}^i + (\mathbf{M}^i)^{-1} \mathbf{h}^i \right] \quad (5.104)$$



**Rys. 5.10.** Położenie punktów, promieni wektorów, wektorów prędkości i przyspieszeń na łopacie śmigłowca

Po obliczeniu macierzy  $\mathbf{M}^i$  oraz  $\mathbf{h}^i$  dla wszystkich  $k$  ciał układu mechanicznego oraz zdefiniowaniu macierzy:

$$\mathbf{M} = \text{diag} \left[ \mathbf{M}^1, \mathbf{M}^2, \dots, \mathbf{M}^k \right] \quad (5.105)$$

$$\mathbf{v} = \left[ \left( \mathbf{v}^1 \right)^T, \left( \mathbf{v}^2 \right)^T, \dots, \left( \mathbf{v}^k \right)^T \right]^T \quad (5.106)$$

oraz

$$\mathbf{h} = \left[ \left( \mathbf{h}^1 \right)^T, \left( \mathbf{h}^2 \right)^T, \dots, \left( \mathbf{h}^k \right)^T \right]^T \quad (5.107)$$

funkcjonał  $S$  całego układu dynamicznego dany jest zależnością:

$$S = \frac{1}{2} \left( \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{h} \right)^T \mathbf{M} \left( \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{h} \right) \quad (5.108)$$

Jeżeli  $\mathbf{q}$  jest wektorem współrzędnych uogólnionych układu mechanicznego, to między wektorami  $\mathbf{q}$  i  $\mathbf{v}$  zachodzi zależność [2.6, 2.29, 2.30]:

$$\mathbf{v} = \mathbf{D}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\mathbf{q}, t) \quad (5.109)$$

Stąd, po zróżniczkowaniu otrzymamy:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{D}(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (5.110)$$

gdzie:

$$\boldsymbol{\phi} = \dot{\mathbf{D}}\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{f}} \quad (5.111)$$

Po wstawieniu (5.109) do (5.110) oraz dokonaniu prostych operacji matematycznych, funkcjonal Appela  $S$  może być przedstawiony w postaci

$$S(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) = \frac{1}{2} (\mathbf{D}\ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\phi} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{h})^T \mathbf{M} (\mathbf{D}\ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\phi} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{h}) \quad (5.112)$$

Przyjmując, że:

$$\mathbf{M}_g = \mathbf{D}^T \mathbf{M} \mathbf{D} \text{ and } \mathbf{h}_g = \mathbf{D}^T (\mathbf{M}\boldsymbol{\phi} + \mathbf{h})$$

oraz pamiętając, że:  $\mathbf{D}(\mathbf{D}^T \mathbf{M} \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^T = \mathbf{M}^{-1}$ , równanie (1.112) można zapisać w formie:

$$S(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) = \frac{1}{2} (\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}_g^{-1} \mathbf{h}_g)^T \mathbf{M} (\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}_g^{-1} \mathbf{h}_g) \quad (5.113)$$

Nieliniowe równania ruchu śmigłowca wraz ze związkami kinematycznymi są zapisane w nieinercyjnych układach współrzędnych (rys. 5.9 i 5.10). W przypadku gdy rozważamy model śmigłowca jako układ mechaniczny złożony ze sztywnego kadłuba i  $n$  nieodkształcalnych łopat zamocowanych za pomocą trzech przegubów (wahań, odchyleń i przekręceń), wektor współrzędnych uogólnionych przyjmie postać:

$$\mathbf{q} = [x_s, y_s, z_s, \Phi, \Theta, \Psi, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T \quad (5.114)$$

Wektor quasi-prędkości może być przedstawiony w postaci:

$$\mathbf{w} = [U, V, W, P, Q, R, \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \dots, \dot{\beta}_n, \dot{\zeta}_1, \dot{\zeta}_2, \dots, \dot{\zeta}_n, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dots, \dot{\theta}_n]^T \quad (5.115)$$

Dla układów holonomicznych pomiędzy wektorami prędkości uogólnionych

$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T$  i quasi prędkości  $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$  zachodzi relacja:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}_T(\mathbf{q}) \mathbf{w} \quad (5.116)$$

Macierz  $\mathbf{A}_T$  ma budowę identyczną jak w (5.93).

Różniczkując zależność (5.116) względem czasu,

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}_T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{w}} + \dot{\mathbf{A}}_T\mathbf{w} \quad (5.117)$$

po dokonaniu przekształceń funkcjonal przyspieszeń przyjmie postać:

$$S^*(\mathbf{q}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, t) = \frac{1}{2} \left( \dot{\mathbf{w}} + \mathbf{M}_w^{-1} \mathbf{h}_w \right)^T \mathbf{M}_w \left( \dot{\mathbf{w}} + \mathbf{M}_w^{-1} \mathbf{h}_w \right) \quad (5.118)$$

gdzie  $\mathbf{M}_w(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_T^T \mathbf{M}_q \mathbf{A}_T$  oraz  $\mathbf{h}_w(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = \mathbf{A}_T^T (\mathbf{M}_q \dot{\mathbf{A}}_T + \mathbf{h}_q)$

Równania Gibbsa–Appela mogą być zatem zapisane w postaci:

$$\left( \frac{\partial S^*}{\partial \dot{\mathbf{w}}} \right)^T = \left[ \frac{\partial S^*}{\partial \dot{w}_1}, \dots, \frac{\partial S^*}{\partial \dot{w}_k} \right]^T = \mathbf{M}_w(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{w}} + \mathbf{h}_w(\mathbf{q}, \mathbf{w}, t) = \mathbf{Q}^*(\mathbf{q}, \mathbf{w}, t) \quad (5.119)$$

Różniczkując zależność (5.119) względem czasu otrzymujemy równania różniczkowe ruchu śmigłowca jako wieloczłonowego układu dynamicznego.

### 5.4.3. Uwagi ogólne o generacji równań ruchu obiektów latających

Omówione powyżej metody wyprowadzenia równań ruchu stanowią, zdaniem autora, wygodny i prosty formalizm modelowania dynamiki ruchu statków powietrznych, traktowanych jako mechaniczne układy wieloczłonowe. Stanowią one uniwersalne narzędzie, które można stosować do układów holonomicznych i nieholonomicznych, przy czym analiza prowadzona może być zarówno w prędkościach uogólnionych, jak i quasi-prędkościach. Prowadzony zapis macierzowy oraz nieco zmodyfikowane sformułowania tych metod pozwolą na pewne porównania pomiędzy nimi oraz ogólniejsze wnioski dotyczące zasad wyboru metody dla określonych typów zadań dynamiki ruchu obiektów latających. Jedną z takich metod jest *metoda podziału zmiennych*. Jest to pojęciowo najprostsza metoda wyboru prędkości niezależnych, a na tej podstawie formułowania równań ruchu układów złożonych. Choć historycznie nie jest to nowe podejście do modelowania układów z więzami [2.6, 2.29], jej sformułowanie matematyczne do zastosowań praktycznych zaproponowane zostało w pracy [2.82] jako *metoda podziału współrzędnych uogólnionych*. W tej wersji była to metoda do analizy układów holonomicznych o dowolnej strukturze. Istnieje jednak uogólniona wersja tej metody, ważna dla modelowania układów holonomicznych i nieholonomicznych oraz dla równań ruchu formowanych zarówno w prędkościach uogólnionych, jak i quasi-prędkościach. Podstawą sformułowania

metody jest, w wyniku  $m$  ograniczeń nakładanych na  $n$  prędkości  $\mathbf{v}$  przez więzy kinematyczne I rzędu, podział tych prędkości na  $r = n-m$  prędkości niezależnych  $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_r]^T$  oraz  $m$  prędkości zależnych  $\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_m]^T$ . Równania więzów można wówczas zapisać w postaci [2.6]:

$$\mathbf{C}\mathbf{v} = \mathbf{U}\mathbf{u} + \mathbf{W}\mathbf{w} \quad (5.120)$$

Wymaga się przy tym, ażeby faktoryzacja macierzy więzów  $\mathbf{C} = [\mathbf{U} \ \mathbf{W}]$  odpowiadająca podziałowi prędkości  $\mathbf{v} = [\mathbf{u} \ \mathbf{w}]^T$  dokonana była tak, że  $\det(\mathbf{W}) \neq 0$ . Powyższy zapis należy traktować jako symboliczny, w którym kolumny są odpowiednio przedstawione (zwykle nie czyni się tego jawnie, a przedstawianie kolumn zastępuje się przypisaniem im odpowiednich adresów numerycznych). Z równania (5.120) można bezpośrednio wyznaczyć  $\mathbf{w} = -\mathbf{W}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{u} + \mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{v}$ , co pozwala na sformułowanie zależności [2.6]:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{W}^{-1}\mathbf{U} \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{v} \end{bmatrix} = \mathbf{D}(\mathbf{p}, t) \mathbf{u} + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{p}, t) \quad (5.121)$$

gdzie  $\mathbf{p}$  jest wektorem położenia chwilowego,  $\mathbf{p} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, t)$ , ( $\mathbf{q}$  – wektor współrzędnych uogólnionych).

Można wykazać [2.6], że  $\mathbf{C}\mathbf{D} = \mathbf{U} - \mathbf{W}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{U} = \mathbf{0}$ , zatem macierz  $\mathbf{D}$  jest macierzą uzupełnienia ortogonalnego do  $\mathbf{C}$ . Podobnie zapisując równania więzów kinematycznych II rzędu:

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{U}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{W}\dot{\mathbf{w}} \quad (5.122)$$

Analogicznie do (5.121) zależność (5.122) można sformułować następująco:

$$\dot{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{W}^{-1}\mathbf{U} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \mathbf{D}(\mathbf{p}, t) \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{u}, t) \quad (5.123)$$

Zależności (5.122), (5.123) pozwalają na wygenerowanie równań ruchu w postaci [2.6]:

$$\mathbf{D}^T \mathbf{M} \mathbf{D} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}^T (\mathbf{M} \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{h}) = \mathbf{D}^T \mathbf{f} \quad (5.124)$$

gdzie macierz mas  $\mathbf{M}$  dana jest zależnością (5.105), wektor  $\mathbf{h}$  dany jest zależnością (5.107), wektor  $\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix}$ , zaś  $\mathbf{D}^T\mathbf{f}$  jest wektorem sił uogólnionych na kierunkach  $\mathbf{u}$ .

Oczywistość zapisu (5.124) sprawia, że metoda podziału zmiennych jest pojęciowo najprostszą metodą generowania dynamicznych równań ruchu w prędkościach niezależnych. Metoda ta jest też uniwersalna – służyć może do badania układów holonomicznych i nieholonomicznych, a składowe  $\mathbf{v} = [\mathbf{u}^T \mathbf{w}^T]^T$  mogą być zarówno prędkościami uogólnionymi, jak i quasi-prędkościami. Algorytm wydaje się szczególnie użyteczny do badania układów z niewielką liczbą więzów. Generalnie jednak metoda podziału zmiennych, głównie z racji konieczności odwracania macierzy  $\mathbf{W}$ , jest zorientowana na zastosowania komputerowe. Jednak pomimo swej prostoty, niewygoda stosowania metody podziału zmiennych jest fakt, że dla określonego podziału prędkości  $\mathbf{v} = [\mathbf{u}^T \mathbf{w}^T]^T$  generowanie zależności (5.122) i (5.123), a tym samym cała metoda, mogą być źle uwarunkowane. Jest to powodowane tym, że macierz więzów w ogólnym wypadku zależy od położenia układu,  $\mathbf{C}(\mathbf{p}, t)$ . Jeśli dla położenia wyjściowego wybrany podział  $\mathbf{v} = [\mathbf{u}^T \mathbf{w}^T]^T$  zapewnia  $\det(\mathbf{W}) = 0$  (zawsze możliwy jest co najmniej jeden taki wybór), dla innych położań  $\mathbf{W}$  może być źle uwarunkowana lub wręcz osobliwa,  $\det(\mathbf{W}) = 0$ . Wymagany będzie wówczas nowy wybór podziału zmiennych.

Innym, oprócz opisanych już sposobów generowania równań ruchu w oparciu o równania Lagrange’a, Boltzmann–Hamela, Gibbsa–Apela czy też podziału zmiennych, jest zastosowanie równań Maggiego i Kane’a. Poniżej bardzo skrótowo zostaną opisane te równania.

W większości opracowań z mechaniki analitycznej, na przykład [2.29, 2.30, 2.62], punktem startowym prezentacji metody Maggiego jest układ holonomiczny o  $n$  stopniach swobody, którego położenie jest definiowane za pomocą  $n$  współrzędnych uogólnionych  $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_n]^T$ , a dynamiczne równania ruchu zapisane są za pomocą równań Lagrange’a II rodzaju:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T^*}{\partial q_\sigma} = Q_\sigma, \quad \sigma = 1, \dots, n \quad (5.125)$$

W formie macierzowej równania te przyjmują postać:

$$\mathbf{M}_q(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}_q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \quad (5.126)$$

gdzie  $\mathbf{M}_q$  jest  $n \times n$  wymiarową macierzą mas uogólnionych,  $\mathbf{h}_q$  jest  $n$ -wymiarowym wektorem uogólnionych sił dynamicznych wyrażających efekty sił odśrodkowych, Coriolisa i giroskopowych, a  $\mathbf{Q} = [Q_1, \dots, Q_n]^T$  jest wektorem sił uogólnionych. Na układ ten nakładane są następnie niezależne więzy kinematyczne I rzędu, które można zapisać jako:



$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} - \boldsymbol{\eta}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0} \quad (5.127)$$

gdzie  $\mathbf{C}[m, n]$  jest macierzą więzów,  $m < n$ , a  $r = n - m$  jest liczbą stopni swobody układu. Ponieważ rząd tak określonej  $m \times n$ -wymiarowej macierzy więzów  $\mathbf{C}$  jest maksymalny (równy  $m$ ), tylko  $r$  spośród  $n$  prędkości uogólnionych  $\dot{\mathbf{q}}$  jest niezależnych. Z reguły grupuje się je jako pierwsze  $r$  elementów  $\dot{\mathbf{q}}$ ,  $\dot{q}_{r+1}, \dots, \dot{q}_n$  w funkcji prędkości niezależnych. Podejście takie odpowiadałoby opisanej powyżej metodzie podziału zmiennych (należy przy tym pamiętać, że wybór prędkości niezależnych  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_r$  i zależnych  $\dot{q}_{r+1}, \dots, \dot{q}_n$  nie może być arbitralny).

W metodzie Maggiego, zamiast  $r$  tak określonych prędkości niezależnych  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_r$  wprowadza się  $r$  niezależnych parametrów (tzw. *charakterystyk* lub *parametrów kinematycznych*)  $\dot{e}_r, \dots, \dot{e}_n$  ( $\dot{\mathbf{e}} = [\dot{e}_r, \dots, \dot{e}_n]^T$ ). Prędkości uogólnione  $\dot{\mathbf{q}}$  wyraża się następnie w funkcji parametrów kinematycznych:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{D}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{e}} + \boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0} \quad (5.128)$$

Wybór parametrów kinematycznych  $\dot{\mathbf{e}}$  musi być tak dokonany, by podstawienie związków (5.128) do równań więzów (5.127) powodowało, że spełnione są one tożsamościowe, czyli  $\mathbf{C}(\mathbf{D}\dot{\mathbf{e}} + \boldsymbol{\phi}) - \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ , co implikuje że  $\mathbf{C}\mathbf{D} = \mathbf{0}$  oraz  $\mathbf{C}\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\eta}$  (por. z [2.6]).

Wykorzystując powyższe zależności równania Maggiego formułuje się w postaci [2.6, 2.29, 2.30]:

$$\sum_{\sigma=1}^k D_{\lambda\sigma} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T^*}{\partial q_\sigma} \right) = Q_\lambda^*, \quad \lambda = 1, \dots, r \quad (5.129)$$

gdzie  $\mathbf{Q}^* = \mathbf{D}^T \mathbf{Q}$  są siłami uogólnionymi odpowiadającymi parametrom  $\dot{\mathbf{e}}$ . Dołączając do powyższych  $r$  równań  $n$  związków kinematycznych (5.127) otrzymuje się  $r+n$  równań różniczkowych względem tej samej liczby zmiennych  $\dot{e}_1, \dots, \dot{e}_r, q_1, \dots, q_n$ .

Metoda Kane'a generowania równań ruchu układów wielocłonowych jest bardzo popularna i szeroko cytowana w literaturze anglojęzycznej, a szczególnie w USA. Formalizm wyprowadzenia metody odbiega też od standardów mechaniki Lagrange'a, która jest podstawą większości opracowań z mechaniki analitycznej. Przedmiotem analizy jest układ mechaniczny, którego położenie jest jednoznacznie

opisane przez  $n$  współrzędnych uogólnionych  $\mathbf{q}=[q_1, \dots, q_n]^T$ . Zakłada się następnie, że na układ ten nałożonych jest  $m$  niezależnych więzów kinematycznych pierwszego rzędu.

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} - \boldsymbol{\eta}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0} \quad (5.130)$$

gdzie  $m < n$ , a  $r = n - m$  jest liczbą stopni swobody układu. Podobnie jak w metodzie Maggiiego, zamiast podziału prędkości uogólnionych  $\mathbf{q}$ , w wyniku warunków (5.130), na  $r$  prędkości niezależnych  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_r$  i  $m$  prędkości zależnych  $\dot{q}_{r+1}, \dots, \dot{q}_n$  wprowadza się  $r$  parametrów  $\mathbf{u}=[u_1, \dots, u_r]^T$ . Zakłada się następnie, że  $\mathbf{u}$  można wyrazić za pomocą  $r$  prędkości uogólnionych  $q_1, \dots, q_r$  wskazanych wcześniej jako niezależne,

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}}' - \boldsymbol{\theta}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0} \quad (5.131)$$

przy czym  $\dot{\mathbf{q}}' = [\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_r]^T$  oraz zależność ta jest odwracalna,  $\det(\mathbf{U}) \neq 0$ .

Załóżmy, że układ mechaniczny opisany powyżej składa się z  $b$  ciał sztywnych. Dla  $i$ -tego ciała składowymi absolutnej prędkości jego środka masy i absolutnej prędkości kątowej, odpowiednio w układzie inercyjnym  $Oxyz$  i własnym dla tego ciała są:

$$\mathbf{v}_C^i = [v_{Cx}^i, v_{Cy}^i, v_{Cz}^i]^T; \quad \boldsymbol{\omega}^i = [\omega_\xi^i, \omega_\eta^i, \omega_\zeta^i]^T \quad (5.132)$$

Zapisując  $\mathbf{v}^i = [v_{Cx}^i, v_{Cy}^i, v_{Cz}^i, \omega_\xi^i, \omega_\eta^i, \omega_\zeta^i]^T$  (jeśli ciało modelowane jest jak punkt materialny P, wówczas  $\mathbf{v}^i = \mathbf{v}_P^i$ ), dla wszystkich ciał układu mamy następnie

$$\mathbf{v} = \left[ [\mathbf{v}^1]^T \dots [\mathbf{v}^b]^T \right]^T \quad (5.133)$$

Istotą metody Kane'a jest założenie, że powyższe składowe prędkości absolutnych dają się wyrazić za pomocą parametrów  $\mathbf{u}$ , co zapisuje się w postaci:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}(\mathbf{q}, t) \mathbf{u} + \mathbf{v}_i(\mathbf{q}, t) \quad (5.134)$$

gdzie  $\mathbf{v}_i$  znika dla układów z więzami skleronomicznymi. Wektory  $\mathbf{V}(\mathbf{q}, t)$  stosowane są następnie dla zdefiniowania uogólnionych sił czynnych  $\mathbf{K}$  oraz uogólnionych sił bezwładności  $\mathbf{K}^B$  odpowiadających wprowadzonym parametrom  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{K} = \mathbf{V}^T \left[ [\mathbf{f}^1]^T, \dots, [\mathbf{f}^b]^T \right]^T; \quad \mathbf{K}^B = \mathbf{V}^T \left[ [\mathbf{f}^{B1}]^T, \dots, [\mathbf{f}^{Bb}]^T \right]^T \quad (5.135)$$

przy czym  $\mathbf{K}$  oraz  $\mathbf{K}^B$  są globalnymi (dla wszystkich ciał układu) wektorami sił oraz momentów sił czynnych i bezwładności odpowiadających składowym  $\mathbf{v}$  zdefiniowanym w równaniu (5.134). W szczególności  $\mathbf{f}^i$  i  $\mathbf{f}^{Bi}$  dla  $i$ -tego ciała układu dane są zależnościami:

$$\mathbf{f}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^i \\ \mathbf{M}^i \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f}^{Bi} = - \begin{bmatrix} m_i \dot{\mathbf{v}}_C^i \\ \mathbf{J}_C^i \dot{\boldsymbol{\omega}}^i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \mathbf{J}_C^i \boldsymbol{\omega}^i \end{bmatrix} = -(\mathbf{M}^i \dot{\mathbf{v}}^i + \mathbf{h}^i) \quad (5.136)$$

gdzie:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_\zeta & \omega_\eta \\ \omega_\zeta & 0 & -\omega_\xi \\ -\omega_\eta & \omega_\xi & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^i = \begin{bmatrix} m^i \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_C^i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \mathbf{J}_C^i \boldsymbol{\omega}^i \end{bmatrix}$$

Wektor  $\mathbf{f}^B$  można zapisać w postaci:

$$\mathbf{f}^B = \mathbf{M} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{h} \quad (5.137)$$

gdzie:

$$\mathbf{M} = \text{diag}[\mathbf{M}^1, \dots, \mathbf{M}^b] \quad \text{oraz}$$

$$\mathbf{h} = \left[ [\mathbf{h}^1]^T, \dots, [\mathbf{h}^b]^T \right]^T$$

Wykorzystując powyższe zależności, równania Kane'a przedstawia się w następującej postaci:

$$\mathbf{K} + \mathbf{K}^B = \mathbf{0} \quad (5.138)$$

Jak wynika z powyższego wyprowadzenia, prostota równań (5.136) jest tylko pozorna. Dodatkowo, ze względu na zależność (5.136), formalnie niezbędny jest nie tylko związek (5.134), ale również jego forma różniczkowa:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{V}(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{V}}(\mathbf{q}, t)\mathbf{u} + \dot{\mathbf{v}}_i(\mathbf{q}, t)$$

Ostatecznie równania Kane'a zapisać można wówczas symbolicznie jako:

$$\mathbf{V}^T \left[ [\mathbf{f}^1]^T, \dots, [\mathbf{f}^b]^T \right]^T = \mathbf{V}^T \left( \mathbf{M}(\mathbf{V}\dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{V}}\mathbf{u} + \dot{\mathbf{v}}) + \mathbf{h} \right) \quad (5.139)$$

W tym miejscu należałoby wspomnieć o bardzo ciekawej, autorskiej metodzie rzutowej (projekcyjnej) generacji równań ruchu układów z więzami w zmiennych zależnych. Metoda została opracowana przez prof. Blajera, a jej szczegółowy wykład został podany w pracy [2.6]. Zasadniczą ideą opisaną tam techniki jest rzutowanie dynamicznych równań ruchu zależnych od reakcji więzów odpowiednio do podprzestrzeni skrępowania (wyznaczonej przez więzy) i stycznej (stanowiącej dopełnienie podprzestrzeni skrępowania w przestrzeni, w której zdefiniowane są badane równania ruchu). Metoda ta stanowi bardzo ciekawe uogólnienie szeregu klasycznych metod mechaniki analitycznej, dostarczając uniwersalną prostą technikę badania układów z więzami. Metoda rzutowa była z powodzeniem stosowana do analizy lotu samolotu po założonej trajektorii.

## MODELOWANIE DYNAMIKI ZESPOŁU NAPĘDOWEGO ŚMIGŁOWCA

Schematyczne przedstawienie elementów zespołu napędowego jako źródła energii zamontowanego na śmigłowcu przedstawiono na rys. 6.1 [2.32]. Na tym rysunku pokazano zasadnicze odbiorniki energii dostarczanej przez silniki śmigłowca, takie jak: wirnik nośny, śmigło ogonowe oraz inne agregaty niezbędne do pracy śmigłowca. Na schemacie (rys. 6.1) przedstawiono także straty energii spowodowanej tarciami w przekładniach układu przenoszenia napędu.

Przedstawiona poniżej metodyka [2.32, 2.48] pozwala na opisanie pracy turbiny silnika śmigłowcowego w warunkach automatycznej stabilizacji prędkości obrotowej wirnika nośnego (oznacza to, że proces rozruchu silnika i rozkręcenia się wirnika nośnego do obrotów nominalnych za pomocą tej metodyki nie może być rozpatrzony). Prędkość kątową wirnika nośnego można przedstawić w postaci sumy:

$$\Omega = \Omega_{nom} + \Delta\Omega \quad (6.1)$$

gdzie:

$\Omega_{nom}$  – nominalna prędkość kątowna wirnika nośnego (jest to wielkość stała charakterystyczna dla danego typu śmigłowca),

$\Delta\Omega$  – zmiana prędkości kątowej wirnika nośnego otrzymana po scałkowaniu równania ruchu obrotowego wirnika nośnego, przy czym:

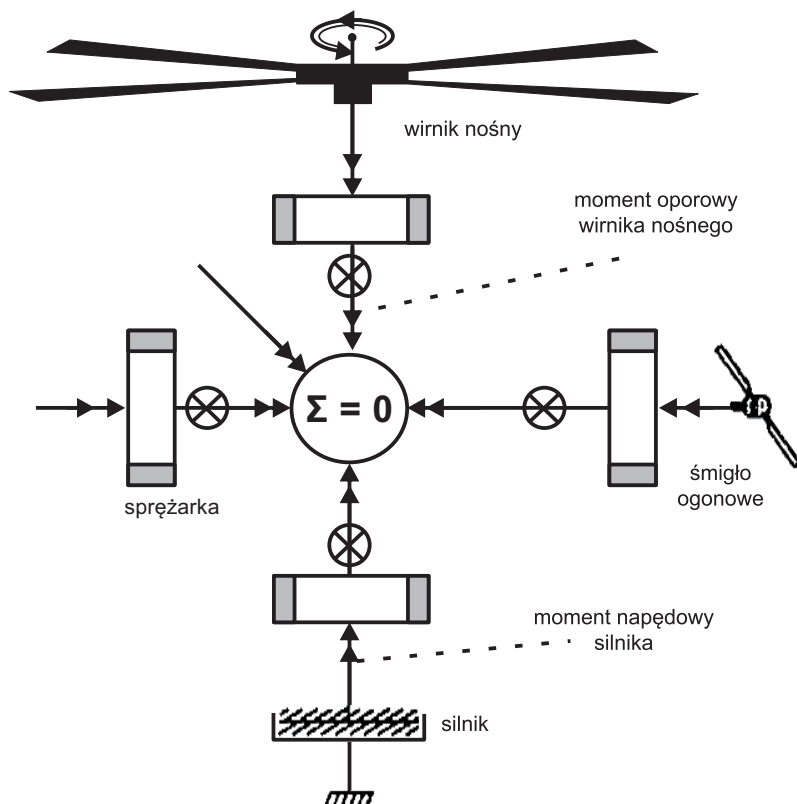
$$\Delta\Omega = \int \left[ (k_e P \eta_0 - P_{WN} - P_{so}) / I_{\Omega} \Omega \right] dt \pm R \quad (6.2)$$

gdzie:  $P$ ,  $P_{WN}$ ,  $P_{so}$  – odpowiednio oznaczają: moc silnika oraz moce pobierane przez wirnik nośny i śmigło ogonowe;  $\eta_0$  – sprawność napędu wirnika nośnego,  $k_e$  – liczba silników;  $I_{\Omega}$  – moment bezwładności wirnika nośnego względem osi jego wału,

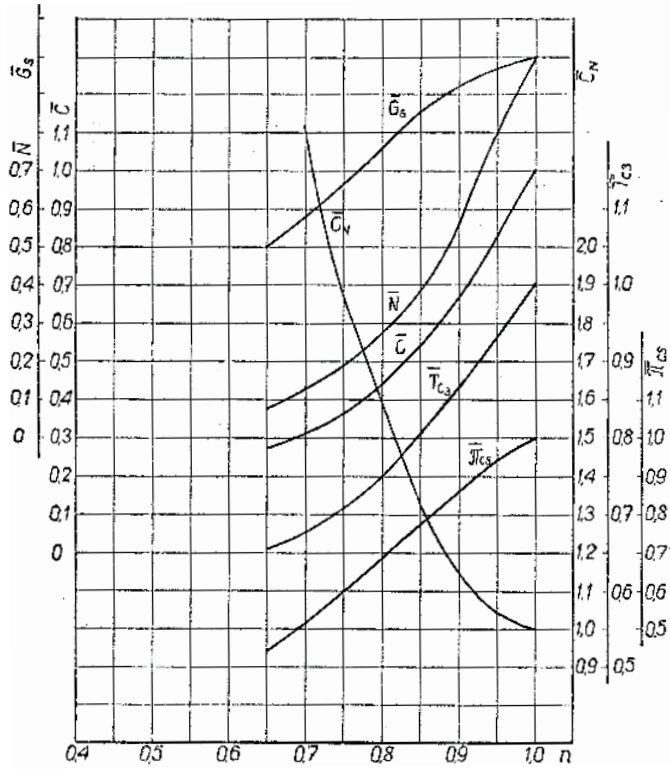
$R$  – prędkość kątowna odchyłania śmigłowca. Moc silnika jest przy tym funkcją prędkości obrotowej wirnika wytwnicy i prędkości obrotowej turbiny napędowej:

$$P = P(n_p, n_2) = P_0 + DP \quad (6.3)$$

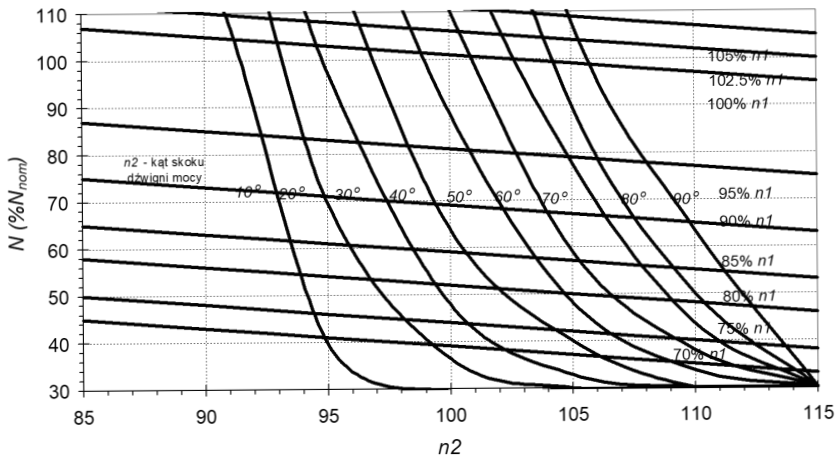
przy czym:  $P_0$  – zależność mocy silnika od prędkości obrotowej wytwnicy  $n_p$ , przy nominalnej prędkości kątowej wirnika nośnego  $W_{nom}$ . Zależność tę można wyznaczyć na podstawie charakterystyk silnika, aproksymując ją np. wielomianem, którego stopień i współczynniki dobierane są na podstawie charakterystyk silnika (rys. 6.2). Drugi składnik wyrażenia (6.3) jest poprawką uwzględniającą zmianę mocy silnika spowodowaną zmianą prędkości obrotowej oddzielnej turbiny napędowej silnika. Poprawkę tę określa się także za pomocą aproksymacji odpowiednich charakterystyk silnika (rys. 6.3).



Rys. 6.1. Schemat przepływu energii na śmigłowcu



**Rys. 6.2.** Charakterystyka stoiskowa silnika PZL-10W (w wartościach względnych) [wg 2.48]



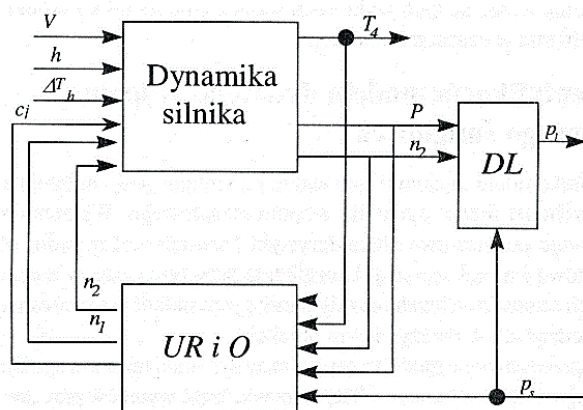
**Rys. 6.3.** Charakterystyki silnika PZL-10W (zależność prędkości obrotowej wirnika wytworniczowego od prędkości obrotowej wirnika wytworniczowego i położenia dźwigni DSS) [wg 2.48]

## 6.1. Identyfikacja modelu śmigłowcowego silnika turbinowego

Schemat funkcjonalny silnika, uwzględniając jego przeznaczenie do zastosowań w procedurach numerycznej symulacji lotu śmigłowca, przedstawiono na rys. 6.4. Model ten stanowią:

- równania określające moc  $P$ , jednostkowe zużycie paliwa  $c$  itp. w funkcji parametrów lotu i sterowania;
- równania opisujące sterowanie, m.in. równanie opisujące zmianę prędkości obrotowej wirnika wytwornicowego  $n_1$  od prędkości obrotowej wirnika napędowego  $n_2$ .

W pierwszym przypadku model stanowią równania algebraiczne, w drugim równania różnicowe lub różniczkowe zwyczajne. Wymienione parametry są wielkościami wejściowymi modelu dynamiki lotu  $DL$  (rys. 6.4)



**Rys. 6.4.** Schemat funkcjonalny modelu dynamiki zespołu napędowego śmigłowca (URiO – układy regulacji,  $DL$  model dynamiki lotu)

Moc silnika  $P$  określa zależność:

$$P = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} \quad (6.4)$$

gdzie:

- $\mathbf{A}$  – wierszowa macierz wielkości wejściowych, której wyrazami są wartości  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $V$  (prędkość lotu),  $h$  (barometryczna wysokość lotu),  $\Delta T_h$  (odchylenie temperatury powietrza od wartości standardowej na  $h$ ) itp. oraz iloczyn tych wielkości,
- $\mathbf{a}$  – wektor współczynników równania o wyrazach przyporządkowanych wyrazom macierzy  $\mathbf{A}$ .



Podstawowym celem identyfikacji jest wyznaczenie wektora  $\mathbf{a}$ , w oparciu o wyniki pomiarów na rzeczywistym obiekcie. Dobre odwzorowanie rzeczywistego obiektu jest możliwe w przypadku, gdy liczba elementów macierzy występujących w równaniu (6.4) wynosi co najmniej kilkanaście. Fakt ten stanowi istotne utrudnienie w procesie ustalania programu lotów i utrudnia realizację eksperymentu zapewniającego uzyskanie niezbędnych danych do identyfikacji modelu. W związku z tym przyjmuje się, że model jest opracowywany w kilku etapach. W każdym z tych etapów są wyznaczane wyrazy wektora  $\mathbf{a}$  w zależności od jednej (dwóch) wielkości wejściowych. Na przykład, w pierwszej kolejności wyznaczone zostaną wyrazy zależne od  $n_1$ , przy stałych wartościach pozostałych parametrów wejściowych. Moc silnika będzie opisana zależnością:

$$P_{n1} = \mathbf{A}_{n1} \cdot \mathbf{a}_{n1} \quad \mathbf{A}_{n1} = [1, n_1, n_1^2, \dots] \quad (6.5)$$

$$h, \Delta T_h, n_2, V = idem$$

W takim przypadku jest stosunkowo łatwo opracować program badań i wykonać loty pozwalające na uzyskanie niezbędnych danych do identyfikacji modelu (identyfikacja polega na wyznaczeniu elementów wektora  $\mathbf{a}_{n1}$ ). Stałą prędkość lotu, przy różnych wartościach prędkości obrotowej turbiny napędowej  $n_1$ , można uzyskać w ustalonych lotach prostoliniowych, wznoszących oraz opadających. Stałość pozostałych parametrów ( $h$  i  $\Delta T_h$ ) zapewni przyjęcie zarejestrowanych parametrów z wybranego odcinka lotu o stałej wysokości  $h$ . Stałą wartość prędkości obrotowej wirnika wytwornicowego  $n_2$  zapewni ustawienie przez pilota wartości tego parametru na pokładzie śmigłowca.

W drugim etapie określany jest np. wpływ prędkości lotu na moc silnika. Realizowany jest wówczas eksperyment polegający na lotach z różnymi prędkościami przy kilku (lub kilkunastu) stałych wartościach prędkości obrotowej wirnika napędowego  $n_1$ . Uwzględniając opisane powyżej procedury badań, moc silnika można przedstawić za pomocą następujących zależności:

$$P_{n1V} = P_{n1} + \Delta P_V \quad (6.6)$$

gdzie:

$\Delta P_y$  – poprawka uwzględniająca wpływ prędkości lotu  $V$

$$\Delta P_V = \mathbf{A}_{n1V} \cdot \mathbf{a}_{n1V}$$

$$\mathbf{A}_{n1V} = [\Delta V, (\Delta V)^2, n_1(\Delta V), \dots] \quad (6.7)$$

W analogiczny sposób można wyznaczyć model określający wpływ pozostałych parametrów ( $n_2$ ,  $h$  i  $DT_h$ ) na moc silnika. Podobnymi równaniami opisuje się również modele pozostałych parametrów pracy silnika (zużycie paliwa, temperaturę gazów za turbiną  $T_4$  itd.).

Niżej rozpatrzono wymieniony na wstępie model odwzorowujący dynamikę zmian prędkości obrotowej  $n_1$  w zależności od  $n_2$ . Rozpatrywany model przedstawiono w postaci równania różnicowego, odpowiedniej dla zastosowania identyfikacji metodą aproksymacji stochastycznej

$$n_{1,i+1} = \mathbf{A}_{dn1} \cdot \mathbf{a}_{dn1} \quad (6.8)$$

$\mathbf{A}_{dn1}$  jest wierszową macierzą parametrów wejściowych o następujących wyrazach:

$$\mathbf{A}_{dn1} = \left[ n_{1,j}, n_{1,j-1}, \dots, n_{1,j-K}, n_{2,j+1}, n_{2,j}, n_{2,j-1}, \dots, n_{2,j-K} \right]^T \quad (6.9)$$

Równanie określa jedynie dynamikę zmian  $n_1$  od  $n_2$  w określonych warunkach lotu śmigłowca ( $V$ ,  $h$  itd.), oraz nie uwzględnia wpływu przemieszczania dźwigni skoku i mocy. Uwzględnienie wpływu parametrów określających warunki lotu i przemieszczania dźwigni skoku i mocy można zrealizować w sposób analogiczny jak w przypadku mocy silnika, por. (6.5).

Występujące w (6.9) prędkości obrotowe  $n_2$  w różnych chwilach czasowych mogą być wyznaczane, analogicznie jak w [2.48], z równania różniczkowego zwykłego lub z równania różnicowego. Równanie różniczkowe określające dynamikę zmian  $n_2$  w zależności od  $n_1$  ma postać:

$$\frac{d^2 \Delta n_2}{dt^2} = K_0 + K_1 \Delta n_2 + K_2 \frac{d \Delta n_2}{dt} + K_3 \left( \frac{d \Delta n_2}{dt} \right)^2 + K_4 \left( \frac{d \Delta n_2}{dt} \right) n_2 + K_5 \Delta n_1 + K_6 \left( \frac{d \Delta n_1}{dt} \right) \quad (6.10)$$

gdzie:

- $\Delta n_2 \left[ (n_{11} - n_{12}) / n_{nom} \right] 100\%$  – procentowy przyrost prędkości obrotowej wirnika sprężarki (podany w % obrotów nominalnych);
- $\Delta n_2 = \left[ (n_{22} - n_{22}) / n_{nom} \right] 100\%$  – procentowy przyrost prędkości obrotowej turbiny napędowej (podany w % obrotów nominalnych);
- $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6$  – współczynniki uzyskane drogą identyfikacji modelu silnika. Wartości tych współczynników, zidentyfikowanych dla silnika PZL-3W wynoszą [2.48]:  $K_1 = -0,48501\text{E-}4$ ;  $K_2 = -0,54216$ ;  $K_3 = -0,15289$ ;  $K_4 = -0,81993\text{E-}02$ ;  $K_5 = -0,77395\text{E-}02$ ;  $K_6 = -0,97973\text{E-}02$ .

Równanie różnicowe opisujące tę zależność ma postać:

$$n_{2,i+1} = \mathbf{A}_{dn2} \cdot \mathbf{a}_{dn2} + M_n - M_o \quad (6.11)$$

przy czym:

$\mathbf{A}_{dn2}$  – macierz o elementach:

$$\mathbf{A}_{dn2} = \begin{bmatrix} n_{2,i}, & n_{2,i-1}, & \dots & n_{2,i-K} \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

$M$  – moment oporowy zespołu napędowego  $(\cdot)_n$  i  $(\cdot)_o$  moment oporowy wirnika nośnego, śmigła ogonowego itp.



## STATECZNOŚĆ DYNAMICZNA ŚMIGŁOWCA

### 7.1. Podstawy teoretyczne analizy stateczności dynamicznej śmigłowca

Pierwszym etapem analizy stateczności układu mechanicznego jest ustalenie, co rozumie się pod pojęciem stateczności, istnieje bowiem wiele definicji stateczności ruchu i związanych z nimi metod jej badania.

W przypadku ruchu układów mechanicznych najczęściej stateczność rozumiana jest w sensie Lapunowa.

Niech ruch układu mechanicznego jest określony przez układ równań różniczkowych zwyczajnych w postaci:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (7.1)$$

Badana ma być stateczność ruchu, należy więc ustalić, jaki ruch (rozwiązanie układu równań) będzie badany. Załóżmy, że istnieje rozwiązanie  $\xi(t)$  dla  $t \in (t_0, \infty)$ , którego stateczność ma być badana. Jeśli wszystkie rozwiązania  $\mathbf{x}(t)$  układu (7.1) spełniające warunek:

$$\|\mathbf{x}(t_0) - \xi(t_0)\| < \eta \quad (7.2)$$

dla  $t \in (t_0, \infty)$  spełniają warunek:

$$\|\mathbf{x}(t) - \xi(t)\| < \varepsilon \quad (7.3)$$

( $\varepsilon$  – dowolna liczba rzeczywista dodatnia), to rozwiązanie  $\xi(t)$  jest stateczne w sensie Lapunowa.

W rozważanym przypadku wyrażenie (7.1) odpowiada zapisowi wektorowemu związków tworzących układ nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych opisujących ruch obiektu latającego (np. samolotu, śmigłowca czy też rakiety).

Na ogół prawe strony równania (7.1) nie są jawnymi funkcjami czasu  $t$ . Rozwijając je w szereg Taylora względem  $\mathbf{x}$  w otoczeniu punktu  $\mathbf{x}_0$  otrzymamy:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{W}(\mathbf{x}) \quad (7.4)$$

gdzie:  $\mathbf{R}$  jest macierzą postaci:

$$\mathbf{R} = [R_{ij}] = \left[ \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{x}_0} \right] \quad (7.5)$$

a  $\mathbf{W}(\mathbf{x})$  jest wektorem wyrazów rzędów wyższych od pierwszego.

Można wykazać [2.31], że jeśli  $\mathbf{W}(\mathbf{x})$  spełnia pewne dodatkowe warunki, o stateczności układu nieliniowego (7.1) można wnioskować na podstawie badania stateczności układu zlinearyzowanego.

Twierdzenie to ma łatwą interpretację fizyczną. Układ zlinearyzowany zazwyczaj opisuje „małe” odchylenia od stanu równowagi. Jeżeli te odchylenia będą stateczne, a wpływ wyrazów wyższego rzędu nie będzie wprowadzał wzmocnienia zaburzeń, to będą stateczne także „duże” odchylenia od stanu równowagi opisywane przez układ nieliniowy.

Twierdzenie to ma ważne znaczenie praktyczne, gdyż analiza stateczności układów liniowych jest prostsza niż analiza stateczności układów nieliniowych.

Przyjmując, że człony  $\mathbf{W}(\mathbf{x})$  są małe, układ równań (7.4) można zapisać w postaci:

$$\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{R}\mathbf{x} = 0 \quad (7.6)$$

gdzie tzw. macierz stanu  $\mathbf{R}$  dana jest zależnością (7.5).

Ogólne rozwiązanie układu równań (7.6) ma postać:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{\lambda t} \quad (7.7)$$

gdzie  $\mathbf{x}_0$  jest tzw. wektorem własnym.

Wstawiając (7.7) do (7.6), otrzymamy:

$$[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{R}]\mathbf{x} = 0 \quad (7.8)$$

gdzie  $\mathbf{I}$  jest macierzą jednostkową, a  $\lambda$  jest tzw. wartością własną macierzy stanu  $\mathbf{R}$ .

Układ (7.8) będzie miał nietrywialne rozwiązanie, gdy:

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{R}| = 0 \quad (7.9)$$

Liniowy układ jednorodny postaci (7.6) ze stałą macierzą współczynników jest stateczny w sensie Lapunowa, gdy wszystkie wartości własne  $\lambda_i$  macierzy stanu mają niedodatnie części rzeczywiste:

$$\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.10)$$

a wartościom własnym o zerowych częściach rzeczywistych odpowiadają proste dzielniki elementarne.

Macierz  $\mathbf{R}$  na w ogólnym przypadku wymiar  $n \times n$ , więc po rozwinięciu wyznacznika (7.9) otrzymamy równanie algebraiczne  $n$ -tego stopnia względem  $\lambda$ , czyli każda ze składowych wektora  $\mathbf{x}$  będzie zawierała w ogólnym przypadku  $n$  składników. Jeżeli wszystkie wartości  $\lambda$  są różne, to np. współrzędna  $x_i$  wektora stanu  $\mathbf{x}$  będzie równa:

$$x_i = x_{i1}e^{\lambda_1 t} + x_{i2}e^{\lambda_2 t} + \dots + x_{in}e^{\lambda_n t} = \sum_{j=1}^n x_{ij}e^{\lambda_j t} \quad (7.11)$$

Wielkości  $\lambda_j$  mogą być rzeczywiste lub parami zespolone. Przykładowo, jeżeli:

$$\lambda_j = \xi_j - i \cdot \eta_j \quad \text{oraz} \quad \lambda_{j+1} = i \cdot \eta_{j+1} \quad (7.12)$$

gdzie:

$$\xi_j = \xi_{j+1} = \operatorname{Re} \lambda_j = \operatorname{Re} \lambda_{j+1}, \quad \eta_j = \eta_{j+1} = -\operatorname{Im} \lambda_j = \operatorname{Im} \lambda_{j+1}, \quad i = \sqrt{-1}$$

to odpowiednie składniki  $x_i$  mają postać:

$$x_{ij}e^{(\xi_j - i \cdot \eta_j)t} = x_{ij}e^{\xi_j t} (\cos \eta_j t - i \sin \eta_j t) \quad (7.13a)$$

oraz:

$$x_{ij+1}e^{(\xi_{j+1} + i \cdot \eta_{j+1})t} = x_{ij+1}e^{\xi_j t} (\cos \eta_j t + i \sin \eta_j t) \quad (7.13b)$$

W teorii równań różniczkowych jest dowiedzione, że jeżeli dwie funkcje są rozwiązaniami równania różniczkowego liniowego, to ich dowolna kombinacja liniowa też jest rozwiązaniem tego równania, a więc wyrażenia (7.12) mogą być przedstawione np. w postaci:

$$e^{\xi_j t} (a \cos \eta_j t + b \sin \eta_j t) = e^{\xi_j t} A \sin(\eta_j t + \Upsilon) \quad (7.14)$$

gdzie wielkości  $a$ ,  $b$ ,  $A$  i  $\Upsilon$  są nowymi stałymi bezwymiarowymi zastępującymi stałe  $x_{ij}$  i  $x_{ij+1}$ , przy czym:

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{oraz} \quad \Upsilon = \arctan(b/a)$$

Wartości w nawiasach (7.13) są okresowymi funkcjami czasu  $t$ , przy czym okres:

$$T_j = 2\pi / \eta_j \quad (7.14a)$$

a częstotliwość:

$$f_j = 1 / T_j = \eta_j / 2\pi \quad (7.14b)$$

W przypadku istnienia wielokrotnych wartości  $\lambda_j$ , postać wyrażenia (7.11) ulega odpowiedniej zmianie, np. jeżeli  $\lambda_1 = \lambda_2$ , to (7.11) przybiera formę:

$$x_i = (x_{i1} + x_{i2} \bar{t}) e^{\lambda_1 t} + x_{i3} e^{\lambda_3 t} + \dots + x_{in} e^{\lambda_n t} \quad (7.15)$$

Każdej wartości  $\lambda_j$  odpowiada więc określony charakter ruchu (rosnący lub malejący, oscylacyjny lub monotoniczny) oraz określony zbiór składowych wektora  $\mathbf{x}_{0j}$ , czyli tzw. postać ruchu.

Dla każdej z  $n$  wartości własnych  $\lambda_j$  można określić stosunek  $n-1$  składowych  $\mathbf{x}_{0j}$  do  $n$ -tej, czyli tzw. składowe unormowane wektora własnego  $\mathbf{x}_{0j}$  odpowiadającego wartości własnej  $\lambda_j$ .

Przykładowo, wstawiając w (7.9)  $x_i = x_k = 1$  i rozwiązując dla  $\lambda_j = \lambda_m$ , otrzymamy następującą postać wektora własnego  $\mathbf{x}_{0m}$  o składowych unormowanych względem  $x_k$ :

$$\mathbf{x}_{0m} = \left[ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_k \end{pmatrix}_m, \begin{pmatrix} x_2 \\ x_k \end{pmatrix}_m, \dots, \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ x_k \end{pmatrix}_m, 1, \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{pmatrix}_m, \dots, \begin{pmatrix} x_n \\ x_k \end{pmatrix}_m \right]^T \quad (7.16)$$

przy czym zespolonym wartościom  $\lambda_m$  w ogólnym przypadku odpowiadają zespolone wartości składowych.

Aby określić ogólną postać ruchów własnych (np. śmigłowca po zaburzeniu lotu ustalonego), należy wyznaczyć wektory własne  $\mathbf{x}_{0j}$  dla wszystkich  $n$  wartości własnych  $\lambda_j$ , a następnie znając zaburzenia początkowe, wyznaczyć  $n$  wartości wektora stanu  $\mathbf{x}$  (7.7).

W wielu przypadkach, np. na potrzeby analizy stateczności dynamicznej śmigłowca lub samolotu, wystarczy określić tylko wartości własne  $\lambda_j$  macierzy stanu  $\mathbf{R}$ ,



a w celu identyfikacji ruchów także wektory własne  $\mathbf{x}_{0j}$ . Przypadki te będą opisane szerzej w dalszej części tego rozdziału.

## 7.2. Jakościowa analiza stateczności

Aby sprawdzić spełnienie warunku (7.10), nie trzeba rozwiązywać równania charakterystycznego, a wystarczy jedynie zanalizować współczynniki tego równania, można bowiem wykazać, że pierwiastki równania algebraicznego  $n$ -tego stopnia:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (7.17)$$

nie mają dodatnich części rzeczywistych, jeżeli spełnione są kryteria Routha–Hurwitza:

1. wszystkie współczynniki:

$$a_i > 0, \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (7.18)$$

równania (7.17) są dodatnie oraz

2. dodatnie wartości mają wyróżniki w postaci:

$$\begin{aligned} R_1 &= a_{n-1} > 0 \\ R_2 &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0 \\ R_3 &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} \end{vmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (7.19)$$

itd., aż do  $R_n$ , przy czym w powyższych wyrażeniach współczynniki z indeksami większymi od  $n$ , lub mniejszymi od 0 są równe zero.

Jako przykład rozpatrzono równanie IV stopnia, które po podzieleniu przez współczynnik przy wyrazie w najwyższej potędze przybiera postać:

$$x^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0 \quad (7.20)$$

gdzie, stosując zapis analogiczny jak w (7.16):

$$B = \frac{a_3}{a_4}, \quad C = \frac{a_2}{a_4}, \quad D = \frac{a_1}{a_4}, \quad E = \frac{a_0}{a_4} \quad (7.21)$$

Zgodnie z kryteriami Routha–Hurwitza pierwiastki równania (7.20) nie będą miały dodatnich części rzeczywistych, gdy:

$$B, C, D, E > 0 \quad (7.21a)$$

oraz:

$$R_1 = B > 0, \quad (7.21b)$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} B & 1 \\ D & C \end{vmatrix} = BC - D > 0, \quad (7.21c)$$

$$R_3 = \begin{vmatrix} B & 1 & 0 \\ D & C & B \\ 0 & E & D \end{vmatrix} = BCD - B^2E - D^2 > 0, \quad (7.21d)$$

$$R_4 = \begin{vmatrix} B & 1 & 0 & 0 \\ D & C & B & 1 \\ 0 & E & D & C \\ 0 & 0 & 0 & E \end{vmatrix} = R_3E > 0, \quad (7.21e)$$

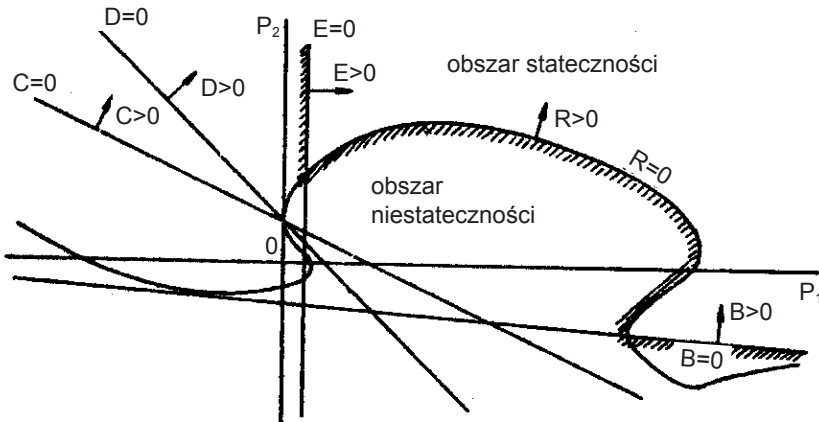
Zauważmy, że nie wszystkie z powyższych wyrażeń muszą być obliczane, np. z warunku  $B > 0$  (7.21a), wynika  $R_1 > 0$  (7.21b), z warunku  $R_3 = D(BC - D) - B^2E > 0$  (7.21d) i nierówności (7.21a) wynika  $R_2 > 0$  (7.21c), zaś nierówność (7.21e) obrazuje łatwą do udowodnienia zależność ogólną:

$$R_n = a_0 R_{n-1} \quad (7.22)$$

W świetle powyższych rozważań warunki stateczności układu, którego równanie charakterystyczne ma postać (7.11), ulegają redukcji do nierówności (7.21a) i (7.21d).

Zazwyczaj jakościowa analiza stateczności dynamicznej jest stosowana do wyznaczania obszaru stateczności układu w funkcji wybranych parametrów charakteryzujących konstrukcję, ruch lub ośrodek, w którym układ się porusza.

Na rys. 7.1 jest przedstawiony przykład wyznaczania obszaru stateczności w funkcji zmian parametrów:  $p_1$  i  $p_2$ .



Rys. 7.1. Przykładowe granice obszarów stateczności

### 7.3. Stateczność dynamiczna śmigłowca

Klasyczne podejście analizy stateczności dynamicznej zilustrujemy na przykładzie śmigłowca. Równania ruchu śmigłowca traktowanego jako obiekt o sześciu stopniach swobody, (tzw. „samolotowy model śmigłowca”) można przedstawić w następującej formie (5.58):

$$m \begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} 0 & -R & Q \\ R & 0 & -P \\ -Q & P & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -mg \sin \Theta \\ mg \cos \Theta \sin \Phi \\ mg \cos \Phi \cos \Theta \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

oraz równania momentów:

$$\begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ -I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -R & Q \\ R & 0 & -P \\ -Q & P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} \quad (7.24)$$

W równaniach (7.23) i (7.24) występuje osiem niewiadomych funkcji czasu: składowe  $U, V, W$  prędkości liniowej  $\mathbf{V}$ , składowe  $P, Q, R$  prędkości kątowej  $\mathbf{\Omega}$  oraz kąty: pochylenia  $\Theta$  i przechylenia  $\Phi$ . Dwa dodatkowe równania otrzymamy, uwzględniając związki między składowymi prędkości kątowej  $\mathbf{\Omega}$  układzie  $Oxyz$  oraz kątami  $\Theta$  i  $\Phi$  i ich pochodnymi względem czasu. Na podstawie zależności (7.33) otrzymano:

$$\dot{\Theta} = Q \cos \Phi - R \sin \Phi \quad (7.25)$$

oraz:

$$\dot{\Phi} = P + Q \sin \Phi \tan \Theta + R \cos \Phi \tan \Theta \quad (7.26)$$

Zależności (7.23), (7.24), (7.25) i (7.26) tworzą układ ośmiu nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych opisujących ruch śmigłowca. W ogólnym przypadku układ ten może być rozwiązany tylko metodami numerycznymi. W praktyce układ bywa wykorzystywany do symulacji ruchu śmigłowca. Zakładając, że prędkości kątowe pochylania, przechylania i odschlania śmigłowca są równe zero, oraz przyjmując, że pochodne względem czasu parametrów stanu są równe zero, układ równań różniczkowych opisujących dynamikę lotu śmigłowca staje się układem nieliniowych równań algebraicznych, który może być wykorzystany do obliczania parametrów lotu ustalonego.

### 7.3.1. Pochodne aerodynamiczne śmigłowca

Działające na śmigłowiec siły i momenty aerodynamiczne nazywane także obciążeniami aerodynamicznymi, pochodzą od oddziaływań powietrza na wirujące łopaty wirnika nośnego, śmigła ogonowego, kadłuba. Obciążenia aerodynamiczne są funkcjami trzech grup parametrów:

- a) fizycznych właściwości powietrza otaczającego śmigłowiec, np.: gęstości, temperatury, lepkości i turbulencji;
- b) geometrycznych charakterystyk śmigłowca, np.: promienia, cięciwy i profili łopaty wirnika nośnego, wymiarów kadłuba, jakości powierzchni opływających;
- c) kinematycznych parametrów lotu, np. prędkości i przyspieszenia, kątów natarcia i ślizgu, „historii” ruchu.

Zależność obciążeń aerodynamicznych od tak wielu parametrów bardzo utrudnia wyznaczanie sił i momentów, zwłaszcza że ogólnie zależności te mają nieliniowy i niestacjonarny charakter. Szczególnie złożony jest opływ wirnika nośnego wirnika, gdyż podczas lotu z poziomą składową prędkości końca łopat „nacierających” mogą się znajdować w obszarze krytycznych liczb Macha, a bliższe piasty części łopat „powracających” znajdują się w obszarze przepływu odwrotnego. Dodatkowe trudności wynikają z istnienia indukowanego przez wirnik nośny śladu wirowego o skomplikowanej strukturze i jego interferencji aerodynamicznej z łopatami wirnika, kadłubem, statecznikiem poziomym, śmigłem ogonowym i ewentualnymi innymi elementami konstrukcyjnymi śmigłowca. Dlatego mimo prowadzonych intensywnych badań opływu wirnika, w obliczeniach wstępnych siły aerodynamiczne są wyznaczane w oparciu o liczne założenia upraszczające, dotyczące zwłaszcza stacjonarności oraz liniowego charakteru zależności obciążeń aerodynamicznych od zmian parametrów lotu. Są to przybliżenia uzasadnione tylko w przypadkach niezbyt szybkich zmian ruchu i małych odchyłeń od warunków lotu ustalonego.

Przy takich założeniach siły i momenty aerodynamiczne można przedstawić jako liniowe funkcje przyrostów zmiennych stanu, to znaczy przyrostów  $dU$ ,  $dV$ ,  $dW$  składowych prędkości  $\mathbf{V}$  środka masy śmigłowca i przyrostów  $dP$ ,  $dQ$ ,  $dR$  składowych kątovej prędkości  $\Omega$  śmigłowca w ruchu kulistym dokoła środka ciężkości. W przypadku momentu pochylającego  $M$ , którego wartość zależy także od siły na stateczniku poziomym, należy jeszcze uwzględnić opóźnienie w dojściu odchylnych przez wirnik nośny strug do statecznika, zależne od prędkości zmian ciągu wirnika, proporcjonalnej do przyspieszenia  $\dot{W}$ . Z matematycznego punktu widzenia powyższe rozumowanie można utożsamiać z rozłożeniem obciążeń aerodynamicznych w szereg Taylora względem zmiennych stanu w otoczeniu punktu odpowiadającego lotowi ustalonemu i zachowaniem tylko członków pierwszego rzędu.

Siły i momenty aerodynamiczne przybierają więc następującą postać:

$$\begin{cases} X_a = X_1 + \frac{\delta X}{\delta U} dU + \frac{\delta X}{\delta V} dV + \frac{\delta X}{\delta W} dW + \frac{\delta X}{\delta P} dP + \frac{\delta X}{\delta Q} dQ + \frac{\delta X}{\delta R} dR + X_0 \\ Y_a = Y_1 + \frac{\delta Y}{\delta U} dU + \frac{\delta Y}{\delta V} dV + \frac{\delta Y}{\delta W} dW + \frac{\delta Y}{\delta P} dP + \frac{\delta Y}{\delta Q} dQ + \frac{\delta Y}{\delta R} dR + Y_0 \\ Z_a = Z_1 + \frac{\delta Z}{\delta U} dU + \frac{\delta Z}{\delta V} dV + \frac{\delta Z}{\delta W} dW + \frac{\delta Z}{\delta P} dP + \frac{\delta Z}{\delta Q} dQ + \frac{\delta Z}{\delta R} dR + Z_0 \end{cases} \quad (7.27a)$$

$$\begin{cases} L_a = L_1 + \frac{\delta L}{\delta U} dU + \frac{\delta L}{\delta V} dV + \frac{\delta L}{\delta W} dW + \frac{\delta L}{\delta P} dP + \frac{\delta L}{\delta Q} dQ + \frac{\delta L}{\delta R} dR + L_0 \\ M_a = M_1 + \frac{\delta M}{\delta \dot{W}} \dot{W} + \frac{\delta M}{\delta U} dU + \frac{\delta M}{\delta V} dV + \frac{\delta M}{\delta W} dW + \frac{\delta M}{\delta P} dP + \frac{\delta M}{\delta Q} dQ + \\ + \frac{\delta M}{\delta R} dR + M_0 \\ N_a = N_1 + \frac{\delta N}{\delta U} dU + \frac{\delta N}{\delta V} dV + \frac{\delta N}{\delta W} dW + \frac{\delta N}{\delta P} dP + \frac{\delta N}{\delta Q} dQ + \frac{\delta N}{\delta R} dR + N_0 \end{cases} \quad (7.27b)$$

gdzie wskaźnik „1” oznacza wartość sił i momentów w locie ustalonym, a wskaźnik „0” – siły i momenty powstałe od przyrostów wychyleń sterów w stosunku do wartości potrzebnych do lotu ustalonego. W przypadku lotu ze sterami „trzymałymi” wszystkie człony z indeksem „0” stają się równe zero, natomiast przy zmiennym sterowaniu, obciążenia aerodynamiczne, analogicznie jak poprzednio, są wyrażone w postaci:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0 = \frac{\delta X}{\delta \Theta_0} d\Theta_0 + \frac{\delta X}{\delta A} dA_1 + \frac{\delta X}{\delta B} dB_1 + \frac{\delta X}{\delta \Theta_{so}} d\Theta_{so} \\ Y_0 = \frac{\delta Y}{\delta \Theta_0} d\Theta_0 + \frac{\delta Y}{\delta A} dA_1 + \frac{\delta Y}{\delta B} dB_1 + \frac{\delta Y}{\delta \Theta_{so}} d\Theta_{so} \\ Z_0 = \frac{\delta Z}{\delta \Theta_0} d\Theta_0 + \frac{\delta Z}{\delta A} dA_1 + \frac{\delta Z}{\delta B} dB_1 + \frac{\delta Z}{\delta \Theta_{so}} d\Theta_{so} \\ L_0 = \frac{\delta L}{\delta \Theta_0} d\Theta_0 + \frac{\delta L}{\delta A} dA_1 + \frac{\delta L}{\delta B} dB_1 + \frac{\delta L}{\delta \Theta_{so}} d\Theta_{so} \\ M_0 = \frac{\delta M}{\delta \Theta_0} d\Theta_0 + \frac{\delta M}{\delta A} dA_1 + \frac{\delta M}{\delta B} dB_1 + \frac{\delta M}{\delta \Theta_{so}} d\Theta_{so} \\ N_0 = \frac{\delta N}{\delta \Theta_0} d\Theta_0 + \frac{\delta N}{\delta A} dA_1 + \frac{\delta N}{\delta B} dB_1 + \frac{\delta N}{\delta \Theta_{so}} d\Theta_{so} \end{array} \right. \quad (7.28)$$

gdzie:

$\Theta_0$  – kąt skoku ogólnego wirnika nośnego;

$A_1$  i  $B_1$  – kąty skoku cyklicznego: poprzecznego  $A_1$  i podłużnego  $B_1$ ;

$\Theta_{so}$  – kąt skoku śmigła ogonowego.

Występujące w (7.27) wielkości:  $\delta X/\delta U...$   $\delta N/\delta R$  oraz w (7.28) wielkości:  $\delta X/\delta \Theta_0...$   $\delta N/\delta \Theta_{so}$  noszą nazwę pochodnych aerodynamicznych, np. występująca w (7.27)  $\delta M/\delta P$  jest pochodną aerodynamiczną momentu pochyłającego względem prędkości kątowej przechylania, a występująca w (7.28)  $\delta N/\delta \Theta_{so}$  jest pochodną aerodynamiczną momentu odchylającego względem kąta skoku śmigła ogonowego. Metody obliczeń pochodnych aerodynamicznych są podane w rozdziale 8.

### 7.3.2. Linearyzacja równań ruchu względem małych zaburzeń lotu ustalonego

W wielu praktycznie spotykanych przypadkach lotu śmigłowca, np. wejście w podmuch, a także do celów badania stateczności, wystarczy rozpatrywać ruch śmigłowca w wyniku małych zakłóceń jednostajnego lotu prostoliniowego.

Oznaczając indeksem „1” wielkość przed zakłóceniem, a małą literą mały przyrost tej wielkości, chwilowe wartości klimatycznych parametrów lotu można wyrazić w postaci:

$$\left\{ \begin{array}{l} U = U_1 + u, \quad V = V_1 + v, \quad W = W_1 + w \\ P = P_1 + p, \quad Q = Q_1 + q, \quad R = R_1 + r \\ \Theta = \Theta_1 + \theta, \quad \Phi = \Phi_1 + \varphi \end{array} \right. \quad (7.29)$$

oraz pochodne:

$$\begin{cases} dU = u, \dots, & d\Phi = \varphi, \dots, & d\Theta_{so} = \vartheta_{so} \\ \dot{U} = \dot{u}, \dots, & \dot{R} = \dot{r}. \end{cases} \quad (7.30)$$

Pamiętając, że dla małych kątów,  $\varphi$ :  $\sin \varphi \approx \varphi$ ,  $\cos \varphi \approx 1$  otrzymamy:

$$\begin{cases} \sin \Phi = \sin(\Phi_1 + \varphi) \cong \sin \Phi_1 + \varphi \cos \Phi_1 \\ \cos \Phi = \cos(\Phi_1 + \varphi) \cong \cos \Phi_1 - \varphi \sin \Phi_1 \end{cases} \quad (7.31)$$

Gdy lot ustalony jest prostoliniowym ruchem jednostajnym:

$$P_1 = Q_1 = R_1 = 0, \quad \Psi_1 = 0, \quad L_1 = M_1 = N_1 = 0 \quad (7.32)$$

oraz na mocy (7.24):

$$\begin{cases} X_1 = mg \sin \Theta_1 \\ Y_1 = -mg \cos \Theta_1 \sin \Phi_1 \\ Z_1 = -mg \cos \Theta_1 \cos \Phi_1 \end{cases} \quad (7.33)$$

Zapisując pochodne aerodynamiczne w skończony sposób:

$$\frac{\delta X}{\delta U} = X_u, \dots, \quad \frac{\delta M}{\delta R} = M_r, \dots, \quad \frac{\delta N}{\delta \Theta_{so}} = N_{\Theta_{so}} \quad (7.34)$$

oraz uwzględniając zależności (7.29)÷(7.33) i pomijając małe wyższych rzędów (takich jak:  $uv$ ,  $pq$ ,  $r\vartheta$  itp.); nieliniowe równania różniczkowe zwyczajne (7.23)÷(7.26) opisujące dynamikę lotu śmigłowca można zlinearyzować i zapisać w następującej formie:

$$\begin{aligned} & (\dot{u} + W_1 q - V_1 r) - X_u u - X_v v - X_w w - X_p p - X_q q - X_r r + mg \vartheta \cos \Theta_1 = X_0 \\ & m(\dot{v} + U_1 r - W_1 p) - Y_u u - Y_v v - Y_w w - Y_p p - Y_q q - Y_r r + \\ & \quad + mg \vartheta \sin \Theta_1 \sin \Phi_1 - mg \varphi \cos \Theta_1 \cos \Phi_1 = Y_0 \\ & m(\dot{w} + V_1 p - U_1 q) - Z_u u - Z_v v - Z_w w - Z_p p - Z_q q - Z_r r + \\ & \quad + mg \vartheta \cos \Theta_1 \sin \Theta_1 - mg \varphi \cos \Theta_1 \sin \Phi_1 = Z_0 \\ & I_x \dot{p} - I_{zy} \dot{q} - I_{xz} \dot{r} - L_u u - L_v v - L_w w - L_p p - L_q q - L_r r = L \\ & I_y \dot{q} - I_{xy} \dot{p} - M_w \dot{w} - M_u u - M_v v - M_w w - M_p p - M_q q - M_r r = M \\ & z \dot{r} - I_{xz} \dot{p} - I_{yz} \dot{q} - N_u u - N_v v - N_w w - N_p p - N_q q - N_r r = N \\ & \dot{\vartheta} - q \cos \Phi_1 + r \sin \Phi_1 = 0 \\ & \dot{\varphi} \cos \Theta_1 - p \cos \Theta_1 - q \sin \Theta_1 \sin \Phi_1 - r \cos \Phi_1 \sin \Theta_1 = 0 \end{aligned} \quad (7.35)$$

Związki (7.35) tworzą układ ośmiu liniowych równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach. Niewiadomymi funkcjami są (zmiennymi stanu) są:  $u, v, w, p, q, r, \vartheta, \varphi$ .

### 7.3.2.1. Bezwymiarowa postać równań zaburzonego ruchu śmigłowca

W wielu przypadkach, np. w celu porównywania ze sobą śmigłowców o podobnych układach, ale o różnych wymiarach, wygodne jest stosowanie w równaniach ruchu współczynników bezwymiarowych, gdyż otrzymywane wyniki są tego samego rzędu niezależnie od wielkości śmigłowca. Jako wielkości odniesienia przyjmuje się:

- a) jednostka długości – promień  $R$  łopaty wirnika nośnego,
- b) jednostka powierzchni – pole powierzchni łopat wirnika nośnego  
 $\rho R^2 \sigma = A_{WN} \sigma$ ,
- c) jednostka prędkości liniowej – prędkość końców łopat wirnika nośnego w ruchu obrotowym  $V_T = \Omega R$ ,

d) jednostka czasu, „czas aerodynamiczny”  $t_a = \frac{m}{\rho A_{WN} \sigma V_T}$ , (7.36)

e) bezwymiarowa masa, tzw. względna gęstość śmigłowca  $\mu_o = \frac{m}{\rho A_{WN} \sigma R} = t_a \Omega$ ,

f) bezwymiarowy ciąg wirnika nośnego  $t_c = \frac{mg}{\rho A_{WN} \sigma V_T^2}$ . (7.37)

Występujące w równaniach (7.35) ruchu śmigłowca wielkości przekształcania się do postaci bezwymiarowej według następujących zasad:



Tabela 7.1

## Sposoby ubezwymiarowania równań ruchu śmigłowca

Lp.	Wielkość fizyczna	Wielkość odniesienia	Przykład
1.	Prędkość liniowa: $u, v, w, U, V, W$	$V_T$	$\bar{u} = u / V_T, \bar{U}_1 = U_1 / V_T$
2.	Prędkość kątowa $p, q, r, P, Q, R$	$\Omega$	$\bar{p} = p / \Omega$
3.	Czas $t$	$t_a$	$\bar{t} = t / t_a$
4.	Moment bezwładności $I_x, I_y, I_z$	$mR^2$	$i_x = I_x / mR^2$
5.	Moment dewiacji $I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$	$mR^2$	$i_{xy} = I_{xy} / mR^2$
6.	Pochodne aerodynamiczne: – sił względem prędkości liniowych $X_u, \dots, Z_w$ – sił względem prędkości kątowych $X_p, \dots, Z_r$ – momentów względem prędk. linio- wych $L_u, \dots, N_w$ – momentów względem prędkości kąt- owych $L_p, \dots, N_r$ – momentów względem przyspieszeń liniowych $M_{\dot{w}}$	$\rho A_{WN} s V_T$ $\rho A_{WN} s R V_T$ $\rho A_{WN} s R V_T$ $\rho A_{WN} \delta s R^2 V_T$ $\rho A_{WN} s R^2$	$x_u = X_u / \rho A_{WN} s V_T$ $x_p = X_p / \rho A_{WN} s R V_T$ $l_u = L_u / \rho A_{WN} s R V_T$ $l_p = L_p / \rho A_{WN} s R^2 V_K$ $m_{\dot{w}} = M_{\dot{w}} / \rho A_{WN} \sigma R^2$
7.	Składowa obciążeń aerodynamicznych sterowania: – sił $X_0, Y_0, Z_0$ – momentów $L_0, M_0, N_0$	$\rho A_{WN} \sigma V_T^2$ $\rho A_{WN} \sigma R V_T^2$	$x_0 = X_0 / \rho A_{WN} \sigma V_K^2$ $l_0 = L_0 / \rho A_{WN} \sigma R V_T^2$

Dzieląc w układzie (7.35) trzy pierwsze równania (sił) przez  $\rho A \sigma V_K^2$ , a trzy następne (momentów) przez  $\rho A \sigma R V_K^2$  i mnożąc dwa ostatnie (związki kinematyczne) przez  $t_a$  oraz stosując przyjęte wyżej oznaczenia, otrzymamy bezwymiarowe równania ruchu śmigłowca w następującej postaci:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \frac{d\bar{u}}{d\bar{t}} - x_u \bar{u} - x_v \bar{v} - x_w \bar{w} - x_p \bar{p} + (\mu_0 \bar{W}_1 - x_q) \bar{q} - (\mu_0 \bar{V}_1 + x_r) \bar{r} + t_c \cos \Theta_1 \vartheta = x_0, \\
 & \frac{d\bar{v}}{d\bar{t}} - y_u \bar{u} - y_v \bar{v} - y_w \bar{w} - (\mu_0 \bar{W}_1 + y_p) \bar{p} - y_q \bar{q} + (\mu_0 \bar{U}_1 - y_r) \bar{r} + t_c \sin \Theta_1 \sin \Phi_1 \vartheta - t_c \cos \Theta_1 \sin \Phi_1 \varphi = y_0, \\
 & \frac{d\bar{w}}{d\bar{t}} - z_u \bar{u} - z_v \bar{v} - z_w \bar{w} + (\mu_0 \bar{V}_1 - z_p) \bar{p} - (\mu_0 \bar{U}_1 + z_q) \bar{q} - z_r \bar{r} + t_c \cos \Phi_1 \sin \Theta_1 \vartheta + t_c \cos \Theta_1 \sin \Phi_1 \varphi = z_0, \\
 & \frac{d\bar{p}}{d\bar{t}} - \frac{i_{xy}}{i_x} \frac{d\bar{q}}{d\bar{t}} - \frac{i_{xz}}{i_x} \frac{d\bar{r}}{d\bar{t}} - \frac{l_u}{i_x} \bar{u} - \frac{l_v}{i_x} \bar{v} - \frac{l_w}{i_x} \bar{w} - \frac{l_p}{i_x} \bar{p} - \frac{l_q}{i_x} \bar{q} - \frac{l_r}{i_x} \bar{r} = \bar{l}_0, \\
 & -\frac{m_w}{i_y \mu_0} \frac{d\bar{w}}{d\bar{t}} - \frac{i_{xy}}{i_y} \frac{d\bar{p}}{d\bar{t}} + \frac{d\bar{q}}{d\bar{t}} - \frac{i_{yz}}{i_y} \frac{d\bar{r}}{d\bar{t}} - \frac{m_u}{i_y} \bar{u} - \frac{m_v}{i_y} \bar{v} - \frac{m_w}{i_y} \bar{w} - \frac{m_p}{i_y} \bar{p} - \frac{m_q}{i_y} \bar{q} - \frac{m_r}{i_y} \bar{r} = \bar{m}_0, \\
 & -\frac{i_{xz}}{i_z} \frac{d\bar{p}}{d\bar{t}} - \frac{i_{xz}}{i_z} \frac{d\bar{q}}{d\bar{t}} + \frac{d\bar{r}}{d\bar{t}} - \frac{n_u}{i_z} \bar{u} - \frac{n_v}{i_z} \bar{v} - \frac{n_w}{i_z} \bar{w} - \frac{n_p}{i_z} \bar{p} - \frac{n_q}{i_z} \bar{q} - \frac{n_r}{i_z} \bar{r} = n_0, \\
 & \frac{d\vartheta}{d\bar{t}} - \mu_0 \bar{q} \cos \Phi_1 + \mu_0 \bar{r} \sin \Phi_1 = 0, \\
 & \frac{d\varphi}{d\bar{t}} - \mu_0 \bar{p} - \mu_0 \bar{q} \sin \Phi_1 \tan \Phi_1 - \mu_0 \bar{r} \cos \Phi_1 \tan \Phi_1 = 0.
 \end{aligned} \right. \quad (7.38)$$

Układ (7.38) można zapisać w formie macierzowej:

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{F}_0 \quad (7.39)$$

gdzie:

$$\dot{\mathbf{x}} = \left[ \frac{d\bar{u}}{d\bar{t}}, \frac{d\bar{v}}{d\bar{t}}, \frac{d\bar{w}}{d\bar{t}}, \frac{d\bar{p}}{d\bar{t}}, \frac{d\bar{q}}{d\bar{t}}, \frac{d\bar{r}}{d\bar{t}}, \frac{d\vartheta}{d\bar{t}}, \frac{d\varphi}{d\bar{t}} \right]^T \quad (7.40)$$

$$\mathbf{x} = \left[ \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \vartheta, \varphi \right]^T \quad (7.41)$$

$$\mathbf{F}_0 = \left[ x_0, y_0, z_0, \bar{l}_0, \bar{m}_0, \bar{n}_0, 0, 0 \right]^T \quad (7.42)$$

przy czym  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  są macierzami kwadratowymi o wymiarach  $8 \times 8$ , zaś następujące elementy tych macierzy mają wartości różne od zera:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = a_{55} = a_{66} = a_{77} = a_{88} = 1;$$

$$a_{45} = -i_{zy} / i_z, \quad a_{46} = -i_{xz} / i_x, \quad a_{53} = -m_w / i_y \mu_0, \quad a_{54} = -i_{xy} / i_y, \quad a_{56} = i_{yz} / i_y;$$

$$a_{64} = -i_{xz} / i_z, \quad a_{65} = -i_{yz} / i_z;$$

$$b_{11} = -x_u, \quad b_{12} = -x_v, \quad b_{13} = -x_w, \quad b_{14} = x_p, \quad b_{15} = \mu_0 \bar{W}_1 - x_q;$$

$$b_{16} = -(\mu_0 \bar{V}_o + x_r), \quad b_{17} = t_c \cos \Theta_1;$$

$$b_{21} = -y_u, \quad b_{22} = -y_r, \quad b_{23} = -y_w, \quad b_{24} = -(\mu_0 \bar{W}_1 + y_p), \quad b_{25} = -y_q,$$

$$b_{26} = \mu_0 \bar{U}_1 - y_r, \quad b_{27} = t_c \sin \Theta_1 \sin \Phi_1, \quad b_{28} = -t_c \cos \Theta_1 \cos \Phi_1,$$

$$b_{31} = -z_u, \quad b_{32} = -z_r, \quad b_{33} = -z_w, \quad b_{34} = \mu_0 \bar{V}_1 - z_p, \quad b_{35} = -(\mu U_1 + z_q),$$

$$b_{36} = -z_r, \quad b_{37} = t_c \cos \Phi_1 \sin \Theta_1 \sin \Phi_1,$$

$$b_{41} = -l_u / i_x, \quad b_{42} = -l_v / i_x, \quad b_{43} = l_w / i_x, \quad b_{44} = -l_p / i_x, \quad b_{45} = -l_q / i_x, \quad b_{46} = -l_r / i_x,$$

$$b_{51} = -m_u / i_y, \quad b_{52} = -m_r / i_y, \quad b_{53} = -m_w / i_y, \quad b_{54} = -m_o / i_y, \quad b_{55} = -m_q / i_y, \quad b_{56} = -m_r / i_y,$$

$$b_{61} = -n_u / i_z, \quad b_{62} = -n_r / i_z, \quad b_{63} = -n_p / i_z, \quad b_{64} = -n_p / i_z, \quad b_{65} = -n_q / i_z, \quad b_{66} = -n_r / i_z,$$

$$b_{75} = -\mu_0 \cos \Phi_1, \quad b_{76} = \mu_0 \sin \Phi_1, \quad b_{84} = -\mu_0, \quad b_{85} = -\mu_0 \sin \Phi_1 \tan \Theta_1, \quad b_{86} = -\mu_0 \cos \Phi_1 \tan \Theta_1$$

### 7.3.2.2. Rozwiązanie zlinearyzowanego układu równań zaburzonego ruchu śmigłowca

Jak już wspomniano na początku tego rozdziału, rozwiązanie układu równań (7.39) jest sumą rozwiązania ogólnego układu uproszczonego (bez prawych stron) i rozwiązania szczególnego układu pełnego. To ostatnie zależy od wektora  $\mathbf{F}_0$  i w analizie ruchu śmigłowca (czy też innego obiektu latającego) odgrywa rolę głównie przy badaniu „odpowiedzi” śmigłowca na wychylenia organów sterowania i zaburzeniach. Sprawa ta będzie opisana szerzej w dalszej części tego punktu. Tutaj zajmiemy się tylko rozwiązaniem ogólnym układu jednorodnego w postaci:

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{x} = 0 \quad (7.43)$$

Zakładając, że macierz  $\mathbf{A}$  nie jest osobiłwa (w praktyce tak zwykle jest) i mnożąc lewostronnie (7.43) przez  $\mathbf{A}^{-1}$  otrzymamy:

$$\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{R}\mathbf{x} = 0 \quad (7.44)$$

gdzie tzw. macierz stanu:

$$\mathbf{R} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad (7.45)$$

Dalsze etapy rozwiązania układu równań (7.45) zostały podane w punkcie 7.1.1 – zależności (7.7)÷(7.16). W naszym przypadku macierz  $\mathbf{R}$  na wymiar  $8 \times 8$ , więc po rozwinięciu wyznacznika (7.9) otrzymamy równanie algebraiczne 8 stopnia względem  $\lambda$ , czyli każda ze składowych wektora  $\mathbf{x}$  (7.44) będzie zawierała w ogólnym

przypadku osiem składników. Jeżeli wszystkie wartości  $\lambda$  są różne, to np. bezwymiarowa prędkość  $\bar{u}$  będzie:

$$\bar{u} = \bar{u}_1 e^{\lambda_1 \bar{t}} + \bar{u}_2 e^{\lambda_2 \bar{t}} + \dots + \bar{u}_8 e^{\lambda_8 \bar{t}} = \sum_{j=1}^{j=8} \bar{u}_j e^{\lambda_j \bar{t}} \quad (7.46)$$

Wielkości  $\lambda_j$  mogą być rzeczywiste i wtedy składniki  $\bar{u}_j \cdot e^{\lambda_j \bar{t}}$  będą monotonicznymi funkcjami bezwymiarowego czasu  $\bar{t}$ , rosnącymi gdy  $\lambda_j < 0$  lub stałymi, gdy  $\lambda_j = 0$  oraz parami zespolone i wtedy odpowiednie składniki będą okresowymi funkcjami bezwymiarowego czasu  $\bar{t}$ , rosnącymi, gdy  $\text{Re} \lambda_j > 0$ , stałymi gdy  $\text{Re} \lambda_j = 0$  i malejącymi, gdy  $\text{Re} \lambda_j < 0$ .

W przypadku istnienia wielokrotnych wartości  $\lambda_j$ , postać wyrażenia (7.46) ulega odpowiedniej zmianie, np. jeżeli  $\lambda_1 = \lambda_2$ , to (7.46) przybiera formę:

$$\bar{u} = (\bar{u}_1 + \bar{u}_2 \bar{t}) e^{\lambda_1 \bar{t}} + \bar{u}_3 e^{\lambda_3 \bar{t}} + \dots + \bar{u}_8 e^{\lambda_8 \bar{t}} \quad (7.47)$$

Każdej wartości  $\lambda_j$  odpowiada więc określony charakter ruchu śmigłowca (rosnący lub malejący, oscylacyjny lub monotoniczny) oraz określony zbiór składowych wektora  $\mathbf{x}_{0j}$  (7.48), czyli tzw. postać ruchu. I tak, dla każdej z ośmiu wartości własnych  $\lambda_j$  można określić stosunek siedmiu składowych  $\mathbf{x}_{0j}$  do ósmej, czyli tak zwane składowe unormowane wektora własnego  $\mathbf{x}_{0j}$  odpowiadającego wartości własnej  $\lambda_j$ .

Dla przykładu: wstawiając w (7.46)  $\bar{u}_j = \bar{u}_1 = 1$  i rozwiązując dla  $\lambda_j = \lambda_1$  otrzymamy następującą postać wektora własnego  $\mathbf{x}_{01}$  o składowych unormowanych względem  $\bar{u}_1$ :

$$\mathbf{x}_{01} = \left[ 1, \left( \frac{\bar{v}}{\bar{u}} \right)_1, \left( \frac{\bar{w}}{\bar{u}} \right)_1, \left( \frac{\bar{p}}{\bar{u}} \right)_1, \left( \frac{\bar{q}}{\bar{u}} \right)_1, \left( \frac{\bar{r}}{\bar{u}} \right)_1, \left( \frac{\bar{g}}{\bar{u}} \right)_1, \left( \frac{\bar{\varphi}}{\bar{u}} \right)_1 \right]^T \quad (7.48a)$$

a wstawiając  $\bar{q}_j = \bar{q}_5 = 1$ , otrzymamy:

$$\mathbf{x}_{05} = \left[ \left( \frac{\bar{u}}{\bar{q}} \right)_5, \left( \frac{\bar{v}}{\bar{q}} \right)_5, \left( \frac{\bar{w}}{\bar{q}} \right)_5, \left( \frac{\bar{p}}{\bar{q}} \right)_5, 1, \left( \frac{\bar{r}}{\bar{q}} \right)_5, \left( \frac{\bar{g}}{\bar{q}} \right)_5 \right]^T \quad (7.48b)$$

przy czym zespolonym wartościom  $\lambda_j$  w ogólnym przypadku odpowiadają zespolone wartości składowych.

Aby określić ogólną postać ruchów własnych śmigłowca po zaburzeniu lotu ustalonego, czyli rozwiązać układ (7.44), należy wyznaczyć wektory własne  $\mathbf{x}_{0j}$  dla wszystkich ośmiu wartości własnych  $\lambda_j$ , a następnie znając zaburzenia początkowe wyznaczyć osiem wartości wektora stanu  $\mathbf{x}$ .

W wielu przypadkach, np. na potrzeby analizy stateczności dynamicznej śmigłowca, wystarczy określić tylko wartości własne  $\lambda_j$  macierzy stanu  $\mathbf{R}$ . Jednak w celu identyfikacji ruchów należy wyznaczyć także wektory własne  $\mathbf{x}_{0j}$ .

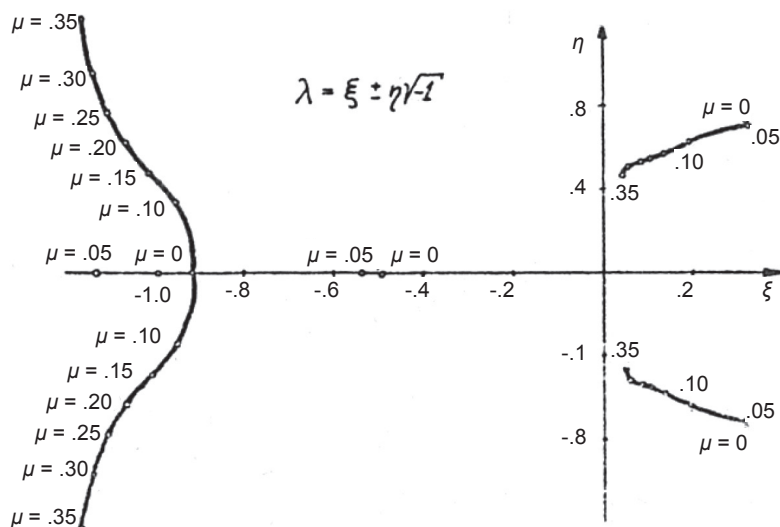
### 7.3.2.3. Ilościowa analiza stateczności dynamicznej śmigłowca

Z definicji stateczności w sensie Lapunowa wynika, że układ jest niestateczny, jeżeli przynajmniej jedno z rozwiązań jest niestateczne, czyli jeżeli chociaż jedna wartość własna  $\lambda_i$  ma dodatnią część rzeczywistą, nawet dowolnie małą. W praktyce spełnienie warunku stateczności Lapunowa może okazać się trudne lub niemożliwe, a często także niepotrzebne, bowiem np. jeżeli wzrost zaburzeń lotu śmigłowca jest na tyle wolny, że pilot zdąży to zauważyć i przeciwdziałać, lot jest możliwy, a śmigłowiec może być dopuszczony do eksploatacji. Jednak zawsze, gdy układ jest niestateczny w sensie Lapunowa, zachodzi konieczność ilościowego określenia wszystkich wartości własnych. Istnieje wiele pakietów programów komputerowych służących do wyznaczania wartości własnych i wektorów własnych, dlatego w tym miejscu ograniczymy się tylko do podania najczęściej stosowanych sposobów graficznego przedstawiania wyników obliczeń i ich interpretacji. Poniżej podano przykład obliczeniowy w oparciu o dane śmigłowca PZL Sokół [2.46].

**Tabela 7.2**

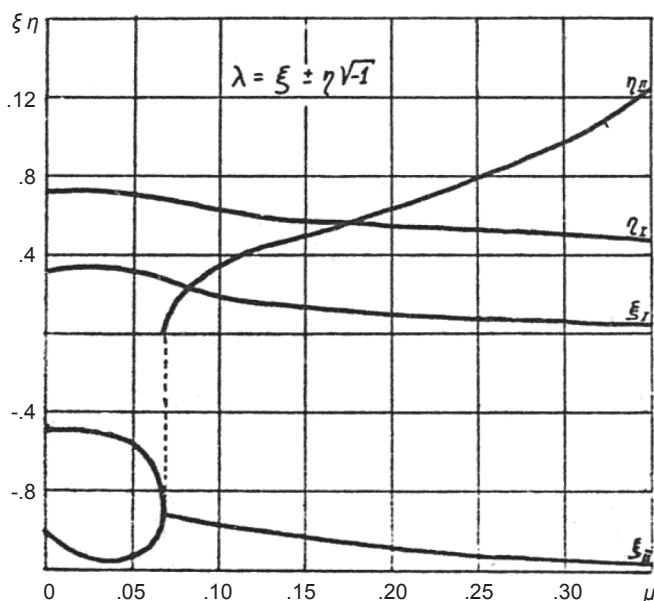
**Wartości własne macierzy stanu**

$\mu$	$l_1$		$l_2$		$l_3$		$\lambda_4$	
	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im
0,00	-0,991	0,0	0,321	-0,730	0,321	0,730	-0,492	0,0
0,05	-1,135	0,0	0,325	-0,706	0,325	0,706	-0,544	0,0
0,10	-0,954	-0,348	-0,954	0,348	0,196	-0,629	0,196	0,629
0,15	-1,018	-0,496	-1,018	0,496	0,137	-0,580	0,137	0,580
0,20	-1,068	-0,633	-1,068	0,633	0,103	-0,551	0,103	0,551
0,25	-1,108	-0,783	-1,108	0,783	0,081	-0,531	0,081	0,531
0,30	-1,141	-0,973	-1,141	0,973	0,062	-0,507	0,062	0,507
0,35	-1,163	-1,226	-1,163	1,226	0,045	-0,473	0,045	0,473



**Rys. 7.2.** Zależność  $\text{Re}(\lambda)=\eta$  oraz  $\text{Im}(\lambda)=\xi$  ruchu symetrycznego w zależności od współczynnika prędkości  $\mu$  [2.69]

Niech cztery wartości własne  $\lambda_1, \dots, \lambda_4$  przybierają w funkcji parametru  $\mu \in (0 \div 0,35)$  wartości liczbowe podane w tabeli 7.2, uszeregowane dla każdej wartości  $\mu$  w kolejności malejących modułów  $\lambda$ .



**Rys. 7.3.** Zależność  $\text{Re}(\lambda)=\eta$  oraz  $\text{Im}(\lambda)=\xi$  ruchu symetrycznego w zależności od współczynnika prędkości  $\mu$  [2.69]

W praktyce stosowanej w mechanice lotu funkcje  $\lambda(\mu)$  przedstawia się w sposób pokazany na rys. 7.2 oraz rys. 7.3, kreśląc części urojone  $\eta$  oraz części rzeczywiste  $\xi$  wartości własnych  $\lambda$  w funkcji wartości parametru prędkości  $\mu$ . Z rys. 7.3 wynika, że dla parametru  $\mu \in (0, 07)$  istnieją dwie zespolone wartości własne  $\lambda_2$  i  $\lambda_3$  o dodatniej części rzeczywistej  $\xi_I$  i części urojonej  $\eta_I$  oraz dwie ujemne wartości własne rzeczywiste  $\lambda_1$  i  $\lambda_4$ . Istnienie dodatnich wartości  $\xi$  świadczy o niestateczności w sensie Lapunowa, a istnienie różnych od zera wartości  $\eta$  o oscylacyjnym charakterze ruchu. Oznacza to, że po zaburzeniu lotu ustalonego śmigłowiec będzie wykonywał dwa tłumione ruchy nieoscylacyjne ( $\lambda_1, \lambda_4 < 0$ ) o czasach stłumienia amplitud do połowy:

$$T_{1/2}^{(1)} = \ln 2 / \lambda_1 \quad \text{ i } \quad T_{1/2}^{(4)} = \ln 2 / \lambda_4 \quad (7.49a)$$

oraz rozbieżny ( $\xi_I > 0$ ) ruch oscylacyjny ( $\eta_I \neq 0$ ) o czasie podwojenia amplitudy:

$$T_2 = \ln 1 / \xi_I \quad (7.49b)$$

i o okresie drgań:

$$T = 2\pi / \eta_I \quad (7.49c)$$

Dla parametru  $\mu \in (0,07; 0,35)$  istnieją dwie pary zespolonych wartości własnych:

- 1)  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  o ujemnej części rzeczywistej  $\xi_{II}$  i urojonej  $\eta_{II}$  opisujące zanikający ruch oscylacyjny o czasie stłumienia amplitudy do połowy

$$T_{1/2} = \ln 2 / \xi_{II} \quad (7.50a)$$

i o okresie drgań:

$$T_{II} = 2\pi / \eta_I \quad (7.50b)$$

- 2)  $\lambda_3$  i  $\lambda_4$  o dodatniej części rzeczywistej  $\xi_I$  i urojonej  $\eta_I$  opisujące rozbieżny ruch oscylacyjny o czasie podwojenia amplitudy:

$$T_2 = \ln 2 / \xi_I \quad (7.50c)$$

i o okresie drgań:

$$T = 2\pi / \eta_I \quad (7.50d)$$

Ze względu na istnienie w całym rozważanym przedziale parametru  $\mu$  rzeczywistej dodatniej wartości własnej  $\xi_i$ , rozpatrywany układ jest w sensie Lapunowa niestateczny.

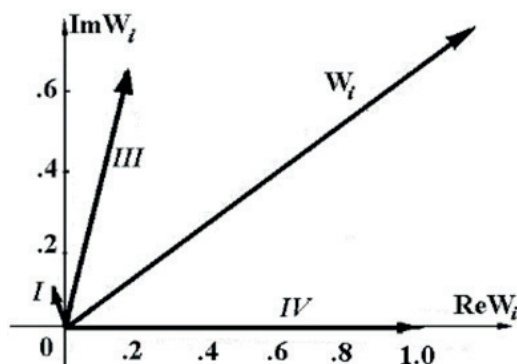
Z punktu widzenia własności dynamicznych śmigłowca interesująca jest także znajomość wektorów własnych (postaci ruchu) odpowiadających poszczególnym wartościom własnym. Obliczanie wektorów własnych, zwłaszcza przy większej liczbie składowych, najszybciej można wykonać z użyciem elektronowych maszyn cyfrowych i wykorzystaniem odpowiednich pakietów oprogramowania. Wyniki otrzymuje się zazwyczaj w formie liczb zespolonych zawierających części rzeczywiste i urojone poszczególnych składowych lub w formie liczb rzeczywistych zawierających dla każdej składowej moduł i kąt przesunięcia fazowego w stosunku do największej składowej zwykle unormowanej do jedności lub w stosunku do wektora wypadkowego.

Jako przykład rozważono wektor własny  $\mathbf{W}_i$  odpowiadający zespolonej wartości własnej  $\lambda_i = 0,165 + 0,65i$ , mający cztery składowe przedstawione w tabeli 3.3 w formie liczb zespolonych, unormowane w stosunku do największej składowej przyjętej za jednostkę (wartości w kolumnach 3 i 4 tabeli zostały obliczone na podstawie danych z kolumny 2).

Tabela 7.3

## Wektory własne

Składowa	Wielkość	Moduł	Kąt fazowy (deg.)
I	$-0.036 + 0.117i$	0.122	107
II	$0.000 + 0.000i$	0.000	-
III	$0.165 + 0.650i$	0.670	75.8
IV	$1.000 + 0.000i$	1.000	0.000

Rys. 7.4. Graficzne przedstawienie wektora własnego  $\mathbf{W}_i$



Z danych zawartych w tabeli 7.3 i na rys. 7.4 wynika, że wartości własnej  $\lambda_i$  odpowiada ruch, podczas którego największej zmianie ulega mająca największy moduł składowa IV, natomiast składowa II jest stała. Zmianom ulegają też składowa I i III, przy czym obie „wyprzedzają” w czasie składową IV o kąty bliskie  $90^\circ$ , co oznacza, że gdy one są bliskie zera, to składowa IV osiąga wartość ekstremalną i na odwrót. Dane liczbowe do tego przykładu oparto na danych śmigłowca PZL Sokół i dotyczą uproszczonego przypadku symetrycznego ruchu śmigłowca w zawisie, a składowe wektora własnego oznaczają odpowiednio:  $\bar{u}, \bar{w}, \bar{q}, \Theta$ . Fizyczna interpretacja wyników jest więc następująca: po niewielkim zaburzeniu stanu zawisu śmigłowca jego prędkość  $\bar{w}$ , a więc i wysokość nie ulegają zmianie (zerowa składowa II), natomiast pozostałe składowe charakteryzujące ruch śmigłowca w płaszczyźnie symetrii mają charakter oscylacyjny (Im  $\lambda_i \neq 0$ ) i narastają w czasie (Re  $\lambda_i > 0$ ), czyli śmigłowiec, niestateczny w sensie Lapunowa, wykonuje ruch wahadłowy: w skrajnych położeniach, gdy kąt  $\theta$  osiąga ekstremum, prędkości: liniowa  $\bar{u}$  i kątowa  $\bar{q}$  są bliskie (w przypadku wahadła równe) zera, a gdy  $\theta = 0$  obie prędkości osiągają ekstrema.

Gdy składowe wektora własnego są ubezwymiarowane i mają różny sens fizyczny, np. jak w powyższym przykładzie: prędkość liniowa, prędkość kątowa i kąt, wówczas wzajemne relacje ich modułów zależą od sposobu ubezwymiarowania i w takich przypadkach należałoby porównywać raczej wielkości fizyczne niż moduły bezwymiarowe lub porównywać tę samą składową przy różnych wartościach własnych, pod warunkiem że dla wszystkich wartości własnych zostanie zastosowany identyczny sposób normowania wektorów własnych.

Z punktu widzenia dynamiki śmigłowiec jest obiektem złożonym. Nawet przyjmując, że wszystkie elementy śmigłowca są niekoniecznie sztywne, w modelu fizycznym należałoby uwzględnić nie tylko sześć stopni swobody opisujących postępowe i obrotowe ruchy kadłuba, ale także stopnie swobody wynikające z przegubowego zamocowania łopat wirnika nośnego i śmigła ogonowego, przemieszczenia w układach sterowania, zmiany prędkości kątowych wałów napędowych wirnika nośnego i śmigła ogonowego itp. Poza przypadkiem zawisu ustalonego, w którym środek ciężkości śmigłowca jest nieruchomy względem Ziemi i nie ma sterowania skokiem cyklicznym, w innych stanach lotu na łopatkach wirnika będą występowały obciążenia zmienne w funkcji azymutu, co przejawia się w postaci zmiennych współczynników w równaniach ruchu śmigłowca.

W literaturze przedmiotu ukazują się prace [2.41] stanowiące próby kompleksowego podejścia do dynamiki śmigłowca. Jednak w wielu zastosowaniach technicznych ogólne traktowanie zagadnienia nie jest konieczne, a nawet celowe, gdyż np. osłabienie uproszczeń modelu samego śmigłowca nie doprowadzi do bardziej wiarygodnych wyników obliczeń, jeżeli nie będzie jednocześnie powiązane z dokładniejszym opisem opływu łopat, natomiast skomplikuje obliczenia i utrudni interpretację wyników. Istotną sprawą jest taki dobór założeń upraszczających, aby

nie zmieniając charakteru ruchu, możliwie uprościć jego analizę. Poza przypadkami szczególnymi, jak np. rezonans powietrzny, największa częstość zaburzonego ruchu kadłuba śmigłowca jest znacznie mniejsza niż najmniejsza częstość ruchu łopaty wirnika w przegubach, co umożliwia traktowanie wirnika jak wirującego płata, który reaguje bez opóźnień na zmiany ruchu kadłuba. W konsekwencji umożliwia to traktowanie wirnika jako jednego elementu, bez konieczności analizy ruchu poszczególnych łopat. Zwykle duża bezwładność układu napędowego typowego śmigłowca oraz małe wahania momentu oporowego wirnika usprawiedliwiają założenia stałości prędkości kątowych wałów wirnika nośnego i śmigła ogonowego.

## OBCIĄŻENIA AERODYNAMICZNE ŚMIGŁOWCA

### 8.1. Obciążenia aerodynamiczne kadłuba śmigłowca

Uogólnione siły zewnętrzne działające na śmigłowiec można podzielić na dwie grupy: grupę sił i momentów pochodzących od grawitacji oraz grupę sił i momentów aerodynamicznych [2.8]. Dlatego każdy z wektorów sił i momentów działających na śmigłowiec można przedstawić jako sumę wektorów części grawitacyjnej i aerodynamicznej.

$$\begin{cases} \mathbf{F} = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_G; \mathbf{T} = \mathbf{T}_A + \mathbf{T}_G; \mathbf{M} = \mathbf{M}_A + \mathbf{M}_G \\ \mathbf{M}_W = \mathbf{M}_{W_A} + \mathbf{M}_{W_G}; \mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_{0_A} + \mathbf{M}_{0_G}; \mathbf{M}_{PW} = \mathbf{M}_{PW_A} + \mathbf{M}_{PW_G}; \mathbf{M}_{PO} = \mathbf{M}_{PO_A} + \mathbf{M}_{PO_G} \end{cases} \quad (8.1)$$

W skład sił i momentów aerodynamicznych działających na kadłub śmigłowca wchodzi obciążenia wynikające z opływu kadłuba, skrzydeł, stateczników, belki ogonowej, ciągu śmigła ogonowego i silników. Układ sił działających na śmigłowiec w locie przedstawiono na rys. 8.1.

Analityczne wyznaczenie obciążeń aerodynamicznych kadłuba śmigłowca, ze względu na jego skomplikowany kształt, jest zagadnieniem bardzo złożonym, nawet w przypadku pominięcia interferencji strumienia wirnika nośnego i śmigła ogonowego. Najczęściej charakterystyki aerodynamiczne kadłubów śmigłowcowych są otrzymywane na podstawie badań w tunelach aerodynamicznych. Składowe wektora siły  $\mathbf{F}$  i momentu  $\mathbf{M}$  pochodzące od sił aerodynamicznych kadłuba można zapisać w postaci [2.77]:

$$\mathbf{F}_{K_A} = \frac{1}{2} \rho A_{WN} V_o^2 \mathbf{C}_{F_{K_A}} \quad (8.2)$$

$$\mathbf{M}_{K_A} = \frac{1}{2} \rho R_{WN} A_{WN} V_o^2 \mathbf{C}_{M_{K_A}} \quad (8.3)$$

gdzie indeks  $()_{K_A}$  oznacza siłę lub moment aerodynamiczny kadłuba.

Przyjmowaną zazwyczaj powierzchnią odniesienia dla współczynników aerodynamicznych kadłuba jest pole powierzchni wirnika nośnego  $A_{WN} = \pi R_{WN}^2$ , gdzie  $R_{WN}$  jest promieniem wirnika nośnego. Jako prędkość odniesienia przyjmuje się całkowitą prędkość napływu:

$$V = \sqrt{U^2 + V^2 + W^2} \quad (8.4)$$

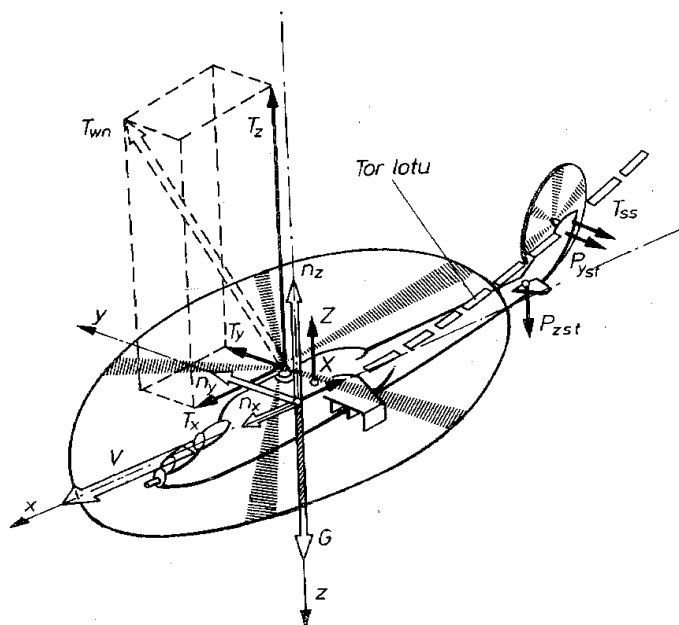
gdzie:  $U, V, W$  są rzutami prędkości lotu na osie związanego układu współrzędnych.

Wektory współczynników aerodynamicznych kadłuba zapisane w prędkościowym układzie współrzędnych mają następujące składowe [2.77]:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{F_{K_A}} &= [C_{X_K}(\alpha_K, \beta_K), C_{Y_A}(\alpha_K, \beta_K), C_{Z_K}(\alpha_K, \beta_K)]^T \in \\ \mathbf{C}_{M_{K_A}} &= [C_{l_K}(\alpha_K, \beta_K), C_{m_K}(\alpha_K, \beta_K), C_{n_K}(\alpha_K, \beta_K)]^T \end{aligned} \quad (8.5)$$

Kąty natarcia  $\alpha_K$  i ślizgu  $\beta_K$  kadłuba obliczane są z zależności:

$$\alpha_K = \arcsin\left(\frac{W}{V_0}\right) \quad \beta_K = \arcsin\left(\frac{V}{V_0}\right) \quad (8.6)$$



**Rys. 8.1.** Układ sił działających na śmigłowiec w locie

Obciążenia aerodynamiczne kadłuba zależą od całkowitej wartości prędkości opływu (w tym od prędkości indukowanej przez wirnik nośny), kątów ustawienia kadłuba względem prędkości opływu (i pochodnych tych kątów względem czasu) oraz składowych wektora prędkości kątowej śmigłowca. Próby oceny wpływu wirnika nośnego na obciążenia kadłuba były podejmowane w wielu pracach, np. [2.13, 2.41, 2.43, 2.84]. Przy budowie dokładnych modeli śmigłowca należy uwzględnić możliwie najszerszej wzajemny wpływ poszczególnych elementów konstrukcji na wielkość i rozkład obciążeń aerodynamicznych.

Możliwe jest przy tym przyjęcie następujących założeń upraszczających:

- 1) wpływ prędkości kątowych  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  na obciążenia aerodynamiczne kadłuba jest pomijalny;
- 2) napływ indukowany przez wirnik nośny uwzględniany jest jako przyrost składowej prędkości w prostopadłej do płaszczyzny konstrukcyjnej o wartość:

$$Dw_{ig} = l_{i0} K_{WK} V_T \quad (8.7)$$

gdzie:

$l_{i0}$  – średnia prędkość indukowana wirnika nośnego,  
 $K_{WK}$  – współczynnik interferencji kadłub – wirnik nośny,  
 $V_T$  – prędkość końców łopat wirnika nośnego;

- 3) współczynniki aerodynamiczne można podzielić na dwie grupy:
  - a) współczynniki: siły oporu kadłuba  $C_{xK}$ , siły nośnej kadłuba  $C_{zK}$  i momentu pochylającego kadłuba  $C_{mK}$ , które zależą od warunków napływu w umownej płaszczyźnie symetrii śmigłowca. Współczynniki te są funkcjami kąta natarcia kadłuba  $\alpha_K$  w płaszczyźnie symetrii przy zerowym kącie ślizgu  $\beta_K$ ,
  - b) współczynniki: siły bocznej  $C_{yK}$ , momentu przechylającego  $C_{lK}$  i momentu odchyłającego  $C_{nK}$ , które zależą od warunków napływu w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny symetrii kadłuba. Współczynniki te są funkcjami kąta ślizgu kadłuba  $\beta_K$  przy zerowej wartości kąta natarcia kadłuba  $\alpha_K$ .

Po przyjęciu powyższych założeń, obciążenia aerodynamiczne kadłuba śmigłowca można obliczyć z zależności:

$$\begin{aligned}
 F_{X_K} &= -\rho A_{WN} V_o \left[ -C_{X_K}(\alpha_K) \cos \alpha_K - C_{Y_K}(\beta_K) \sin \beta_K + C_{Z_K}(\alpha_K) \sin \alpha_K \right] \\
 F_{Y_K} &= -\rho A_{WN} V_o \left[ C_{Y_K}(\beta_K) \cos \beta_K \right] \\
 F_{Z_K} &= -\rho A_{WN} V_o \left[ C_{X_K}(\alpha_K) \sin \alpha_K - C_{Z_K}(\alpha_K) \cos \alpha_K \right] \\
 L_{K_A} &= -\rho A_{WN} R_{WN} V_o \left[ -C_{l_K}(\beta_K) \cos \beta_K \right] \\
 M_{K_A} &= -\rho A_{WN} R_{WN} V_o \left[ -C_{l_K}(\beta_K) \sin \beta_K + C_{m_K} \right] \\
 N_K &= -\rho A_{WN} R_{WN} V_o \left[ C_{n_K}(\beta_K) \right]
 \end{aligned} \tag{8.8}$$

Obciążenia masowe kadłuba wraz z wirnikiem nośnym oblicza się z zależności:

$$\begin{aligned}
 F_{X_{KG}} &= -m_s g \sin \Theta \\
 F_{Y_{KG}} &= m_s g \cos \Theta \sin \Phi \\
 F_{Z_{KG}} &= m_s g \cos \Theta \cos \Phi
 \end{aligned} \tag{8.9}$$

gdzie:  $m_s$  – masa śmigłowca,  $g$  – przyspieszenie ziemskie,  $\Theta$  i  $\Phi$  – kąty wyznaczające położenie śmigłowca w przestrzeni. Ze względu na to, że początek układu współrzędnych pokrywa się ze środkiem masy śmigłowca, składowe wektora momentu od sił grawitacji są równe zero. Wektory siły i momentu, pochodzące od statecznika poziomego mają składowe:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{St} &= \text{col} \left[ 0, 0, \frac{1}{2} \rho S_{St} V_{St}^2 C_{Z_{St}}(\dot{\alpha}_{St}, \alpha_{St}, \varphi_{St}) \right] \\
 \mathbf{M}_{St} &= \text{col} \left[ 0, \frac{1}{2} \rho S_{St} L_{St} V_{St}^2 C_{Z_{St}}(\dot{\alpha}_{St}, \alpha_{St}, \varphi_{St}), 0 \right]
 \end{aligned} \tag{8.10}$$

Kąt ustawienia statecznika przeważnie jest funkcją kąta skoku ogólnego wirnika nośnego. Pozostałe siły i momenty pochodzące od statecznika poziomego są małe i można je pominąć. Wektory siły i momentu aerodynamicznego pochodzące od śmigła ogonowego mają składowe:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{SO} &= [0, T_{SO}, 0]^T \\
 \mathbf{M}_{SO} &= [T_{SO} \cdot L_{SO}, 0, T_{SO} \cdot h_{SO}]^T
 \end{aligned} \tag{8.11}$$

gdzie:  $T_{SO}$  – ciąg śmigła ogonowego,  $L_{SO}$  – odległość osi wału śmigła ogonowego od osi  $Oz_{WN}$ ,  $h_{SO}$  – odległość osi wału śmigła ogonowego od osi  $Ox_{WN}$ . Pozostałe składowe wektorów siły i momentu od śmigła ogonowego można pominąć ze względu na ich małą wartość (w porównaniu z innymi obciążeniami).

## 8.2. Obciążenia aerodynamiczne wirnika nośnego śmigłowca

Wyznaczenie obciążeń aerodynamicznych wirnika nośnego śmigłowca jest złożonym zagadnieniem ze względu na fakt, że nawet w ustalonym locie śmigłowca w czasie jednego obrotu wirnika jego łopaty mogą znajdować się w różnych warunkach opływu. Prędkość opływu łopat wynika z ruchu śmigłowca względem Ziemi, obrotowego ruchu wirnika względem śmigłowca i ruchu łopat w układzie wirującym z wirnikiem (ruch wahań, odchylen i przekręceń łopat, odkształcenia łopat) oraz ruchu powietrza względem Ziemi (turbulencja, podmuchy i prędkość wiatru). Sposób wyznaczenia sił aerodynamicznych wirnika nośnego śmigłowca został przedstawiony w pierwszej części tej monografii. Zaprezentowano tam zarys metod obliczeń sił i momentu oporowego wirnika nośnego śmigłowca w zakresie niezbędnym do obliczeń podstawowych osiągow śmigłowca. W tym rozdziale postaramy się nieco szerzej omówić problem modelowania obciążeń aerodynamicznych wirnika nośnego śmigłowca, zwracając uwagę na niektóre aspekty obliczeniowe przydatne do modelowania i symulacji dynamiki lotu. Należy podkreślić, że mimo znaczącego rozwoju metod obliczeniowej mechaniki płynów, w dalszym ciągu podstawową metodą wyznaczenia obciążeń aerodynamicznych wirnika nośnego śmigłowca jest metoda elementu łopaty.

W locie postępowym opływ profilu łopaty wirnika nośnego charakteryzują:

- niestacjonarność opływu,
- jego trójwymiarowość,
- okołodźwiękowy przepływ po stronie łopat nacierających,
- opływ na dużych, nadkrytycznych kątach natarcia po stronie łopat powracających.

Prace dotyczące metod wyznaczania obciążeń wirnika nośnego można podzielić na dwie grupy:

- zawansowanych algorytmów numerycznej mechaniki płynów (CFD). Prace z tego zakresu mają charakter badawczy. Praktyczne zastosowanie w chwili obecnej znajdują w obliczeniach osiągow wirników oraz rozwiązywaniu zagadnień specjalnych (np. opracowaniu nowych końcówek łopat nośnych wirników). Pojawiają się także prace, w których metody CFD są wykorzystywane w cyfrowej symulacji ruchu łopat;
- metod obliczeniowych o różnym stopniu uproszczenia, dostosowanych do potrzeb badania dynamiki ruchu wiroplatów, uwzględniających najważniejsze czynniki dla danego stanu lotu. Należy podkreślić, że w różnorodnych stanach lotu śmigłowca nie wszystkie czynniki mają dominujący wpływ na obciążenia aerodynamiczne wirnika. Dobór metod obliczeniowych zależy zatem od badanych stanów lotu.

I tak, np. dla przepływu osiowego (występującego w pionowym locie śmigłowca), w zależności od wielkości współczynnika przepływu osiowego  $\lambda$ , można wy-

różnić takie stany lotu, jak: wznoszenie pionowe, zawis, stan pierścienia wirowego, autorotacja, wiatrakowy zakres pracy wirnika itp.

W przypadku opływu skośnego wirnika, występującego w locie śmigłowca z poziomą składową prędkości, w zależności od wielkości współczynnika prędkości  $\mu = V_0/V_T$  można wyróżnić trzy charakterystyczne przedziały prędkości:

- a.  $0 < \mu < 0.1$ . Ślad wirowy znajduje się w pobliżu wirnika. Występuje interferencja wirów spływających z różnych łopat.
- b.  $0.1 < \mu < 0.3$ . Ślad wirowy oddala się szybko od płaszczyzny obrotu wirnika. W tym zakresie prędkości lotu można przyjąć, że na dużym odcinku łopat opływ jest dwuwymiarowy. Ten zakres lotu został szerzej opisany w pierwszej części tej monografii.
- c.  $\mu < 0.3$ . Występują duże kąty skoku łopat (zarówno okresowego – dla zrównoważenia śmigłowca, jak i ogólnego). Cechami charakterystycznymi tego zakresu są: obszar odwrotnego opływu po stronie łopat powracających oraz obszar opływu naddźwiękowego po stronie łopat nacierających.

Szerszy opis wymienionych powyżej zjawisk można znaleźć np. w pracach [2.4, 2.5, 2.12, 2.72, 2.81].

Wymagania dotyczące metod obliczeniowych obciążeń aerodynamicznych wynikają z warunków fizycznych opływu dotyczących: wymiarowości zagadnienia, liczby obliczanych składników obciążeń, ruchu śmigłowca, charakteru opływu itp. Najczęściej przyjmowanym założeniem upraszczającym jest dwuwymiarowość opływu na znacznej części długości łopaty. Efekty trójwymiarowe uwzględniane są przede wszystkim na końcach łopat, w najprostszym sposobie jako „straty końcowe” (por. np. klasyczne prace Bramwela [2.8] czy też Gessowa i Meyersa [2.24]). Kolejnym założeniem jest podział opływu na część związaną z przekrojem łopaty i część zewnętrzną, której oddziaływanie jest uwzględniane jako prędkość indukowana generowana śladem wirowym. Przeważnie przy obliczaniu obciążeń w przekroju łopaty wykorzystuje się współczynniki aerodynamiczne otrzymane na podstawie eksperymentalnych badań profili łopat wirników nośnych. Powyższe założenia prowadzą do dwuwymiarowego, quasi-stacjonarnego modelu opływu łopaty nośnej śmigłowca. W modelu tym jest pomijana składowa prędkości opływu wzdłuż łopaty, zaś prędkość indukowana jest dodawana do odpowiedniej składowej prędkości opływu łopaty [2.37, 2.40].

Przyjmuje się, że obciążenia aerodynamiczne w przekroju łopaty są przyłożone w środku aerodynamicznym (rys. 8.2) i są obliczane z zależności:

$$\begin{cases} dT = -dP_x \cos \theta - dP_z \sin \theta \\ dQ = -dP_x \sin \theta + dP_z \cos \theta \end{cases} \quad (8.12)$$



przy czym:

$$\begin{cases} dP_x = \frac{1}{2} \rho c(b) U^2 C_x(\alpha) db \\ dP_z = \frac{1}{2} \rho c(b) U^2 C_z(\alpha) db \end{cases} \quad (8.13)$$

moment aerodynamiczny profilu:

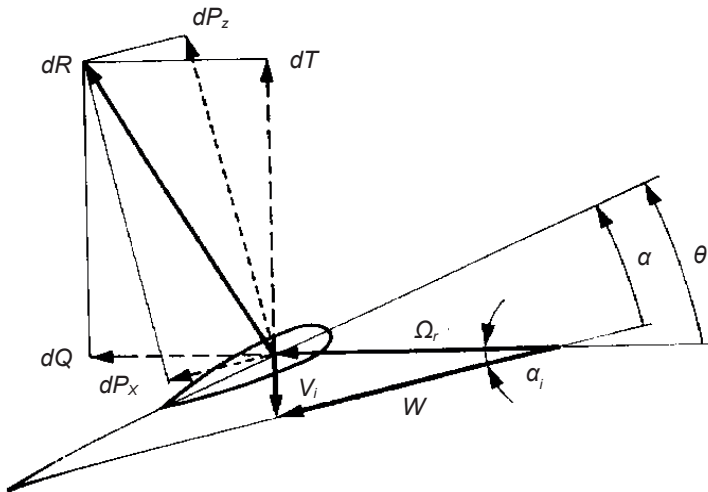
$$dM = \frac{1}{2} \rho c^2(b) U^2 C_m(\alpha) db \quad (8.14)$$

gdzie  $b$  jest odległością przekroju łopaty wirnika nośnego od przegubu odchyleń (rys. 5.5).

Kąt natarcia profilu  $\alpha$  wynika z chwilowej wartości prędkości opływu. W ten sposób uwzględniana jest część efektów niestacjonarnych opływu (bez zjawiska opóźnienia fazowego oraz efektu mas przyłączonych). Wielkość  $c(b)$  jest cięciwą aerodynamiczną profilu, w ogólnym przypadku zależną od odległości profilu łopaty nośnej śmigłowca od przegubu odchyleń (rys. 5.5). W przypadku łopat o obrysie prostokątnym  $c(b) = \text{const}$ . Prędkość opływu łopaty wyraża wzór  $U = \sqrt{U_t^2 + U_n^2}$ , przy czym prędkości  $U_t$  i  $U_n$  oblicza się z zależności:

$$\begin{cases} U_t = \Omega \cdot (a + e \cos \beta + b \cos \zeta \cos \beta) + V \sin \psi + \dot{\zeta} \cdot b + (r - a) \sin \beta (P \cos \psi + Q \sin \psi) \\ U_n = v_i \cos \beta - V \cos \psi \sin \beta - (e + b \cdot \cos \zeta) \dot{\beta} + (a + e \cos \beta + b \cos \zeta \cos \beta) (P \sin \psi - Q \cos \psi) \end{cases} \quad (8.15)$$

gdzie:  $P, Q$  – prędkości kątowe śmigłowca,  $v_i$  – prędkość indukowana.



Rys. 8.2. Układ sił na profilu łopaty wirnika nośnego

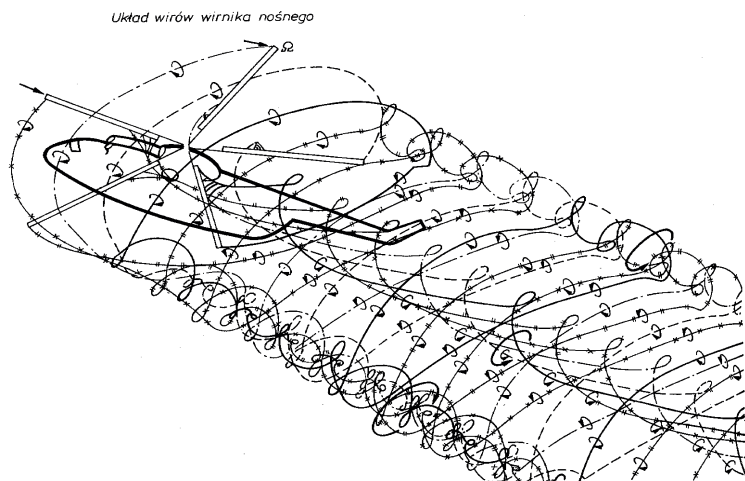
Modelowanie prędkości indukowanej stanowi istotną część obliczania obciążeń aerodynamicznych. Najdokładniejszą metodą wyznaczania prędkości indukowanej jest metoda wirowa. Układ wirów generowanych przez wirnik nośny śmigłowca przedstawiono na rys. 8.3.

Ślad zawirnikowy, generowany łopatomy wirnika nośnego śmigłowca, odkształca się w wyniku manewrów śmigłowca, zaburzeń prędkości spowodowanych turbulencją atmosfery, jak też w wyniku wzajemnego oddziaływania wirów. Analizę śladu zawirnikowego można znaleźć m.in. w pracach [2.8, 2.12, 2.72]. Analiza wzajemnego wpływu wirów została podana w pracy [2.77].

Algorytm wyznaczania geometrii śladu wirowego w ruchu niestacjonarnym od chwili początkowej  $t_0$  do chwili  $t$ , z krokiem  $\Delta t$  można ustalić następująco (np. [2.40, 2.77]):

1. W chwili  $t_0$  przyjmuje się uproszczoną geometrię śladu wirowego o skończonej długości (dla kilku obrotów wirnika nośnego).
2. Dla  $t > t_0$  przyjmuje się, że ślad narasta zgodnie z torem punktów podziału łopaty na segmenty. Na ten ruch składają się przemieszczenia liniowe środka piasty wirnika nośnego, obroty kadłuba śmigłowca z prędkościami  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , przemieszczenia elementu łopaty względem kadłuba śmigłowca, obroty osi wirnika nośnego o kąt  $\psi = \Omega \Delta t$  oraz odkształcenia przekroju.
3. W przypadku symulacji lotu w burzliwej atmosferze, każdy element śladu, w czasie  $\Delta t$  jest unoszony na odległość  $\mathbf{u} \Delta t$ , gdzie  $\mathbf{u}$  jest wektorem prędkości zaburzeń otaczającego śmigłowca powietrza.

Wytwarzane poprzez poszczególne elementy wirowe śladu pole prędkości powoduje nałożenie się dodatkowego, własnego pola indukowanego, a w konsekwencji dodatkową deformację śladu.



**Rys. 8.3.** Układ wirów wirnika nośnego śmigłowca

Ocena geometrii narastającego z upływem czasu śladu zawirnikowego jest trudnym zadaniem ze względu na narastającą liczbę elementów śladu. Liczbę tych elementów należy ograniczyć do skończonej długości śladu za wirnikiem. Symulacyjne badania dynamiki ruchu śmigłowca są z reguły przeprowadzane w układzie współrzędnych związanych ze śmigłowcem. Dlatego też wszystkie siły, momenty, prędkości i inne parametry lotu są zapisywane w tym właśnie układzie współrzędnych. Zatem geometria i oddziaływanie śladu zawirnikowego na wirnik nośny powinny być zapisywane i badane w tym właśnie układzie współrzędnych. Takie podejście wymaga ciągłej transformacji geometrii śladu i korygowania niezbędnej długości śladu. Każde przemieszczenie się śmigłowca następujące w czasie  $Dt$  wymaga dokonania oceny przemieszczeń i obrotów śladu powstałych w wyniku ruchu śmigłowca w tym właśnie przedziale czasu. Należy przy tym ocenić wielkość deformacji śladu wirowego w wyniku burzliwej atmosfery i pola prędkości indukowanej układem śladów wirowych śmigłowca. Schemat układów wirów wirnika nośnego śmigłowca uzyskany przy pomocy opisanej powyżej procedury przedstawiono na rys. 8.3. Przy obliczeniach śladu pominięto turbulencję atmosfery.

Kąt natarcia elementu łopaty wirnika nośnego jest równy:  $\alpha = \Theta - \phi$ ,  $\phi = \arctg(U_n/U_t)$ , zaś  $\Theta$  jest kątem nastawienia łopaty:

$$\Theta = \Theta_0 + \Delta\Theta + k\beta - \Theta_1 \sin \psi - \Theta_2 \cos \psi \quad (8.16)$$

gdzie:

$\Theta_0$  – kąt skoku ogólnego;

$\Delta\Theta$  – kąt skręcenia geometrycznego łopaty;

$k$  – współczynnik sprzężenia kinematycznego wahań i przekręceń;

$\Theta_1$  i  $\Theta_2$  – kąty skoku cyklicznego, określone pochyleniem i przechyleniem tarczy sterującej.

Dla łopaty wirnika nośnego siłami zewnętrznymi będą także momenty tłumików oraz obciążenia występujące w przegubach (wahań i odchylen), zaś dla wirnika nośnego jako całości obciążeniem zewnętrznym będzie moment napędowy układu przenoszenia mocy śmigłowca. Dla śmigłowca jako całości obciążenia te będą oczywiście obciążeniami wewnętrznymi.

### 8.2.1. Niestacjonarne obciążenia profilu łopaty wirnika nośnego śmigłowca

Opisana w pracy metoda wyznaczania równań ruchu i obciążeń śmigłowca pozwala na użycie zaawansowanych modeli przepływu, co przy stosowanych często uproszczonych modelach matematycznych śmigłowca jest niemożliwe. W zastosowaniach spotyka się prawie wszystkie rodzaje modeli aerodynamicznych, począwszy od najprostszych, a skończywszy na ogólnych.

Klasyczne metody obliczania obciążeń niestacjonarnych, takie jak teoria Theodorsena [2.15], traktują o wyznaczaniu obciążeń oscylującego profilu dla prostych kształtów śladu wirowego. Metody te stosowano także do wyznaczania niestacjonarnych obciążeń wirników nośnych śmigłowca. Jednak, ze względu na brak jednej dominującej częstości drgań i znaczny zakres zmian prędkości opływu i kątów natarcia poszczególnych przekrojów łopat stosowanie tej metody do wiroplątów jest obarczone znacznym błędem. Początkowo prace dotyczące rozszerzenia stosowalności klasycznych metod do wiroplątów ograniczały się do bardziej realistycznego określenia śladu wirowego [2.44], lecz z czasem badania rozszerzono w kierunku wyrażenia obciążeń w funkcji czasu. Pozwoliło to na obliczenie obciążeń dla dowolnego ruchu łopaty wirnika nośnego oraz bezpośrednio włączenie opracowanych algorytmów do analizy ruchów łopat nośnych śmigłowca (np. [2.12, 2.37, 2.57, 2.77]). Generalnie teorie te dotyczą małych zaburzeń (wymóg spełnienia przez potencjał prędkości równania Laplace’a). W konsekwencji możliwe jest rozłożenie opływu na cyrkulacyjny i niecyrkulacyjny. Opływ niecyrkulacyjny jest modelowany układem źródeł i upustów, natomiast opływ cyrkulacyjny jest modelowany śladem wirowym, którego kształt wynika z ruchu krawędzi spływu profilu. Oba opływy związane są ze sobą warunkiem Kutty–Żukowskiego. Są to oczywiście klasyczne założenia teorii Theodorsena, według której ślad wirowy jest modelowany cyrkulacją rozłożoną wzdłuż sinusoidy, zaś gęstość cyrkulacji jest funkcją harmoniczną. W cytowanych powyżej pracach dokonano próby uogólnienia tej teorii na dowolny ruch profilu. Opisane teorie opierają się na liniowych modelach opływu. W chwili obecnej z powodzeniem rozwijane są modele nieliniowe (np. model nieliniowy dynamiczny siatki wirów, np. [2.74]). Najdokładniejsze, lecz zarazem najbardziej złożone modele bazują na rozwiązaniach równań Eulera i Naviera–Stokesa. Stosowanie tych modeli do wyznaczania obciążeń wirnika w trakcie cyfrowej symulacji lotu śmigłowca jest w chwili obecnej mało realne, nawet z zastosowaniem superkomputerów, gdyż koszty obliczeń w dalszym ciągu są niewspółmierne w stosunku do ewentualnego zwiększenia ich dokładności. Analizę wymagań stawianych komputerom do symulacyjnych badań aeroelastyczności (a więc przy znacznie prostszych modelach opisujących ruch wiropląta) można znaleźć m.in. w pracy [2.14].

Zjawisko głębokiego przeciągnięcia dynamicznego opisano już przy okazji rozważań na temat obciążeń skrzydeł samolotów. Doskonały przegląd modeli i metod opisujących zjawisko głębokiego przeciągnięcia dynamicznego łopat wirnika nośnego śmigłowca przedstawiono w pracy [2.38].

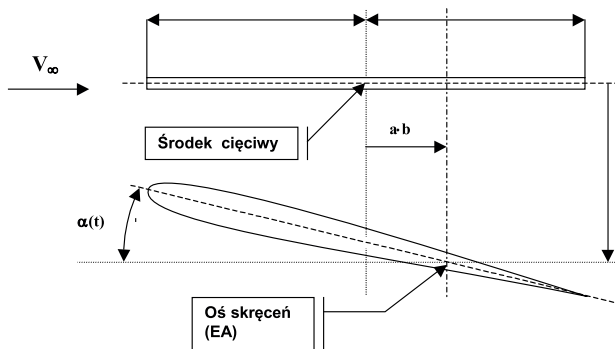
Obciążenia w warunkach głębokiego przeciągnięcia dynamicznego mogą być obliczane na podstawie wyrażen analitycznych, które są tak dobierane, by opisywały zmierzony doświadczalnie przebieg zjawiska. Przykładem takiego podejścia są procedury wyznaczania niestacjonarnych obciążeń aerodynamicznych profilu łopaty wirnika nośnego śmigłowca w warunkach przeciągnięcia dynamicznego zaproponowane w pracach Johnsona [2.36] i Tarzanina [2.79].

Innym sposobem modelowania tego zjawiska są metody półempiryczne, w których obciążenia profilu są obliczane jako rozwiązania równań różniczkowych. Postać i współczynniki tych równań są określane drogą identyfikacji na podstawie charakterystyk niestacjonarnych obciążeń profilu. Najbardziej znanymi metodami tego typu są: opisany w tej pracy model ONERA oraz model Leishmanna–Beddoesa [2.42]. W tego typu modelach pojawiają się dodatkowe zmienne stanu. W modelu ONERA w celu wyznaczenia obciążeń aerodynamicznych profilu należy rozwiązać siedem równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu: trzy dla siły nośnej, po dwa dla momentu pochylającego i siły oporu. Model ONERA był z powodzeniem stosowany w analizie ruchu łopaty wirnika nośnego. W pracy [2.78] odnotowano chaotyczny ruch łopaty wirnika spowodowany nieliniowościami modelu dynamicznego i aerodynamicznego przyjętego w analizie.

Model ONERA zastosowano w analizie dynamiki ruchu całego śmigłowca [2.10], uzyskując także w efekcie chaotyczne przebiegi niektórych parametrów lotu śmigłowca, spowodowane nieliniowościami przyjętego modelu aerodynamiki. Mankamentem modelu ONERA jest znaczne wydłużenie czasu obliczeń (w każdym czasowym kroku rozwiązań ruchu śmigłowca należy dodatkowo rozwiązać  $i \cdot n \cdot 7$  równań różniczkowych wyznaczających niestacjonarne obciążenia profilu, przy czym  $i$  oznacza liczbę łopat wirnika nośnego,  $n$  – liczbę przekrojów łopat branych w analizie obciążeń). W przypadku gdy zależy na zmniejszeniu czasu obliczeń, należy posłużyć się modelem z grupy metod aproksymacyjnych (np. zaproponowanym przez Tarzanina [2.79]). Model ten zastosowano w cytowanej już wcześniej pracy Kowaleczki [2.40, 2.41].

### 8.2.2. Zmodyfikowana metoda Theodorsena

Punkt ten przedstawia teorię dwuwymiarowego przepływu nieustalonego i nieściśliwego, opartą na rozważaniach Theodorsena [2.15]. Przyjmijmy układ współrzędnych z początkiem w środku cięciwy (rys. 8.4).



Rys. 8.4. Model Theodorsena

Zakładamy ruch harmoniczny powierzchni nośnej:

$$f(x, y, t) = \hat{f}(x, y) e^{i\omega t} \quad (8.17)$$

gdzie wyraz  $\hat{f}(x, y)$  oznacza amplitudę ruchu, a wyraz  $e^{i\omega t}$  opisuje jego zmianę w czasie.

W konsekwencji wszystkie parametry zmieniają się w sposób harmoniczny, por. [2.14]:

$$\begin{aligned} \phi &= \hat{\phi}(x, z) e^{i\omega t}, \\ p &= \hat{p}(x, z) e^{i\omega t}, \text{ itd.} \end{aligned} \quad (8.18)$$

Równaniem rządzącym przepływem jest równanie Laplace'a:

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad \phi = \phi(x, z, t) \quad (8.19)$$

gdzie  $\phi$  oznacza potencjał prędkości zaburzeń:  $\Phi = \Phi_\infty + \phi$ , z warunkami brzegowymi:

1) na profilu:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0^{+,-}} = w_a \equiv \frac{\partial z_a}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial z_a}{\partial x}, \quad -b < x < b, \quad \text{dla } z = 0 \quad (8.20)$$

2) „w nieskończoności”:

$$\phi \rightarrow 0 \quad \text{gdy } z \rightarrow \infty \quad (8.21)$$

Ponieważ interesują nas obciążenia płata, wprowadzamy wzór na ciśnienie:

$$p = -\rho_\infty \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] = 0, \quad x > b \vee x < -b \quad \text{dla } z = 0 \quad (8.22)$$

z warunkiem:

$$p \rightarrow 0 \quad \text{gdy } z \rightarrow \infty \quad (8.23)$$

Wprowadzamy też definicję wirowości:

$$\gamma(x, t) \equiv \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_U - \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_L \quad (8.24)$$

gdzie oznaczenia:  $U, L$  odnoszą się odpowiednio do górnej i dolnej strony płata:

$$U \Rightarrow z = 0^+, \quad L \Rightarrow z = 0^-$$

Równanie (8.20) jest równaniem różniczkowym, podejście globalne wymaga zaś sformułowania całkowego. Ponadto wygodniej będzie zredukować liczbę zmiennych do jednej i wyeliminować zmienną  $z$ . W tym celu należy dokonać przekształcenia Fouriera (prostego i odwrotnego) trzech elementów: równania opływu (8.20), warunku brzegowego (8.21), i wzoru na ciśnienie (8.22). W wyniku prostego przekształcenia Fouriera równanie różniczkowe cząstkowe przechodzi w równanie różniczkowe zwyczajne, warunek brzegowy w warunek początkowy, a zmienne, takie jak potencjał prędkości i ciśnienie – w odpowiednie zmienne transformowane, zależne od zmiennych Fouriera.

Po dokonaniu przekształcenia, gdzie  $*$  oznacza wielkość transformowaną w zmiennych Fouriera ( $\alpha, z, t$ ):

$$\phi^*(\alpha, z, t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, z, t) e^{-i\alpha x} dx \quad (8.25)$$

równanie Laplace'a (8.20) zmieni się następująco:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \phi(x, z, t)}{\partial z^2} &\rightarrow \frac{d^2 \phi^*(\alpha, z, t)}{dz^2} \\ \frac{\partial^2 \phi(x, z, t)}{\partial x^2} &\rightarrow \frac{d^2 \phi^*(\alpha, z, t)}{d\alpha^2} = (i\alpha)^2 \hat{\phi}^{i\alpha x} = -\alpha^2 \hat{\phi}^* e^{i\alpha x} \end{aligned} \quad (8.26)$$

Ponieważ:

$$\hat{\phi}^*(z, t) e^{i\alpha x} = \phi^*(\alpha, z, t)$$

więc możemy zapisać:

$$\frac{d^2 \phi^*}{dz^2} = -\alpha^2 \phi^*$$

Równanie Laplace'a przejdzie zatem w równanie różniczkowe zwyczajne i przybierze postać:

$$\frac{d^2 \phi^*}{dz^2} - \alpha^2 \phi^* = 0 \quad (8.27)$$

gdzie  $\alpha$  jest zmienną całkowania (zmienną Fouriera).

Warunek brzegowy (8.21) przejdzie w warunek początkowy w zmiennych Fouriera ( $\alpha, z, t$ ):

$$\left. \frac{d\phi^*}{dz} \right|_{z=0} = w_a^* \quad (8.28)$$

zaś warunek brzegowy (8.21) – w warunek początkowy:

$$\phi = 0 \text{ dla } z \rightarrow \infty \quad (8.29)$$

Rozwiązaniem równania (8.27), po zastosowaniu przekształcenia odwrotnego, jest równanie całkowe:

$$w_a = -\frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{\infty} \frac{\gamma(\xi, t)}{x - \xi} d\xi \quad (8.30)$$

W wyniku przekształceń otrzymujemy następujący wzór na skok współczynnika ciśnienia:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta C_p} = & \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \left\{ \frac{\bar{w}_a(\xi^*)}{x^* - \xi^*} / U_{\infty} \right\} d\xi^* + \frac{4}{\pi} ik \sqrt{1-x^{*2}} \int_{-1}^1 \frac{W(\xi^*) d\xi^*}{U_{\infty} \sqrt{1-\xi^{*2}} (x^* - \xi^*)} + \\ & + \frac{4}{\pi} [1 - C(k)] \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \frac{\bar{w}_a(\xi^*)}{U_{\infty}} d\xi^* \end{aligned} \quad (8.31)$$

Ostatecznie otrzymujemy następujące wzory na siły i momenty :

$$\begin{aligned} L(t) &= \pi \rho b^2 \left[ \ddot{h} + U_{\infty} \dot{\alpha} - ab\ddot{\alpha} \right] + 2\pi \rho U_{\infty} b C(k) w_{3/4}, \\ M(t) &= \pi \rho b^2 \left[ ab\omega^2 \ddot{h} - U_{\infty} b \left( \frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} - b^2 \left( \frac{1}{8} + a^2 \right) \ddot{\alpha} \right] + 2\pi \rho U_{\infty} b^2 \left( \frac{1}{2} + a \right) C(k) w_{3/4} \\ w_{3/4} &= \dot{h} + U_{\infty} \alpha + b \left( \frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} \end{aligned} \quad (8.32)$$

skąd, po uwzględnieniu założenia (8.17), otrzymujemy ostatecznie:

$$\begin{aligned} L &= \pi \rho b^2 \left[ -\omega^2 \bar{h} + i\omega U_{\infty} \bar{\alpha} + ba\omega^2 \bar{\alpha} \right] + 2\pi \rho U_{\infty} b C(k) \left[ i\omega \bar{h} + U_{\infty} \bar{\alpha} + b \left( \frac{1}{2} - a \right) i\omega \bar{\alpha} \right], \\ M &= \pi \rho b^2 \left[ -ba\omega^2 \bar{h} - U_{\infty} b \left( \frac{1}{2} - a \right) i\omega \bar{\alpha} + b^2 \left( \frac{1}{8} + a^2 \right) \omega^2 \bar{\alpha} \right] \\ &+ 2\pi \rho U_{\infty} b^2 \left( \frac{1}{2} + a \right) C(k) \left[ i\omega \bar{h} + U_{\infty} \bar{\alpha} + b \left( \frac{1}{2} - a \right) i\omega \bar{\alpha} \right] \end{aligned} \quad (8.33)$$

gdzie kreski nad wielkością oznaczają ich amplitudy. Wzory te mogą zostać wykorzystane do obliczenia niestacjonarnych obciążeń aerodynamicznych w teorii elementu łopaty.



## POCHODNE AERODYNAMICZNE ŚMIGŁOWCA

### 9.1. Wprowadzenie

Pochodne aerodynamiczne, analogicznie jak siły i momenty aerodynamiczne, są funkcjami fizycznych własności otaczającego śmigłowca powietrza, geometrycznych charakterystyk śmigłowca i kinematycznych parametrów lotu, w ogólnym przypadku zaburzonego. W równaniach ruchu śmigłowca zlinearyzowanych względem małych zaburzeń lotu ustalonego pochodne aerodynamiczne występują jako czynniki przy zmiennych stanu, nie mogą więc być funkcjami zaburzeń, a ich zależność od kinematycznych parametrów lotu ogranicza się do parametrów lotu ustalonego. W wyrażeniach na siły i momenty aerodynamiczne służących do wyznaczenia pochodnych aerodynamicznych uwzględnia się zatem tylko człony liniowe względem zaburzeń. Rzeczywisty charakter zależności obciążeń aerodynamicznych od zmiennych stanu jest na ogół nieliniowy i dlatego tak wyznaczona pochodna aerodynamiczna może być traktowana jako pierwsze przybliżenie. Chociaż mniej dokładne, mają tę zaletę, że dają się wyrazić w formie analitycznej. Dokładniejsza metoda wyznaczania pochodnych aerodynamicznych, umożliwiająca uwzględnienie nieliniowych zależności obciążeń aerodynamicznych od kinematycznych parametrów lotu, opiera się na analizie zmian sił aerodynamicznych w wyniku skończonych przyrostów zmiennych stanu. Rzeczywiste zależności współczynników aerodynamicznych od kinematycznych parametrów lotu są zwykle dane w formie zdyskretyzowanej, ponadto w metodzie tej zachodzi konieczność stosowania iteracji, toteż ma ona charakter numeryczny.

Bardziej szczegółowo obie metody zostaną opisane w dalszej części tego rozdziału. Ich wspólną cechą będzie założenie stacjonarnego, a w większości przypadków także dwuwymiarowego opływu. Obciążenia aerodynamiczne w ogólnym stanie lotu śmigłowca powstają na wszystkich jego zewnętrznych elementach konstrukcyjnych, toteż i pochodne aerodynamiczne zostaną obliczone oddzielnie, dla

wirnika nośnego, śmigła ogonowego i kadłuba ze statecznikiem poziomym, a następnie zsumowane dla każdej zmiennej stanu.

W celu zwiększenia przejrzystości analizy i ułatwienia interpretacji, pochodne aerodynamiczne, zwłaszcza pochodzące od wirnika nośnego, zostaną podzielone na dwie grupy:

- a) pochodne sił i momentów działających w umownej płaszczyźnie symetrii śmigłowca (siły:  $X$  i  $Z$  oraz moment pochylający  $M$ );
- b) pochodne pozostałych aerodynamicznych sił i momentów (siła boczna  $Y$  oraz momenty: przechylający  $L$  i odchylający  $N$ ).

## 9.2. Pochodne aerodynamiczne sił i momentów wirnika nośnego działających w umownej płaszczyźnie symetrii śmigłowca

Niech ruch wirnika nośnego będzie opisany w związanym ze śmigłowcem układzie współrzędnych  $O_w x_w y_w z_w$ , którego początek  $O_w$  jest w punkcie przecięcia wału z płaszczyzną piasty, oś  $z_w$  jest skierowana wzdłuż osi wału i zwrócona w dół, a pozostałe osie są równoległe do osi  $Oxyz$  układu opisanego w rozdziale 5.

Niech wypadkowa siła aerodynamiczna wirnika nośnego ma trzy ortogonalne składowe: prostopadły do płaszczyzny końców łopat ciąg  $T_D$  oraz skierowaną do tyłu siłę  $H_D$  i skierowaną w prawo siłę  $S_D$ .

W układzie osi  $O_w x_w z_w$  siła ta ma składowe (rys. 9.1a i 9.1b):

$$\begin{aligned} X_w &= -(T_D \cos b_{1w} + S_D \sin b_{1w}) \sin a_{1w} - H_D \cos a_{1w}, \\ Z_w &= -(T_D \cos b_{1w} + S_D \sin b_{1w}) \cos a_{1w} + H_D \sin a_{1w} \end{aligned} \quad (9.1)$$

Po zaburzeniu lotu ustalonego składowe  $X_w$  i  $Z_w$  doznają przyrostów:

$$\begin{aligned} \Delta X_w &= -\left[ (T_D + \Delta T_D) \cos(b_{1w} + \Delta b_{1w}) + (S_D + \Delta S_D) \sin(b_{1w} + \Delta b_{1w}) \right] \times \\ &\quad \times \sin(a_{1w} + \Delta a_{1w}) - (H_D + \Delta H_D) \cos(a_{1w} + \Delta a_{1w}) - X_w \\ \Delta Z_w &= -\left[ (T_D + \Delta T_D) \cos(b_{1w} + \Delta b_{1w}) + (S_D + \Delta S_D) \sin(b_{1w} + \Delta b_{1w}) \right] \times \\ &\quad \times \cos(a_{1w} + \Delta a_{1w}) + (H_D + \Delta H_D) \sin(a_{1w} + \Delta a_{1w}) - Z_w \end{aligned} \quad (9.2)$$

Kąty  $a_{1w}$  i  $b_{1w}$  oraz ich przyrosty, a także przyrosty sił  $\Delta T_D$ ,  $\Delta H_D$  i  $\Delta S_D$  są zwykle na tyle małe, że wyrażenia (9.1) i (9.2) można przedstawić w zlinearyzowanej względem przyrostów postaci:

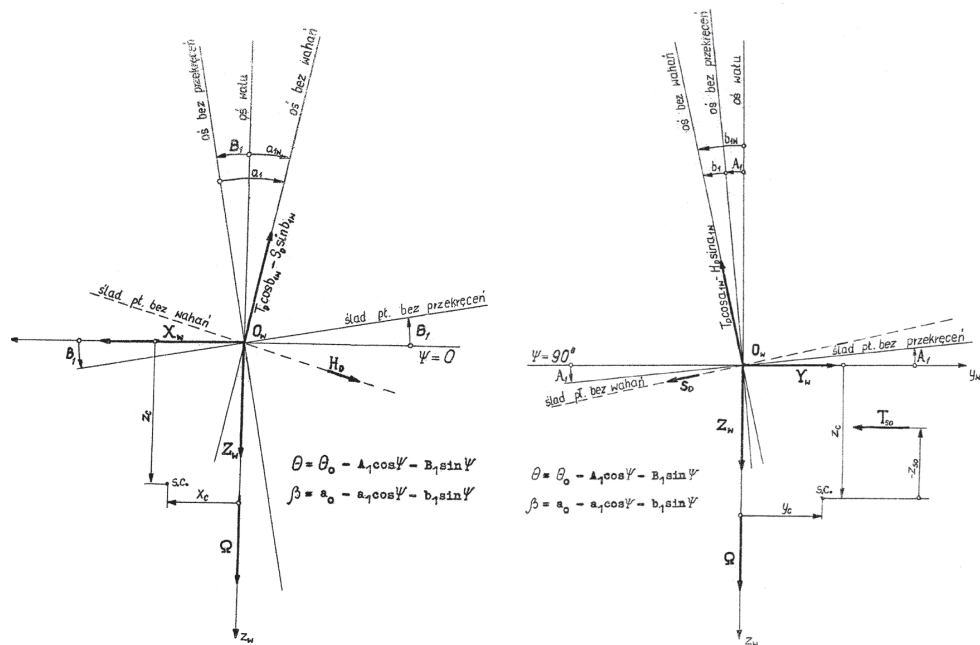
$$\begin{aligned}\Delta X_w &\cong -T_D \Delta a_{1w} - a_{1w} \Delta T_D - \Delta H_D \\ \Delta Z_w &\cong -\Delta T_D + a_{1w} \Delta H_D + H_D \Delta a_{1w}\end{aligned}\quad (9.3)$$

przy czym (rys. 9.1)

$$a_{1w} = a_1 - B_1, \quad (9.4)$$

więc w warunkach lotu „z trzymanym sterem” ( $B_1 = \text{const.}$ )

$$\Delta a_{1w} = \Delta a_1 \quad (9.5)$$



**Rys. 9.1.** Schematyczne przedstawienie charakterystycznych płaszczyzn i sił działających na wirnik nośny śmigłowca: a) w płaszczyźnie symetrii, b) w płaszczyźnie bocznej

Uwzględniając ostatni związek oraz dzieląc (9.3) kolejno przez przyrosty  $du$ ,  $dv$ ,  $dw$ ,  $dp$ ,  $dq$ ,  $dr$  zmiennych stanu i przechodząc do przyrostów nieskończenie małych, otrzymuje się następujące zależności:

$$\left\{ \begin{array}{l} (X_u)_w = \frac{\delta X_w}{\delta u} = -T_D \frac{\delta a_1}{\delta u} - a_{1w} \frac{\delta T_D}{\delta u} - \frac{\delta H_D}{\delta u} \\ (X_v)_w = \frac{\delta X_w}{\delta v} = -T_D \frac{\delta a_1}{\delta v} - a_{1w} \frac{\delta T_D}{\delta v} - \frac{\delta H_D}{\delta v} \\ (X_w)_w = \frac{\delta X_w}{\delta w} = -T_D \frac{\delta a_1}{\delta w} - a_{1w} \frac{\delta T_D}{\delta w} - \frac{\delta H_D}{\delta w} \\ (X_p)_w = \frac{\delta X_w}{\delta p} = -T_D \frac{\delta a_1}{\delta p} - a_{1w} \frac{\delta T_D}{\delta p} - \frac{\delta H_D}{\delta p} \\ (X_q)_w = \frac{\delta X_w}{\delta q} = -T_D \frac{\delta a_1}{\delta q} - a_{1w} \frac{\delta T_D}{\delta q} - \frac{\delta H_D}{\delta q} \\ (X_r)_w = \frac{\delta X_w}{\delta r} = -T_D \frac{\delta a_1}{\delta r} - a_{1w} \frac{\delta T_D}{\delta r} - \frac{\delta H_D}{\delta r} \end{array} \right. \quad (9.6)$$

które w bezwymiarowej formie przybierają postać:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_u)_w = -t_c \frac{\delta a_1}{\delta \bar{u}} - a_{1w} \frac{\delta t_c}{\delta \bar{u}} - \frac{\delta h_c}{\delta \bar{u}} \\ (x_v)_w = -t_c \frac{\delta a_1}{\delta \bar{v}} - a_{1w} \frac{\delta t_c}{\delta \bar{v}} - \frac{\delta h_c}{\delta \bar{v}} \\ (x_w)_w = -t_c \frac{\delta a_1}{\delta \bar{w}} - a_{1w} \frac{\delta t_c}{\delta \bar{w}} - \frac{\delta h_c}{\delta \bar{w}} \\ (x_p)_w = -t_c \frac{\delta a_1}{\delta \bar{p}} - a_{1w} \frac{\delta t_c}{\delta \bar{p}} - \frac{\delta h_c}{\delta \bar{p}} \\ (x_q)_w = -t_c \frac{\delta a_1}{\delta \bar{q}} - a_{1w} \frac{\delta t_c}{\delta \bar{q}} - \frac{\delta h_c}{\delta \bar{q}} \\ (x_r)_w = -t_c \frac{\delta a_1}{\delta \bar{r}} - a_{1w} \frac{\delta t_c}{\delta \bar{r}} - \frac{\delta h_c}{\delta \bar{r}} \end{array} \right. \quad (9.7)$$

gdzie:

$$t_c = \frac{T_D}{\rho A_{WN} \sigma V_T^2} \quad \text{oraz} \quad h_c = \frac{H_D}{\rho A_{WN} \sigma V_T^2}; \quad T_D \approx mg \quad (9.8)$$

Postępując analogicznie z drugim równaniem zależności (9.3) otrzymuje się następujący układ równań określający pochodzące od wirnika bezwymiarowe pochodne aerodynamiczne siły  $Z$  względem przyrostów zmiennych stanu:

$$\left\{ \begin{array}{l} (z_u)_w = -\frac{\delta t_c}{\delta \bar{u}} + a_{1w} \frac{\delta h_c}{\delta \bar{u}} + h_c \frac{\delta a_1}{\delta \bar{u}} \\ (z_v)_w = -\frac{\delta t_c}{\delta \bar{v}} + a_{1w} \frac{\delta h_c}{\delta \bar{v}} + h_c \frac{\delta a_1}{\delta \bar{v}} \\ (z_w)_w = \frac{\delta t_c}{\delta \bar{w}} + a_{1w} \frac{\delta h_c}{\delta \bar{w}} + h_c \frac{\delta a_1}{\delta \bar{w}} \\ (z_p)_w = -\frac{\delta t_c}{\delta \bar{p}} + a_{1w} \frac{\delta t_c}{\delta \bar{p}} + h_c \frac{\delta a_1}{\delta \bar{p}} \\ (z_q)_w = -\frac{\delta t_c}{\delta \bar{q}} + a_{1w} \frac{\delta h_c}{\delta \bar{q}} + h_c \frac{\delta a_1}{\delta \bar{q}} \\ (z_r)_w = -\frac{\delta t_c}{\delta \bar{r}} + a_{1w} \frac{\delta h_c}{\delta \bar{r}} + h_c \frac{\delta a_1}{\delta \bar{r}} \end{array} \right. \quad (9.9)$$

Moment pochylający  $M_w$  zostanie obliczony jako suma dwóch składników:

- $M_a$  – pochodzącego od wytworzonej na wirniku siły aerodynamicznej,
- $M_b$  – pochodzącego od siły bezwładności powstającej przy wahaniami łopat względem rozstawionych w stosunku do osi wału przegubów poziomych:

$$M_w = M_a + M_b \quad (9.10)$$

Z rysunku 9.1 wynika, że:

$$M_a = -X_w z_c + Z_w x_c \quad (9.11)$$

Elementarna siła bezwładności  $dB_\beta$  wynikająca z wahań łopaty w przegubie poziomym (rys. 9.2):

$$dB_\beta = \frac{d^2 \beta}{dt^2} m(\xi) \xi d\xi \quad (9.12)$$

gdzie  $\xi$  jest współrzędną mierzoną wzdłuż łopaty.

Pamiętając, że:

$$\frac{d^2 \beta}{dt^2} = \Omega^2 \frac{d^2 \beta}{d\Psi^2} \quad (9.13)$$

całkowita siła bezwładności jednej łopaty wynosi:

$$B_{\beta}(\psi) = \Omega^2 \int_0^{R-e} \frac{d^2 \beta}{d\psi^2} m(\xi) \xi d\xi = \Omega^2 S_2 \frac{d^2 \beta}{d\psi^2} \quad (9.14)$$

gdzie:

$$S_2 = \int_0^{R-e} m(\xi) \xi d\xi \quad (9.15)$$

jest momentem statycznym łopaty względem osi przegubu poziomego.

Siła  $B_{\beta}(\psi)$  jest przenoszona z łopaty na przegub poziomy w odległości  $e$  od osi piasty i wiruje wraz z łopatą wokół osi wału wirnika. Moment tej siły względem osi  $y$  (pochylający) ma wartość (rys. 9.2 i 9.3):

$$M_{\beta}(\psi) = B_{\beta} e \cos \beta \cos \psi \quad (9.16)$$

Przyjmując, że:  $\beta(\psi) = a_o - a_{1w} \cos \psi - b_{1w} \sin \psi$  oraz zakładając  $\cos \beta \approx 1$ , otrzymamy średnią wartość momentu pochylającego  $M_b$  pochodzącego od  $n$  łopat:

$$M_b = \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_{\beta}(\psi) d\psi = \frac{ne}{2\pi} \Omega^2 S_2 \int_0^{2\pi} (a_{1w} \cos \psi + b_{1w} \sin \psi) \cos \psi d\psi = \frac{ne}{2} \Omega^2 S_2 a_{1w} = M_s a_{1w} \quad (9.17)$$

gdzie:

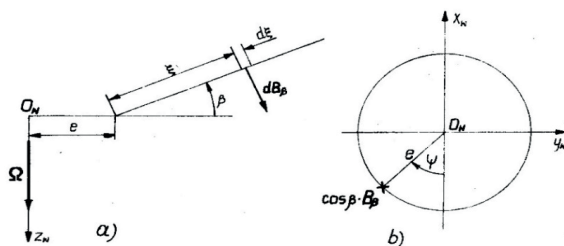
$$M_s = ne \Omega^2 S_2 / 2 \quad (9.18)$$

Uwzględniając (9.11) i (9.17), wyrażenie (9.10) przybiera postać:

$$M_w = -X_w z_c + Z_w x_c + M_s a_{1w} \quad (9.19)$$

skąd przyrost  $\Delta M_w$  po zaburzeniu lotu ustalonego i uwzględnieniu (9.3) ma wartość:

$$\Delta M_w = -z_c \Delta X_w + x_c \Delta Z_w + M_s \Delta a_1 \quad (9.20)$$



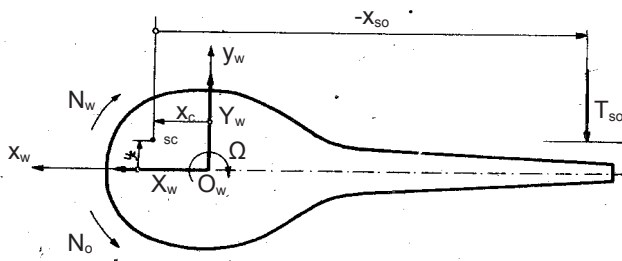
**Rys. 9.2.** Siła bezwładności działająca na łopatę wirnika nośnego

Dzieląc powyższe wyrażenie kolejno przez przyrosty  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$ ,  $\delta p$ ,  $\delta q$ ,  $\delta r$  zmiennych stanu i przechodząc do przyrostów nieskończenie małych oraz sprowadzając tak powstałe równanie do postaci bezwymiarowej, otrzymuje się następujące pochodne aerodynamiczne momentu pochylającego  $M$  pochodzące od wirnika nośnego:

$$\left. \begin{aligned} (m_u)_w &= \bar{z}_c(x_u)_w + \bar{x}_c(z_u)_w + c_{ms} \frac{\delta a_1}{\delta \bar{u}} \\ (m_v)_w &= -\bar{z}_c(x_v)_w + \bar{x}_c(z_v)_w + c_{ms} \frac{\delta a_1}{\delta \bar{v}} \\ (m_w)_w &= -\bar{z}_c(x_w)_w + \bar{x}_c(z_w)_w + c_{ms} \frac{\delta a_1}{\delta \bar{w}} \\ (m_p)_w &= -\bar{z}_c(x_p)_w + \bar{x}_c(z_p)_w + c_{ms} \frac{\delta a_1}{\delta \bar{p}} \\ (m_q)_w &= -\bar{z}_c(x_q)_w + \bar{x}_c(z_q)_w + c_{ms} \frac{\delta a_1}{\delta \bar{q}} \\ (m_r)_w &= -\bar{z}_c(x_r)_w + \bar{x}_c(z_r)_w + c_{ms} \frac{\delta a_1}{\delta \bar{r}} \end{aligned} \right\} \quad (9.21)$$

gdzie:

$$c_{ms} = \frac{M_s}{\rho A_{WN} \sigma \Omega^2 R^3}, \quad \bar{x}_c = \frac{x_c}{R}, \quad \bar{z}_c = \frac{z_c}{R} \quad (9.22)$$



**Rys. 9.3.** Układ sił i momentów obciążających kadłub śmigłowca w płaszczyźnie poziomej, pochodzących od wirnika nośnego i śmigła ogonowego

### 9.3. Pochodne aerodynamiczne asymetrycznych sił i momentów wirnika nośnego

W tym podrozdziale zostaną wyprowadzone wyrażenia określające pochodne aerodynamiczne siły bocznej  $Y$  oraz momentów: pochylającego  $L$  i odchylającego  $N$ .

Rzutując siły aerodynamiczne wirnika nośnego na oś  $y_w$ , otrzymuje się (rys 9.1b, rys. 9.3):

$$Y_w = (T_D \cos a_{1w} - H_D \sin a_{1w}) \sin b_{1w} + S_D \cos b_{1w} \quad (9.23)$$

Po zaburzeniu lotu ustalonego (stosując uproszczenia analogiczne jak przy wyprowadzeniu wyrażen (9.3) i (9.20)) składowa ta doznaje przyrostu o wartość:

$$\Delta Y_w = b_{1w} \Delta T_D + T_D \Delta b_{1w} + \Delta S_D \quad (9.24)$$

Kąt pochylenia  $b_{1w}$  osi stożka wirnika względem wału, mierzony w płaszczyźnie osi  $y_w z_w$ , jest sumą (rys. 9.1b):

$$b_{1w} = A_1 + b_1 \quad (9.25)$$

więc dla przypadku „steru trzymanego” ( $A_1 = \text{const.}$ ) będzie równy:

$$\Delta b_{1w} = \Delta b_1 \quad (9.26)$$

Uwzględniając ten związek i dzieląc (9.24) kolejno przez przyrosty  $du$ ,  $dv$ ,  $dw$ ,  $dp$ ,  $dq$ ,  $dr$  zmiennych stanu i przechodząc do przyrostów nieskończenie małych, otrzymuje się następujący układ równań:

$$\begin{cases} (Y_u)_w = \frac{\delta Y_w}{\delta u} = b_{1w} \frac{\delta T_D}{\delta u} + T_D \frac{\delta b_1}{\delta u} + \frac{\delta S_D}{\delta u} \\ (Y_v)_w = \frac{\delta Y_w}{\delta v} = b_{1w} \frac{\delta T_D}{\delta v} + T_D \frac{\delta b_1}{\delta v} + \frac{\delta S_D}{\delta v} \\ (Y_w)_w = \frac{\delta Y_w}{\delta w} = b_{1w} \frac{\delta T_D}{\delta w} + T_D \frac{\delta b_1}{\delta w} + \frac{\delta S_D}{\delta w} \end{cases} \quad (9.27)$$



$$\begin{cases} (Y_p)_w = \frac{\delta Y_w}{\delta p} = b_{1w} T_D \frac{\delta b_1}{\delta p} + \frac{\delta S_D}{\delta p} \\ (Y_q)_w = \frac{\delta Y_w}{\delta q} = b_{1w} \frac{\delta T_D}{\delta q} + T_D \frac{\delta b_1}{\delta q} + \frac{\delta S_D}{\delta q} \\ (Y_r)_w = \frac{\delta Y_w}{\delta r} = b_{1w} \frac{\delta T_D}{\delta r} + T_D \frac{\delta b_1}{\delta r} + \frac{\delta S_D}{\delta r} \end{cases} \quad (9.28)$$

który w formie bezwymiarowej przybiera postać:

$$\begin{cases} (y_u)_w = b_{1w} \frac{\delta t_c}{\delta u} + t_c \frac{\delta b_1}{\delta u} + \frac{\delta s_c}{\delta u} \\ (y_v)_w = b_{1w} \frac{\delta t_c}{\delta v} + t_c \frac{\delta b_1}{\delta v} + \frac{\delta s_c}{\delta v} \\ (y_w)_w = b_{1w} \frac{\delta t_c}{\delta w} + t_c \frac{\delta b_1}{\delta w} + \frac{\delta s_c}{\delta w} \\ (y_p)_w = b_{1w} \frac{\delta t_c}{\delta \bar{p}} + t_c \frac{\delta b_1}{\delta \bar{p}} + \frac{\delta s_c}{\delta \bar{p}} \\ (y_q)_w = b_{1w} \frac{\delta t_c}{\delta \bar{q}} + t_c \frac{\delta b_1}{\delta \bar{q}} + \frac{\delta s_c}{\delta \bar{q}} \\ (y_r)_w = b_{1w} \frac{\delta t_c}{\delta \bar{r}} + t_c \frac{\delta b_1}{\delta \bar{r}} + \frac{\delta s_c}{\delta \bar{r}} \end{cases} \quad (9.29)$$

gdzie, analogicznie do (9.8),

$$s_c = \frac{S_D}{\rho A_{wN} \sigma V_T^2} \quad (9.30)$$

Moment pochylający  $L_w$ , podobnie jak opisany w poprzednim punkcie moment pochylający  $M_w$  (9.20), zostanie przedstawiony w formie sumy dwóch składników:  $L_a$  – pochodzącego od wytworzonej na wirniku siły aerodynamicznej i  $L_b$  – pochodzącego od siły bezwładności powstającej przy wahaniach łopat względem rozstawionych w stosunku do osi wału przegubów poziomych:

$$L_w = L_a + L_b \quad (9.31)$$

Na podstawie rys. 9.1b:

$$L_a = Y_w z_c - Z_w y_c \quad (9.32)$$

Moment  $L_\beta(\psi)$ , analogicznie do  $M_\beta(\psi)$  (9.16), ma postać:

$$L_\beta(\psi) = -B_\beta e \cos \beta \sin \psi \quad (9.33)$$

zaś  $L_b$ , analogicznie do  $M_b$  (9.17):

$$L_b = -M_s b_{1w} \quad (9.34)$$

Wstawiając (9.32) i (9.34) do wzoru (9.31), otrzymujemy postać:

$$L_w = Y_w z_c - Z_w y_c - M_s b_{1w} \quad (9.35)$$

a uwzględniając (9.24):

$$\Delta L_w = z_c \Delta Y_w - y_c \Delta Z_w - M_s \Delta b_1 \quad (9.36)$$

otrzymuje się następujące bezwymiarowe pochodne aerodynamiczne momentu przechylającego śmigłowiec, pochodzące od wirnika:

$$\left\{ \begin{array}{l} (l_u)_w = \bar{z}_c (y_u)_w - \bar{y}_c (z_u)_w - c_{ms} \frac{\delta b_1}{\delta u} \\ (l_v)_w = \bar{z}_c (y_v)_w - \bar{y}_c (z_v)_w - c_{ms} \frac{\delta b_1}{\delta v} \\ (l_w)_w = \bar{z}_c (y_w)_w - \bar{y}_c (z_w)_w - c_{ms} \frac{\delta b_1}{\delta w} \\ (l_p)_w = \bar{z}_c (y_p)_w - \bar{y}_c (z_p)_w - c_{ms} \frac{\delta b_1}{\delta p} \\ (l_q)_w = \bar{z}_c (y_q)_w - \bar{y}_c (z_q)_w - c_{ms} \frac{\delta b_1}{\delta q} \\ (l_r)_w = \bar{z}_c (y_r)_w - \bar{y}_c (z_r)_w - c_{ms} \frac{\delta b_1}{\delta r} \end{array} \right. \quad (9.37)$$

gdzie, analogicznie do (9.22):  $\bar{y}_c = y_c / R$ , zaś pochodne  $(y_u)_w, \dots, (y_r)_w$  są określone w układzie równań (9.29), a pochodna  $(z_u)_w, \dots, (z_r)_w$  – w układzie równań (9.37).

Moment odchylający  $N_w$  zostanie obliczony w oparciu o rys. 5.3, z którego wynika, że:

$$N_w = X_w y_c - Y_w x_c - N_o \quad (9.38)$$

gdzie,  $N_o$  jest momentem oporowym wirnika nośnego, więc przyrost:

$$\Delta N_w = \Delta X_w y_c - \Delta Y_w x_c - \Delta N_o \quad (9.39)$$

a bezwymiarowe pochodne aerodynamiczne momentu odchylającego przybierają postać:

$$\left\{ \begin{array}{l} (n_u)_w = (x_u)_w \bar{y}_c - (y_u)_w \bar{x}_c - \frac{\delta n_o}{\delta u} \\ (n_v)_w = (x_v)_w \bar{y}_c - (y_v)_w \bar{x}_c - \frac{\delta n_o}{\delta v} \\ (n_w)_w = (x_w)_w \bar{y}_c - (y_w)_w \bar{x}_c - \frac{\delta n_o}{\delta w} \\ (n_p)_w = (x_p)_w \bar{y}_c - (y_p)_w \bar{x}_c - \frac{\delta n_o}{\delta p} \\ (n_q)_w = (x_q)_w \bar{y}_c - (y_q)_w \bar{x}_c - \frac{\delta n_o}{\delta q} \\ (n_r)_w = (x_r)_w \bar{y}_c - (y_r)_w \bar{x}_c - \frac{\delta n_o}{\delta r} \end{array} \right. \quad (9.40)$$

gdzie:

$$n_o = \frac{N_o}{\rho A_{WN} \sigma V_T^2} \quad (9.41)$$

## 9.4. Pochodne aerodynamiczne śmigła ogonowego

Spośród sił i momentów aerodynamicznych powstających przy opływie śmigła ogonowego najważniejszą rolę odgrywają: ciąg  $T_{so}$  potrzebny do zrównoważenia momentu oporowego wirnika nośnego oraz moment oporowy  $M_{oso}$  samego śmigła ogonowego. W przypadku lotu zaburzonego ten ostatni zmienia się niewiele, toteż pochodne aerodynamiczne pochodzące od śmigła ogonowego zazwyczaj utożsamia się z pochodnymi ciągu śmigła ogonowego, mającymi wpływ na ruch śmigłowca poprzez siłę boczną  $Y_{so}$  oraz momenty: przechylający  $L_{so}$  i odchylający  $N_{so}$  [2.8].

Zgodnie z konwencją znaków na rys. 9.3 siła boczna  $Y_{so}$  pochodząca od śmigła ogonowego jest równa:

$$Y_{so} = -T_{so} \quad (9.42)$$

więc pochodne siły bocznej względem zmiennych stanu pochodzące od śmigła ogonowego mają postać:

$$\begin{cases} (Y_u)_{so} = -\frac{\delta T_{so}}{\delta u}, & (Y_v)_{so} = -\frac{\delta T_{so}}{\delta v}, & (Y_w)_{so} = -\frac{\delta T_{so}}{\delta w} \\ (Y_p)_{so} = -\frac{\delta T_{so}}{\delta p}, & (Y_q)_{so} = -\frac{\delta T_{so}}{\delta q}, & (Y_r)_{so} = -\frac{\delta T_{so}}{\delta r} \end{cases} \quad (9.43)$$

a w formie bezwymiarowej:

$$\begin{cases} (y_u)_{so} = -\frac{\delta t_{so}}{\delta \bar{u}}, & (y_v)_{so} = -\frac{\delta t_{so}}{\delta \bar{v}}, & (y_w)_{so} = -\frac{\delta t_{so}}{\delta \bar{w}} \\ (y_p)_{so} = -\frac{\delta t_{so}}{\delta \bar{p}}, & (y_q)_{so} = -\frac{\delta t_{so}}{\delta \bar{q}}, & (y_r)_{so} = -\frac{\delta t_{so}}{\delta \bar{r}} \end{cases} \quad (9.44)$$

gdzie, analogicznie do (9.8):

$$t_{so} = \frac{T_{so}}{\rho A_{WN} \sigma V_T^2} \quad (9.45)$$

jest bezwymiarowym współczynnikiem ciągu śmigła ogonowego.

Moment przechylający śmigłowca pochodzący od śmigła ogonowego zgodnie z rys. 9.3 ma wartość:

$$L_{so} = T_{so} z_{so} \quad (9.46)$$

więc odpowiednie pochodne mają wartość:

$$\begin{cases} (L_u)_{so} = z_{so} \frac{\delta T_{so}}{\delta u}, & (L_v)_{so} = z_{so} \frac{\delta T_{so}}{\delta v}, & (L_w)_{so} = z_{so} \frac{\delta T_{so}}{\delta w} \\ (L_p)_{so} = z_{so} \frac{\delta T_{so}}{\delta p}, & (L_q)_{so} = z_{so} \frac{\delta T_{so}}{\delta q}, & (L_r)_{so} = z_{so} \frac{\delta T_{so}}{\delta r} \end{cases} \quad (9.47)$$

a w formie bezwymiarowej:

$$(l_u)_{so} = \bar{z}_{so} \frac{\delta t_{so}}{\delta \bar{u}}, \quad (9.48)$$

$$\begin{cases} (l_u)_{so} = \bar{z}_{so} \frac{\delta t_{so}}{\delta \bar{u}}, & (l_v)_{so} = \bar{z}_{so} \frac{\delta t_{so}}{\delta \bar{v}}, & (l_w)_{so} = \bar{z}_{so} \frac{\delta t_{so}}{\delta \bar{w}} \\ (l_p)_{so} = \bar{z}_{so} \frac{\delta t_{so}}{\delta \bar{p}}, & (l_q)_{so} = \bar{z}_{so} \frac{\delta t_{so}}{\delta \bar{q}}, & (l_r)_{so} = \bar{z}_{so} \frac{\delta t_{so}}{\delta \bar{r}} \end{cases} \quad (9.49)$$

Analogicznie, pochodne momentu odchylającego śmigłowca, pochodzące od śmigła ogonowego mają wartość (rys. 9.3):

$$\begin{cases} (N_u)_{so} = -x_{so} \frac{\delta T_{so}}{\delta u}, & (N_v)_{so} = -x_{so} \frac{\delta T_{so}}{\delta v}, & (N_w)_{so} = -x_{so} \frac{\delta T_{so}}{\delta w} \\ (N_p)_{so} = -x_{so} \frac{\delta T_{so}}{\delta p}, & (N_q)_{so} = -x_{so} \frac{\delta T_{so}}{\delta q}, & (N_r)_{so} = -x_{so} \frac{\delta T_{so}}{\delta r} \end{cases} \quad (9.50)$$

a w formie bezwymiarowej:

$$\begin{cases} (n_u)_{so} = -\bar{x}_{so} \frac{\delta t_{so}}{\delta \bar{u}}, & (n_v)_{so} = -\bar{x}_{so} \frac{\delta t_{so}}{\delta \bar{v}}, & (n_w)_{so} = -\bar{x}_{so} \frac{\delta t_{so}}{\delta \bar{w}} \\ (n_p)_{so} = -\bar{x}_{so} \frac{\delta t_{so}}{\delta \bar{p}}, & (n_q)_{so} = -\bar{x}_{so} \frac{\delta t_{so}}{\delta \bar{q}}, & (n_r)_{so} = -\bar{x}_{so} \frac{\delta t_{so}}{\delta \bar{r}} \end{cases} \quad (9.51)$$

gdzie:  $\bar{x}_{so} = \frac{x_{so}}{R}$ .

## 9.5. Pochodne współczynników wahań łopaty wirnika nośnego

W wyrażeniach określających pochodne aerodynamiczne pochodzące od wirnika nośnego (podrozdział 5.2) występują pochodne względem zmiennych stanu współczynników wahań łopaty np.:  $\frac{\delta a_1}{\delta \bar{u}}$ ,  $\frac{\delta b_1}{\delta \bar{r}}$ . W tym miejscu zostaną wyprowadzone wyrażenia określające te współczynniki oraz ich pochodne względem parametrów stanu.

### 9.5.1. Prędkość opływu elementu łopaty wirnika nośnego

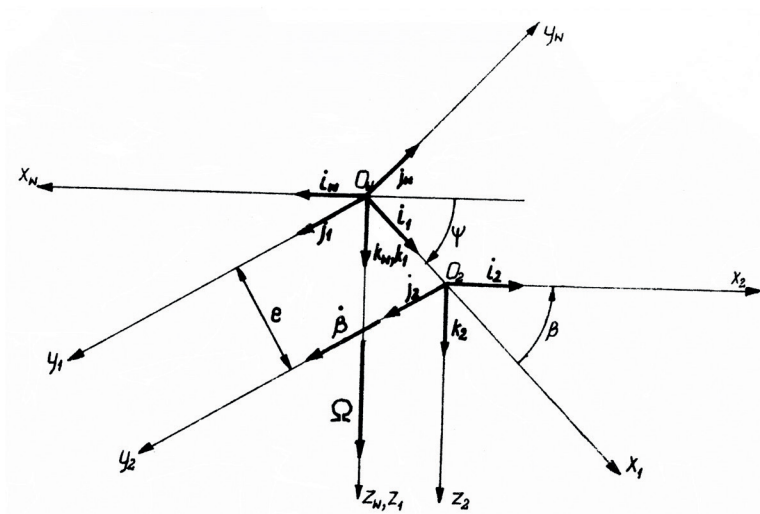
Rozważone zostaną następujące prostokątne, prawoskrętne układy współrzędnych:

- 1) związany ze śmigłowcem układ współrzędnych  $O_w x_w y_w z_w$  (rys. 9.4),
- 2) wirujący z piastą układ  $O_w x_1 y_1 z_1$ , którego oś  $z_1$  pokrywa się z osią  $z_w$  układu poprzedniego, a oś  $x_1$  jest skierowana wzdłuż elementu łączącego środek piasty z przegubem poziomym łopaty (rys. 9.4),
- 3) związany z łopatą układ  $O_2 x_2 y_2 z_2$  którego początek  $O_2$  znajduje się w punkcie przecięcia osi łopaty  $x_2$  z osią przegubu poziomego  $y_2$ , przy czym osie  $y_2$  i  $y_1$  są do siebie równoległe i zwrócone w tę samą stronę (rys. 9.4).

Między wersorami osi wymienionych układów istnieją następujące zależności:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{k}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & -\cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_w \\ \mathbf{j}_w \\ \mathbf{k}_w \end{bmatrix} \quad (9.52)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{j}_2 \\ \mathbf{k}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{k}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \beta \cos \psi & -\cos \beta \sin \psi & -\sin \beta \\ \sin \psi & -\cos \psi & 0 \\ -\sin \beta \cos \psi & -\sin \beta \sin \psi & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_w \\ \mathbf{j}_w \\ \mathbf{k}_w \end{bmatrix} \quad (9.53)$$



**Rys. 9.4.** Układy współrzędnych wirnika nośnego

Układ  $O_w x_1 y_1 z_1$  obraca się z prędkością kątową:

$$\Omega_1 = \omega + \Omega \mathbf{k}_1 \quad (9.54)$$

gdzie:

$$\omega = p \mathbf{i}_w + q \mathbf{j}_w + r \mathbf{k}_w \quad (9.55)$$

jest wektorem zaburzeń prędkości kątowej  $\Omega$  śmigłowca, a układ  $O_x x_2 y_2 z_2$  obraca się z prędkością kątową:

$$\Omega_2 = \Omega_1 + \dot{\beta} \mathbf{j}_2 \quad (9.56)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}_2 = & \left[ -p \cos \beta \cos \psi \quad -q \cos \beta \sin \psi \quad -(\Omega + r) \sin \beta \right] \mathbf{i}_2 + \left[ p \sin \psi \quad -q \cos \psi \quad +\dot{\beta} \right] \mathbf{j}_2 + \\ & + \left[ -p \sin \beta \cos \psi \quad -q \sin \beta \sin \psi \quad +(\Omega + r) \cos \beta \right] \mathbf{k}_2\end{aligned}\quad (9.57)$$

Środek  $O_w$  piasty wirnika w locie zaburzonej porusza się z prędkością:

$$\mathbf{V}_w = \mathbf{V}_c - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c \quad (9.58)$$

gdzie:

$$\mathbf{V}_c = (U_1 + u) \mathbf{i}_w + (V_1 + v) \mathbf{j}_w + (W_1 + w) \mathbf{k}_w \quad (9.59)$$

jest prędkością środka ciężkości śmigłowca w locie zaburzonej, a

$$\mathbf{r}_c = x_c \mathbf{i}_w + y_c \mathbf{j}_w + z_c \mathbf{k}_w \approx z_c \mathbf{k}_w \quad (9.60)$$

jest promieniem wektorem łączącym środek piasty  $O_w$  ze środkiem masy śmigłowca (rys. 9.1).

Po uwzględnieniu (9.57) i (9.56) wyrażenie (9.58) przybiera postać:

$$\mathbf{V}_w = U_w \mathbf{i}_w + V_w \mathbf{j}_w + W_w \mathbf{k}_w \quad (9.61)$$

gdzie:

$$\begin{cases} U_w = U_1 + u - qz_c \\ V_w = V_1 + v + pz_c \\ W_w = W_1 + w \end{cases} \quad (9.62)$$

Pomijając poprzeczne wymiary łopaty, prędkości jej punktów położonych w przekroju odległym o  $x_2$  od osi  $y_2$  obrotu w przegubie poziomym (rys. 9.4) na wartość:

$$\mathbf{V}(x_2) = \mathbf{V}_w + \boldsymbol{\Omega}_1 \times e \mathbf{i}_1 + \boldsymbol{\Omega}_2 \times x_2 \mathbf{i}_2 \quad (9.63)$$

a uwzględniając (9.54), (9.57) i (9.61) i pamiętając, że<sup>3</sup>

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_w \\ \mathbf{j}_w \\ \mathbf{k}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & -\cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{k}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\beta \cos\psi & \sin\psi & -\sin\beta \cos\psi \\ -\cos\beta \sin\psi & -\cos\psi & -\sin\beta \sin\psi \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{j}_2 \\ \mathbf{k}_2 \end{bmatrix} \quad (9.64)$$

oraz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{k}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{j}_2 \\ \mathbf{k}_2 \end{bmatrix}, \quad (9.65)$$

wyrażenie (9.63) przybiera postać:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(x_2) = & \left\{ -(U_o \cos \Psi + V_o \sin \Psi) \cos \beta - [W_o - e(p \sin \Psi - q \cos \Psi)] \sin \beta \right\} \mathbf{i}_2 + \\ & + \left[ U_o \sin \Psi - V_o \cos \Psi + (\Omega + r) \cdot (e + x_2 \cos \beta) - x_2 \sin \beta (p \cos \Psi + q \sin \Psi) \right] \mathbf{j}_2 + \\ & + \left\{ -(U_o \cos \Psi + V_o \sin \Psi) \sin \beta + [W_o - e(p \sin \Psi - q \cos \Psi)] \cos \beta + \right. \\ & \left. - x_2 \left( \dot{\beta} + p \sin \Psi - q \cos \Psi \right) \right\} \mathbf{k}_2 \end{aligned} \quad (9.66)$$

### 9.5.2. Równanie różniczkowe wahań łopaty wirnika nośnego

W celu analizy ruchu łopaty w przegubie poziomym zastosowane zostaną równania Lagrange'a II rodzaju w postaci:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \beta} = Q_\beta \quad (9.67)$$

gdzie:

$$E_k = \frac{1}{2} \int V^2 dm = \frac{m}{2 \cdot (R - e)} \int_o^{R-e} V^2(x_2) dx_2 \quad (9.68)$$

jest energią kinetyczną łopaty, a  $Q_\beta$  oznacza siłę uogólnioną odpowiadającą współrzędnej  $\beta$ .

<sup>3</sup> Wyrażenia (9.64) i (9.65) można wyprowadzić z (9.52) i (9.53), korzystając z faktu, że opisują one liniowe przekształcenia unitarne (zachowując długość wektorów), których macierze odwrotne są równe macierzom transponowanym [2.46].



Po wstawieniu (9.66) do (9.68) i wykonaniu całkowania otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 E_k = \frac{1}{2}m \Big\{ & U_o^2 + V_o^2 + [W_o - e \cdot (p \cdot \sin \psi - q \cdot \cos \psi)]^2 + \\
 & + e(\Omega + r) \left[ e(\Omega + r) + 2(U_o \sin \psi - V_o \cos \psi) \right] + \\
 & + S_2 \left\langle \cos \beta \left\{ (\Omega + r) \left[ e(\Omega + r) + U_o \sin \psi - V_o \cos \psi \right] + \right. \right. \\
 & \left. \left. - (p \sin \psi - q \cos \psi) [W_o - e(p \sin \psi - q \cos \psi)] \right\} + \right. \\
 & \left. + \sin \beta \left[ (V_o p - U_o q) - e(\Omega + r)(p \cos \psi + q \sin \psi) \right] + \right. \\
 & \left. + \dot{\beta} \left\{ \sin \beta (U_o \cos \psi + V_o \sin \psi) - \cos \beta [W_o - e(p \sin \psi - q \cos \psi)] \right\} \right\rangle + \\
 & + \frac{I_2}{2} \left[ (\Omega + r)^2 \cos^2 \beta + (p \cos \psi + q \sin \psi)^2 \sin^2 \beta - \right. \\
 & \left. - (\Omega + r)(p \cos \psi + q \sin \psi) \sin 2\beta + (p \sin \psi - q \cos \psi)^2 + 2\dot{\beta}(p \sin \psi - q \cos \psi) + \dot{\beta}^2 \right]
 \end{aligned} \tag{9.69}$$

gdzie  $S_2$  jest momentem statycznym (9.15), a  $I_2$  momentem bezwładności łopaty względem osi  $y_2$  przegubu poziomego.

Po podstawieniu (9.69) do (9.67) i wyrażaniu siły uogólnionej  $Q_\beta$  w postaci sumy:

$$Q_\beta = M_2 - gS_2 \tag{9.70}$$

gdzie  $M_2$  oznacza moment aerodynamiczny działający na łopatę względem osi  $y_2$  przegubu poziomego, a drugi człon po prawej stronie (9.70) jest momentem sił ciężkości względem osi  $y_2$  i wprowadzając oznaczenia:

$$\varepsilon = \frac{S_2 e}{I_2} \tag{9.71}$$

oraz po obliczeniu pochodnych energii kinetycznej i przeprowadzeniu przekształceń algebraicznych równanie wahań łopaty w przegubie poziomym przybiera postać:

$$\begin{aligned}
& I_2 \left( \ddot{\beta} + \sin \beta \cdot \left\{ (\cos \beta + \varepsilon) \cdot [(\Omega + r)^2 - pq \sin 2\psi] - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (\cos \beta - \varepsilon) \cdot (p^2 \cos^2 \psi + q^2 \sin^2 \psi) \right\} + (p \cos \psi + q \sin \psi) \times \right. \\
& \quad \times \left[ \Omega (1 + \cos 2\beta + 2\varepsilon \cos \beta) + r (\cos 2\beta + \varepsilon \cos \beta) \right] + (1 + \varepsilon \cos \beta) (\dot{p} \sin \psi - \dot{q} \cos \psi) \Big) + \\
& \quad + S_2 \left\{ \cos \beta (U_o q - V_o p - \dot{w}) + \sin \beta \left[ W_o (q \cos \Psi \psi - p \sin \Psi \psi) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + r (U_o \sin \psi - V_o \cos \psi) + (\dot{u} - \dot{p} h_c) \cos \psi + (\dot{v} + \dot{p} h_c) \sin \psi \right] + g \right\} = M_2
\end{aligned} \tag{9.72}$$

Zakładając, że kąt  $\beta$  i zaburzenia  $p, q, r$  prędkości kątowej śmigłowca są małe oraz pomijając wpływ przyspieszeń liniowych ( $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ ) i kątowych ( $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$ ), równanie (9.72) po zlinearyzowaniu przyjmie postać:

$$I_2 \left\{ \ddot{\beta} + (1 + \varepsilon) [\Omega^2 \beta + 2\Omega (p \cos \psi + q \sin \psi)] \right\} + S_2 (U_1 q - V_1 p + g) = M_2 \tag{9.73}$$

Po przejściu ze zmiennej niezależnej  $t$  (czas) na  $\psi$  (azymut łopaty), otrzymamy:

$$\dot{\beta} = \frac{1}{\Omega} \frac{d\beta}{d\psi} = \frac{\beta'}{\Omega} \quad \text{oraz} \quad \ddot{\beta} = \frac{1}{\Omega^2} \frac{d^2\beta}{d\psi^2} = \frac{\beta''}{\Omega^2} \tag{9.74}$$

Dzieląc wyrażenie (9.73) przez  $I_2 \Omega^2$  i wprowadzając oznaczenia:

$$\xi = \frac{S_2 R}{I_2}, \quad \bar{U}_1 = \frac{U_1}{\Omega R}, \quad \bar{V}_1 = \frac{V_1}{\Omega R}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\Omega}, \quad \bar{q} = \frac{q}{\Omega}, \quad \bar{g} = \frac{g}{\Omega^2 R}, \quad m_2 = \frac{M_2}{\Omega^2 I_2} \tag{9.75}$$

oraz uwzględniając (9.74), równanie (9.73) można przedstawić w postaci:

$$\beta'' + (1 + \varepsilon) [\beta + 2(\bar{p} \cos \psi + \bar{q} \sin \psi)] + \xi (\bar{U}_1 q - \bar{V}_1 \bar{p} + \bar{g}) = m_2 \tag{9.76}$$

### 9.5.3. Moment aerodynamiczny łopaty względem osi przegubu poziomego

W celu wyznaczenia występującego po prawej stronie równości (9.76) bezwymiarowego momentu aerodynamicznego  $m_2$ , obliczamy składowe prędkości opływu łopaty w przekroju  $\bar{x}_2 = x_2 / R$ : równoległą do osi  $y_2$  składową  $U_r$  i równoległą do osi  $z_2$  składową  $U_p$  (rys. 9.5). Linearyzując (9.76) względem kąta  $\beta$  i zaburzeń ustalonego lotu śmigłowca oraz pomijając wielkości  $e \ll R$  (w typowych konstrukcjach wirnika  $e / R \approx 0,04$ ) i wielkość  $r_c$  (9.60)<sup>4</sup> otrzymamy:

<sup>4</sup> Czyli zakładając, że piasta wirnika znajduje się w środku ciężkości śmigłowca.

$$\begin{aligned}
 U_T &= \left[ (\bar{U}_1 + \bar{u}) \sin \psi - (\bar{V}_1 + v) \cos \psi + (1 + \bar{r}) \bar{x}_2 \right] \Omega R \\
 U_P &= \left[ -(\bar{U}_1 \cos \psi + \bar{V}_1 \sin \psi) \beta + W_1 + w - \lambda_{i_0} (1 + k \bar{x}_2 \cos \psi) + \right. \\
 &\quad \left. - \beta' \bar{x}_2 - (\bar{p} \sin \psi - \bar{q} \cos \psi) \bar{x}_2 \right] \Omega R
 \end{aligned} \tag{9.77}$$

przy czym człon

$$\lambda_i = \lambda_{i_0} (1 + K \bar{x}_2 \cos \psi) \tag{9.78}$$

oznacza prędkość indukowaną w przekroju  $\bar{x}_2$  łopaty, obliczaną przy założeniu rozkładu Glauerta [2.63], gdzie:

$$\lambda_{i_0} = \frac{\sigma t_c}{2} \sqrt{(\bar{U}_1 + \bar{u})^2 + (\bar{V}_1 + \bar{u})^2 + (\bar{W}_1 + \bar{w} - \lambda_{i_0})^2} \tag{9.79}$$

jest średnią bezwymiarową wartością prędkości indukowanej przez wirnik nośny obliczoną z zasady ilości ruchu, a wielkość  $k$  można wyznaczyć np. z zależności (6.8):

$$K = \frac{4}{3} \frac{\bar{U}_1}{\lambda_{i_0}} \left( 1.2 + \frac{\bar{U}_1}{\lambda_{i_0}} \right) \tag{9.80}$$

Na podstawie rys. 9.5:

$$\phi = \arctan \left( \frac{U_P}{U_T} \right) \approx \frac{U_P}{U_T} \tag{9.81}$$

oraz:

$$\alpha = \Theta + \phi \tag{9.82}$$

Zakładając, że kąt  $\Theta$  ustawienia profilu łopaty względem płaszczyzny  $O_2 x_2 y_2$  zmienia się wzdłuż współrzędnej  $x_2$  według równania:

$$\Theta = \Theta_0 - \bar{\Theta}_s(x_2) \tag{9.83}$$

gdzie  $\Theta_0$  jest kątem ustawienia przy nasadzie łopaty, a  $\bar{\Theta}_s(x_2)$  kątem skrócenia łopaty wzdłuż jej długości, otrzymamy następujące wyrażenie na kąt natarcia profilu łopaty:

$$\alpha = \Theta_0 - U_P / U_T - \bar{\Theta}_s(x_2) \tag{9.84}$$

Elementarna siły aerodynamiczna  $dZ_2$  powstająca na wirniku nośnym ma wartość:

$$dZ_2 = -(dP_z \cos \phi + dP_x \sin \phi) \approx -dP_z \quad (9.85)$$

gdzie:

$$dP_x = \frac{\rho V^2}{2} C_x c dx_2 \quad (9.86)$$

$$dP_z = \frac{\rho V^2}{2} C_z c dx_2$$

oraz:

$$V^2 = U_p^2 + U_T^2 \approx U_T^2 \quad (9.87)$$

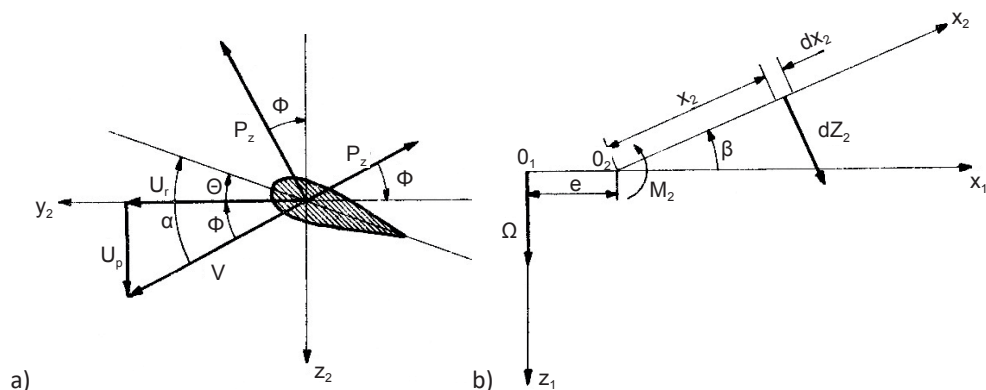
a  $\rho$ ,  $c$ ,  $C_x$  i  $C_z$  oznaczają odpowiednio: gęstość powietrza, ciężkość profilu łopaty w przekroju  $x_2$  oraz współczynniki oporu i siły nośnej łopaty, więc:

$$dZ_2 = -\frac{\rho U^2}{2} a \left[ \Theta - \bar{\Theta}_s(x_2)_0 - \frac{U_p}{U_T} \right] c dx_2 \quad (9.88)$$

gdzie  $a = \frac{\partial C_z}{\partial \alpha}$  jest pochodną współczynnika siły nośnej profilu łopaty względem kąta natarcia.

Elementarny moment aerodynamiczny względem osi przegubu poziomego powstający na segmencie łopaty o szerokości  $dx_2$  położonym w odległości  $x_2$  od osi obrotu w przegubie poziomym ma wartość (rys. 9.5b):

$$\begin{aligned} dM_2 = -x_2 dZ_2 &= \frac{1}{2} \rho c a \left\{ \left[ \Theta_0 - \bar{\Theta}_s(x_2) \right] U_T^2 + U_p U_T \right\} x_2 dx_2 = \\ &= \frac{1}{2} \rho c a \Omega^2 R^4 \left\{ \left[ \Theta_0 - \bar{\Theta}_s(x_2) \right] \bar{U}_T^2 + \bar{U}_p \bar{U}_T \right\} \bar{x}_2 d\bar{x}_2 \end{aligned} \quad (9.89)$$



**Rys. 9.5.** Układ sił aerodynamicznych działających na łopatkę wirnika nośnego

a po scałkowaniu w granicach od  $e_a$  do  $BR - e$ , ( $BR$  jest efektywnym promieniem łopaty), względem siły nośnej, (w typowych konstrukcjach wirników  $B \approx 0,97^5$ ),  $e_a$  jest odległością aerodynamicznie czynnej części łopaty od przegubu poziomego, przy założeniu stałości  $a$  wzdłuż łopaty:

$$m_2 = M_2 / \Omega^2 I_2 = \frac{1}{2} \gamma \int_{e_a}^{B-\bar{e}} \bar{c} \{ [\Theta_0 - \bar{\Theta}_s(x_2)] \bar{U}_T^2 + \bar{U}_p \bar{U}_T \} x_2 dx_2 \quad (9.90)$$

gdzie:

$$\gamma = \frac{\rho a c_0 R^4}{I_2} \quad (9.91)$$

jest stałą masową łopaty nazywaną też liczbą Locka, a  $\bar{c} = c / c_0$ , gdzie  $c_0$  jest cięciwą profilu łopaty przy nasadzie.

Występujące w (9.90) prędkości po podzieleniu (9.77) przez  $\Omega R$ , wymnożeniu oraz linearyzacji względem kąta  $\beta$  i zaburzeń ustalonego lotu śmigłowca, przybierają wartość:

$$\begin{aligned} \bar{U}_T^2 = (1 + 2\bar{r}) \bar{x}_2^2 + 2 \left\{ [\bar{U}_1(1 + \bar{r}) + \bar{u}] \sin \psi - [\bar{V}_1(1 + \bar{r}) + \bar{v}] \cos \psi \right\} \bar{x}_2 + \\ + \bar{U}_1(\bar{U}_1 + 2\bar{u}) \sin^2 \psi + \bar{V}_1(\bar{V}_1 + 2\bar{v}) \cos^2 \psi - (\bar{U}_1 \bar{V}_1 + \bar{U}_1 \bar{v}) \sin 2\psi \end{aligned} \quad (9.92)$$

oraz:

<sup>5</sup> Rozważania dotyczące tej wielkości można znaleźć np. w [2.8] lub [2.63].

$$\begin{aligned}
 \bar{U}_p \bar{U}_T = & \left[ \beta' + k \lambda_i (1 + \bar{r}) \cos \psi + \bar{p} \sin \psi - \bar{q} \cos \psi \right] \bar{x} + \\
 & + \left\{ (\bar{V}_1 \cos \psi - \bar{U}_1 \sin \psi) \beta' - (\bar{U}_1 \cos \psi + \bar{V}_1 \sin \psi) \beta + \right. \\
 & + k \lambda \left[ (\bar{V}_1 + \bar{v}) \cos \psi - (\bar{U}_1 + \bar{u}) \sin \psi \right] \cos \psi + (\bar{V}_1 \cos \psi - \bar{U}_1 \sin \psi) \times \\
 & \times (\bar{p} \sin \psi - \bar{q} \cos \psi) + \bar{w} + (1 + \bar{r})(\bar{W}_1 - \lambda) \left. \right\} \bar{x}_2 + \\
 & + \left[ (\bar{V}_1^2 - \bar{U}_1^2) \sin 2\psi / 2 + \bar{U}_1 \bar{V}_1 \cos 2\psi \right] \beta + (\bar{U}_1 \sin \psi - \bar{V}_1 \cos \psi) - \\
 & - (\bar{W}_1 - \lambda) \left[ (\bar{V}_1 + \bar{v}) \cos \psi - (\bar{U}_1 + \bar{u}) \sin \psi \right]
 \end{aligned} \tag{9.93}$$

Po wstawieniu (9.92) do (9.93) i założeniu liniowej zależności kąta skręcania łopaty wzdłuż jej długości:

$$\bar{\Theta}_s(x_2) = \Theta_s \bar{x}_2 \tag{9.94}$$

oraz liniowej zbieżności łopaty:

$$\bar{c} = 1 - t^* \frac{\bar{x}_2 - \bar{e}_a}{1 - \bar{e} - \bar{e}_a} \tag{9.95}$$

gdzie  $t^* = 1 - \frac{c_k}{c_0}$ , zaś  $c_k$  i  $c_0$  oznaczają cięciwy łopaty, odpowiednio na końcu i przy nasadzie, otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 m_2 = \frac{\gamma}{2} & \left\{ -[t_4 + (\bar{U}_1 \sin \psi - \bar{V}_1 \cos \psi) t_3] \beta' - \left\{ (\bar{U}_1 \cos \psi + \bar{V}_1 \sin \psi) t_3 - \right. \right. \\
 & - \left[ (\bar{V}_1^2 - \bar{U}_1^2) \sin 2\psi / 2 + \bar{U}_1 \bar{V}_1 \cos 2\psi \right] t_2 \left. \right\} \beta + \Theta_0 \left\{ (1 + 2\bar{r}) t_4 + \right. \\
 & + 2 \left\{ [\bar{U}_1 (1 + \bar{r}) + \bar{u}] \sin \psi - [\bar{V}_1 (1 + \bar{r}) + \bar{v}] \cos \psi \right\} t_3 + \left[ \bar{U}_1 (\bar{U}_1 + 2\bar{u}) \sin^2 \psi + \right. \\
 & + \bar{V}_1 (\bar{V}_1 + 2\bar{v}) \cos^2 \psi - (\bar{U}_1 \bar{V}_1 + \bar{U}_1 \bar{v} + \bar{V}_1 + \bar{u}) \sin 2\psi \left. \right] t_2 \left. \right\} +
 \end{aligned} \tag{9.96}$$

$$\begin{aligned}
& -\Theta_s \left\langle (1+2\bar{r})t_5 + 2 \left\{ [\bar{U}_1(1+\bar{r}) + \bar{u}] \sin \psi - [\bar{V}_1(1+\bar{r}) + \bar{v}] \cos \psi \right\} t_4 + \right. \\
& + [\bar{U}_1(\bar{U}_1 + 2\bar{u}) \sin^2 \psi + \bar{V}_1(\bar{V}_1 + 2\bar{v}) \cos^2 \psi - \\
& \left. - (\bar{U}_1\bar{V}_1 + \bar{U}_1\bar{v} + \bar{V}_1\bar{u}) \sin 2\psi \right\} t_3 \right\rangle - \left[ k\lambda_{i_0}(1+\bar{r}) \cos \psi + \bar{p} \sin \psi - \bar{q} \cos \psi \right] t_4 + \\
& + \left\{ K\lambda_{i_0} [(\bar{V}_1 + \bar{v}) \cos \psi - (\bar{U}_1 + \bar{u}) \sin \psi] \cos \psi - \right. \\
& + (\bar{V}_1 \cos \psi - \bar{U}_1 \sin \psi)(\bar{p} \sin \psi - \bar{q} \cos \psi) + \bar{w} + (1+\bar{r})(\bar{W}_1 - \lambda_{i_0}) \left. \right\} t_3 + \\
& + \left\{ (\bar{U}_1 \sin \psi - \bar{V}_1 \cos \psi) \bar{w} - (\bar{W}_1 - \lambda_{i_0}) [(\bar{V}_1 + \bar{v}) \cos \psi - (\bar{U}_1 + \bar{u}) \sin \psi] \right\} t_2 \left. \right\}
\end{aligned}$$

gdzie symbolami  $t_n$  oznaczone zostały całki typu:

$$t_n = \int_{\bar{e}_a}^{B-\bar{e}} (1-t^* \bar{x}_2) \bar{x}_2^{n-1} d\bar{x}_2 \quad (9.97)$$

#### 9.5.4. Współczynniki wahań łopaty w locie ustalonym śmigłowca

Rozważmy zlinearyzowane równanie wahań łopaty wirnika w przegubie poziomym. W tym celu prawą stronę równości (9.96) wstawimy do równania (9.76) i po uporządkowaniu otrzymamy:

$$\begin{aligned}
\beta'' = & -\frac{\gamma}{2} \left\langle t_4 + (\bar{U}_1 \sin \psi - \bar{V}_1 \cos \psi) t_3 \right\rangle \beta' + \\
& + \left( 1 + \varepsilon + \frac{\gamma}{2} \left\{ \left\{ (\bar{U}_1 \cos \psi + \bar{V}_1 \sin \psi) t_3 - \left[ \frac{(\bar{V}_1^2 - \bar{U}_1^2)}{2} \sin 2\psi + \bar{U}_1 \bar{V}_1 \cos 2\psi \right] t_2 \right\} \beta + \right. \right. \\
& + 2(1+\varepsilon)(\bar{p} \cos \psi + \bar{q} \sin \psi) + \xi(U_1 \bar{q} - \bar{V}_1 \bar{p} + \bar{g}) + \\
& + \frac{\gamma}{2} \left( -\Theta_0 \left\{ (1+2\bar{r})t_4 + [(1+\bar{r})\bar{U}_1 + \bar{u}] \sin \psi - [\bar{V}_1(1+\bar{r}) + \bar{v}] \cos \psi \right\} t_3 \right. \\
& \left. \left. + [\bar{U}_1(\bar{U}_1 + 2\bar{u}) \sin^2 \psi + \bar{V}_1(\bar{V}_1 + 2\bar{v}) \cos^2 \psi + (\bar{U}_1\bar{V}_1 + \bar{U}_1\bar{v} + \bar{V}_1\bar{u}) \sin 2\psi \right] t_2 \right) + \right. \\
& \left. \left. \right\} \beta + \right. \quad (9.98)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \Theta_s \left( (1 + 2\bar{r}) \cdot t_5 + 2 \left\{ [\bar{U}_1(1 + \bar{r}) + \bar{u}] \sin \psi - [\bar{V}_1(1 + \bar{r}) + \bar{v}] \cos \psi \right\} t_4 \right. \\
 & \left. + [\bar{U}_1 \cdot (\bar{U}_1 + 2\bar{u}) \cdot \sin^2 \Psi + \bar{V}_1(\bar{V}_1 + 2\bar{v}) \cos^2 \psi - (\bar{U}_1 \bar{V}_1 + \bar{U}_1 \bar{v} + \bar{V}_1 \bar{u}) \cdot \sin 2\psi] \cdot t_3 \right) \\
 & + [K\lambda_{i0}(1 + \bar{r}) \cos \psi + \bar{p} \sin \psi - \bar{q} \cos \psi] t_4 + \\
 & - \{ K\lambda_{i0} [ (\bar{V}_1 + \bar{v}) \cos \psi - (\bar{U}_1 + \bar{u}) \sin \psi ] \cos \psi + (\bar{V}_1 \cos \psi - \bar{U}_1 \sin \psi) (\bar{p} \sin \psi - \bar{q} \cos \psi) + \\
 & + \bar{w} + (1 + \bar{r}) (\bar{W}_1 - \lambda_{i0}) \} t_3 - \left\{ (\bar{U}_1 \sin \psi - \bar{V}_1 \cos \psi) \bar{w} + \right. \\
 & \left. - (\bar{W}_1 - \lambda_{i0}) [ (\bar{V}_1 + \bar{v}) \cos \psi - (\bar{U}_1 + \bar{u}) \sin \psi ] \right\} t_2 \Big\}
 \end{aligned}$$

W przypadku ustalonego lotu śmigłowca  $\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = \bar{p} = \bar{q} = \bar{r} = 0$  i wtedy powyższa równość przybiera postać:

$$\begin{aligned}
 \beta'' = & -\frac{\gamma}{2} \left\langle t_4 + (\bar{U}_1 \sin \psi - \bar{V}_1 \cos \psi) t_3 \right\rangle \beta' + \\
 & + \left( 1 + \varepsilon + \frac{\gamma}{2} \left\{ (\bar{U}_1 \cos \psi + \bar{V}_1 \sin \psi) t_3 - [(\bar{V}_1^2 - \bar{U}_1^2) \sin 2\psi / 2 + \bar{U}_1 \bar{V}_1 \cos 2\psi] t_2 \right\} \right) \beta + \\
 & + \frac{\gamma}{2} \left\{ -\Theta_0 \left[ t_4 + 2(\bar{U}_1 \sin \psi - \bar{V}_1 \cos \psi) t_3 + (\bar{U}_1 \sin \psi - \bar{V}_1 \cos \psi)^2 t_2 \right] + \right. \\
 & + \Theta_s \left[ t_5 + 2(\bar{U}_1 \sin \psi - \bar{V}_1 \cos \psi) t_4 + (\bar{U}_1 \sin \psi - \bar{V}_1 \cos \psi)^2 t_3 \right] + \\
 & + Kt_4 \lambda_{i0} \cos \psi - [K\lambda_{i0} (\bar{V}_1 \cos \psi - \bar{U}_1 \sin \psi) \cos \psi + (\bar{W}_1 - \lambda_{i0})] t_3 + \\
 & \left. + (\bar{W}_1 - \lambda_{i0}) (\bar{V}_1 \cos \psi - \bar{U}_1 \sin \psi) \cdot t_2 \right\} + \xi \bar{q} \Big\rangle
 \end{aligned} \tag{9.99}$$

Rozwiązania równania (9.99) poszukujemy w postaci

$$\beta = a_o - a_1 \cos \psi - b_1 \sin \psi \tag{9.100}$$

Po wstawieniu powyższej równości do (9.99), wyrażeniu iloczynów funkcji trygonometrycznych w postaci:



$$\left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \psi = (1 + \cos 2\psi) / 2 \\ \sin^2 \psi = (1 - \cos 2\psi) / 2 \\ \cos \psi \sin \psi = \sin 2\psi / 2 \\ \cos 2\psi \cos \psi = (\cos \psi + \cos 3\psi) / 2 \\ \cos 2\psi \sin \psi = (\sin 3\psi - \sin \psi) / 2 \\ \cos 2\psi \cos \psi = (\cos \psi + \cos 3\psi) / 2 \\ \cos 2\psi \sin \psi = (\sin 3\psi - \sin \psi) / 2 \end{array} \right. \quad (9.101)$$

i odrzuceniu wyrazów zawierających funkcję trygonometryczną wielokrotności azymutu  $\psi$  i przyrównaniu do zera oddzielnie wyrazów wolnych oraz wyrazów zawierających czynniki:  $\cos \psi$  i  $\sin \psi$  otrzymamy:

$$a_o = \frac{\gamma}{4(1+\varepsilon)} \left\{ \Theta_0 [2t_4 + t_2 (\bar{U}_1^2 + \bar{V}_1^2)] - \Theta_s [2t_5 + t_3 (\bar{U}_1^2 + \bar{V}_1^2)] + t_3 [K\lambda_{i0} \bar{V}_1 + 2(\bar{W}_1 - \lambda_{i0})] \right\} - \frac{\xi \bar{g}}{1+\varepsilon} \quad (9.102)$$

$$\left[ t_2 + \frac{t_2}{4} (\bar{V}_1^2 - \bar{U}_1^2) \right] a_1 - \left( \frac{t_2}{2} \bar{U}_1 \cdot \bar{V}_1 + \frac{2}{\gamma} \varepsilon \right) b_1 = -2 \cdot t_4 \Theta_s \bar{U}_1 + t_3 (2\Theta_0 \bar{U}_1 - a_o \bar{V}_1) + t_2 (\bar{W}_1 - \lambda_{i0}) \bar{U}_1 \quad (9.103)$$

$$\left( \frac{2}{\gamma} \varepsilon - \frac{t_2}{2} \bar{U}_1 \bar{V}_1 \right) a_1 + \left[ t_4 + \frac{t_2}{2} (\bar{U}_1^2 - \bar{V}_1^2) \right] b_1 = t_4 (K\lambda_{i0} - 2\Theta_s \bar{V}_1) + t_3 (2\Theta_0 \bar{V}_1 + a_o \bar{U}_1) + t_2 (\bar{W}_1 - \lambda_{i0}) \bar{V}_1 \quad (9.104)$$

Dwa ostatnie równania niekiedy wygodniej jest przedstawić w postaci:

$$a_1 = \frac{-2t_4 \Theta_s \bar{U}_1 + t_3 (2\Theta_0 \bar{U}_1 - a_o \bar{V}_1 + t_2 (\bar{W}_1 - \lambda_{i0}) \bar{U}_1)}{t_4 + t_2 (\bar{V}_1^2 - \bar{U}_1^2) / 4} + \frac{b_1}{t_4 + t_2 (\bar{V}_1^2 - \bar{U}_1^2) / 4} \left( \frac{t_2 \bar{U}_1 \bar{V}_1}{2} + \frac{2\varepsilon}{\gamma} \right) \quad (9.105)$$

$$b_1 = \frac{t_4 (K\lambda_{i0} - 2\Theta_s \bar{V}_1) + t_3 (a_o \bar{U}_1 + 2\Theta_0 \bar{V}_1) + t_2 (\bar{W}_1 - \lambda_{i0}) \bar{V}_1}{t_4 + t_2 (\bar{U}_1^2 - \bar{V}_1^2) / 4} + \frac{a_1}{t_4 + t_2 (\bar{U}_1^2 - \bar{V}_1^2) / 4} \left( \frac{t_2 \bar{U}_1 \bar{V}_1}{2} - \frac{2\varepsilon}{\gamma} \right) \quad (9.106)$$

Równania (9.102)÷(9.104) lub (9.102), (9.105) i (9.106) tworzą układy trzech algebraicznych równań liniowych, z których można wyznaczyć współczynniki równania wahań łopaty wirnika nośnego w ustalonym locie śmigłowca.

Zauważmy, że w wyrażeniu (9.100) występują współczynniki  $a_1$  i  $b_1$ , które określają kąt wahań łopaty  $\beta$  względem płaszczyzny bez przekręceń (rys. 9.1a i b), a nie względem płaszczyzny konstrukcyjnej (prostopadłej do osi wału wirnika, wyznaczonej przez osie  $x_w$ ,  $y_w$ ). Dzięki temu w wyrażeniach (9.102÷9.106) można traktować kąt  $Q_0$  jako niezależny od azymutu (płaszczyzna bez przekręceń bywa też nazywana płaszczyzną stałych kątów nastawienia). Obie płaszczyzny: konstrukcyjna i bez przekręceń, są do siebie nachylone pod niewielkimi kątami  $B_1$  i  $A_1$  (rys. 9.1 a i b), w idealnym zawisie równymi zeru i dlatego praktyczną konsekwencją opisywanej zmiany płaszczyzn odniesienia jest zastąpienie w wyrażeniach (9.102)÷(9.106) składowej bezwymiarowej prędkości  $\bar{W}_1 - \lambda_{t0}$  prostopadłej do płaszczyzny konstrukcyjnej, składową:

$$\lambda = -(\bar{U}_1 + \bar{u})B_1 + (\bar{V}_1 + \bar{v})A_1 + (\bar{W}_1 + \bar{w}) - \lambda_{t0} \quad (9.107)$$

prostopadłą do płaszczyzny bez przekręceń, zwaną współczynnikiem przepływu wirnika nośnego.

## 9.6. Współczynniki aerodynamiczne wirnika nośnego śmigłowca

Uwzględniając (9.88) oraz obliczając elementarną siłę aerodynamiczną wirnika nośnego działającą w kierunku osi  $y_2$  (rys. 9.6):

$$dY_2 = dP_Z \sin \phi - dP_X \cos \phi \approx dP_Z \phi - dP_X \quad (9.108)$$

elementarny ciąg:

$$dT = -dZ_w \quad (9.109)$$

elementarna siła wzdłużna:

$$dH = -dX_w \quad (9.110)$$

elementarna siła boczna:

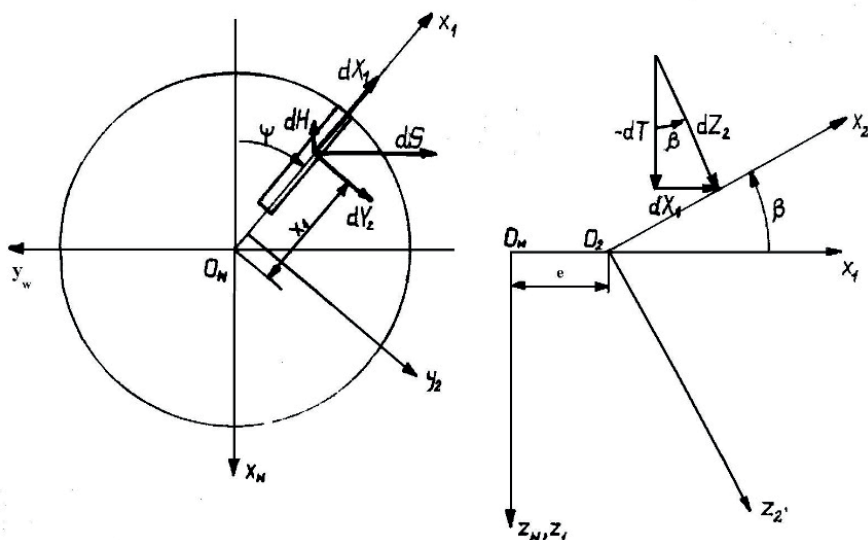
$$dS = -dY_w \quad (9.111)$$

oraz elementarny moment oporowy  $dM_{op}$  wirnika nośnego można przedstawić w postaci (rys. 9.6):

$$\begin{aligned}
dT &= -dZ_2 \cos \beta \\
dH &= dX_1 \cos \psi - dY_2 \sin \psi \\
dS &= dY_2 \cos \psi + dX_1 \sin \psi \\
dM_{op} &= -dY_2 x_1 \approx (dP_X - dP_Z \phi) x_1
\end{aligned} \tag{9.112}$$

gdzie:

$$dX_1 = dZ_2 \sin \beta \tag{9.113}$$



**Rys. 9.6.** Siły na łopacie wirnika nośnego

Dla małych kątów  $\beta$  wyrażenia (9.112) przybierają postać:

$$\begin{aligned}
dT &= dP_Z \\
dH &= (dP_X - dP_Z \phi) \sin \psi - dP_Z \beta \cos \psi \\
dS &= (dP_Z \phi - dP_X) \cos \psi - dP_Z \beta \sin \psi
\end{aligned} \tag{9.114}$$

a uwzględniając (9.81), (9.84), (9.85) i (9.86) elementarne siły i moment oporowy wirnika można przedstawić w postaci:

$$dT = \frac{1}{2} \rho c a \left\{ \left[ \Theta_0 - \bar{\Theta}_s(x_2) \right] U_T^2 + U_p U_T \right\} dx_2 \tag{9.115}$$

$$dH = \frac{1}{2} \rho c \left[ \left( C_X U_T^2 - a \left\{ \left[ \Theta_0 - \bar{\Theta}_s(x_2) \right] U_P U_T + U_P^2 \right\} \right) \sin \psi - \right. \\ \left. - a \left\{ \left[ \Theta_0 - \bar{\Theta}_s(x_2) \right] U_T^2 + U_P \cdot U_T \right\} \beta \cos \psi \right] dx_2 \quad (9.116)$$

$$dS = \frac{1}{2} \rho c \left[ \left( a \left\{ \left[ \Theta_0 - \bar{\Theta}_s(x_2) \right] U_P U_T + U_P^2 \right\} - C_X U_T^2 \right) \cdot \cos \psi - \right. \\ \left. - a \left\{ \left[ \Theta_0 - \bar{\Theta}_s(x_2) \right] U_T^2 + U_P U_T \right\} \beta \sin \psi \right] dx_2 \quad (9.117)$$

$$dM_{op} = \frac{1}{2} \rho c \left[ C_X U_T^2 - a \left\{ \left[ \Theta_0 - \bar{\Theta}_s(x_2) \right] U_P U_T + U_P^2 \right\} \right] x_1 dx_2 \quad (9.118)$$

Uwzględniając związki (9.92), (9.93), (9.94) i (9.100), całkując wyrażenie (9.115) w granicach od  $\bar{e}_a$  do  $B - \bar{e}$ , przy założeniu stałości  $a$  wzdłuż długości łopaty i liniowej jej zbieżności (9.97), zastosowaniu przekształceń trygonometrycznych (9.101), i oznaczeń (9.97) oraz pominięciu wyrażen zawierających funkcje trygonometryczne wielokrotności azymutu, zależność ciągu  $T$  wirnika nośnego w funkcji azymutu  $\psi$  przybiera następującą postać:

$$T(\psi) = \frac{1}{2} \rho a \Omega^2 R^3 c_0 \left\{ \left( \Theta_0 \left\{ (1 + 2\bar{r}) \cdot t_3 + 2 \left[ \bar{U}_1 (1 + \bar{r}) + \bar{u} \right] t_2 \sin \psi - \right. \right. \right. \\ \left. - 2 \left[ \bar{V}_1 (1 + \bar{r}) + \bar{v} \right] t_2 \cdot \cos \psi + \left[ \bar{U}_1 (U_1 / 2 + \bar{u}) + \bar{V}_1 (\bar{V}_1 / 2 + \bar{v}) \right] t_1 \right\} + \\ \left. - \Theta_s \left\{ (1 + 2\bar{r}) t_4 + 2 \left[ \bar{U}_1 (1 + \bar{r}) + \bar{u} \right] t_3 \sin \psi - 2 \left[ \bar{V}_1 (1 + \bar{r}) + \bar{v} \right] t_3 \cos \psi + \right. \right. \\ \left. + \left[ \bar{U}_1 (\bar{U}_1 / 2 + \bar{u}) + \bar{V}_1 (\bar{V}_1 / 2 + \bar{v}) \right] t_2 \right\} + \\ \left. + \left[ K \lambda_{i0} (\bar{V}_1 + \bar{v}) / 2 + \bar{w} - \bar{U}_1 \bar{p} / 2 - \bar{V}_1 \bar{q} / 2 + \lambda (1 + \bar{r}) \right] t_2 + \right. \\ \left. + \cos \psi \left\{ \left[ b_1 + \bar{q} - K \lambda_{i0} (1 + \bar{r}) \right] t_3 - \bar{U}_1 a_o t_2 + \right. \right. \\ \left. - \left[ \bar{U}_1 \bar{V}_1 a_1 / 2 + (\bar{V}_1^2 - \bar{U}_1^2) b_1 / 2 + \bar{V}_1 \bar{w} + \lambda (\bar{V}_1 + \bar{v}) \right] t_1 \right\} + \\ \left. + \sin \psi \left\{ - (a_1 + \bar{p}) t_3 - \bar{V}_1 a_o t_2 + \frac{[(\bar{U}_1^2 - \bar{V}_1^2) a_1]}{4} + \frac{\bar{U}_1 \bar{V}_1 b_1}{2} + \bar{U}_1 \bar{w} + \lambda (\bar{U}_1 + \bar{u}) \right\} t_1 \right\} \quad (9.119)$$

Całkując wyrażenie (9.119) w granicach  $0 \div 2\pi$ , mnożąc przez liczbę  $n$  łopat wirnika i dzieląc przez  $2\pi \rho A_{wv} \sigma \Omega^2 R^2$ , otrzymamy średnią wartość współczynnika  $t_c$  ciągu nośnego:

$$\begin{aligned}
t_c &= \int_0^{2\pi} \int_{\bar{e}_a}^{B-\bar{e}} dT dx_2 d\psi = \frac{n}{2\pi\rho A_{WN} \sigma \Omega^2 R^2} \int_0^{2\pi} T(\psi) d\psi = \\
&= \frac{na}{2} \left\{ \Theta_0 \left[ t_3 + \frac{(\bar{U}_1^2 + \bar{V}_1^2) t_1}{2} \right] - \Theta_s \left[ t_4 \frac{(\bar{U}_1^2 + \bar{V}_1^2) t_2}{2} \right] + \left[ \lambda + \frac{K \lambda_{i0} \bar{V}_1}{2} \right] t_2 + \bar{u} (\Theta_0 t_1 - \Theta_s t_2) \bar{U}_1 + \right. \\
&\quad \left. + \bar{v} \left[ (\Theta_0 t_1 - \Theta_s t_2) \bar{V}_1 + \frac{K \lambda_{i0} t_2}{2} \right] + \bar{w} t_2 - \frac{\bar{p} \bar{U}_1 t_2}{2} - \bar{q} \frac{\bar{V}_1 t_2}{2} + \bar{r} [2(\Theta_0 t_3 - \Theta_s t_1) + \lambda t_2] \right\}
\end{aligned} \tag{9.120}$$

W celu obliczenia średniej wartości współczynnika  $h_c$  siły wzdłużnej wirnika nośnego, najpierw wyznaczono występującą w wyrażeniu (9.116) wielkość  $U_p^2$ .

Podnosząc do kwadratu (9.77) i uwzględniając (9.100) oraz linearyzując względem kąta  $\beta$  i zaburzeń lotu ustalonego, otrzymano:

$$\begin{aligned}
U_p^2 &= \Omega^2 R^2 \lambda \left\{ \lambda + 2\bar{w} + 2 \cos \psi \left[ -\bar{U}_1 a_0 + (b_1 - K \lambda_{i0} + \bar{q}) \bar{x}_2 \right] + \right. \\
&\quad \left. + 2 \cos^2 \psi \bar{U}_1 a_1 - 2 \left[ \bar{V}_1 a_0 + (a_1 + \bar{p}) \bar{x}_2 \right] \sin \psi + (\bar{U}_1 b_1 + \bar{V}_1 a_1) \sin 2\psi \right\}
\end{aligned} \tag{9.121}$$

Należy zwrócić uwagę, że w wyrażeniach (9.115)÷(9.117) obok członów pocho-

dzących od siły nośnej, zawierających pochodną  $a = \frac{\partial C_z}{\partial \alpha}$ , występuje współczynnik oporu  $C_x$ , który zależy od współrzędnej  $\bar{x}_2$  i występuje na całej długości łopaty, a więc granice całkowania wzdłuż osi  $Ox_2$  członu zawierającego  $C_x$  powinny być od  $-\bar{e}$  do  $1-\bar{e}$ .

W pierwszej części tej książki przedstawione zostały wzory na siły aerodynamiczne i moment oporowy wirnika nośnego odliczone w warunkach ustalonego lotu prostoliniowego. Przy wyprowadzeniu tych wzorów założono, że współczynnik oporu  $C_x$  ma wartość stałą wzdłuż długości łopaty, przy czym przyjęto, że wartość tego współczynnika odpowiada współczynnikowi oporu łopaty na promieniu  $r = 0,75 \cdot R$ . Założono także, iż wartość współczynnika strat końcowych  $B = 1$ , a wielkości  $\bar{e}$  i  $\bar{e}_a$  są równe zeru. W konsekwencji siły i momenty działające na łopatę całkowane były w granicach od 0 do 1.

W tej części książki przyjęto, że  $B$  jest mniejsze od jedności, a wielkości  $\bar{e}$  i  $\bar{e}_a$  są większe od zera. W konsekwencji wszystkie całki są obliczane w granicach od  $\bar{e}_a$  do  $B-\bar{e}_a$ . Stosując założenia takie, jak przy obliczeniu ciągu  $T(\psi)$  (9.119), otrzymano:

$$\begin{aligned}
 h_c &= \frac{n}{2\pi\rho A_{wN}\sigma\Omega^2 R^2} \cdot \int_0^{2\pi} \int_{\bar{e}_a}^{B-\bar{e}} dH d\psi dx_2 = \\
 &= \frac{na}{2} \left\{ C_X \frac{\bar{U}_1 t_2}{a} + a_1 (\Theta_0 t_3 - \Theta_s t_4) + \frac{3}{2} \bar{V}_1 a_0 (\Theta_0 t_2 - \Theta_s t_3) + \right. \\
 &\quad - \frac{\bar{U}_1 \lambda}{2} (\Theta_0 t_1 - \Theta_s t_2) + \frac{3}{2} (\bar{V}_1 \lambda a_0 t_1 + \lambda a_1 t_2) + \bar{u} \left( \frac{C_X t_2}{a} - \frac{\lambda \Theta_0 t_2}{2} \right) - \frac{\bar{w} \bar{U}_1}{2} (\Theta_0 t_1 - \Theta_s t_2) + \\
 &\quad \left. + \bar{p} [\lambda t_2 + (\Theta_0 t_3 - \Theta_s t_4) / 2] + \bar{r} C_X \bar{U}_1 t_2 a \right\} \quad (9.122)
 \end{aligned}$$

Uwzględniając powyższe założenia i postępując analogicznie jak przy wyznaczaniu współczynnika  $h_c$  (9.122), otrzymano następujące wyrażenie na średnią wartość współczynnika  $s_c$  siły bocznej wirnika nośnego:

$$\begin{aligned}
 s_c &= \frac{na}{2} \left\{ \frac{\bar{V}_1 t_2}{a} - \frac{1}{2} b_1 (\Theta_0 t_3 - \Theta_s t_4) - \frac{3}{2} \bar{U}_1 a_0 (\Theta_0 t_2 - \Theta_s t_3) + \right. \\
 &\quad - \frac{\bar{V}_1 \lambda}{2} (\Theta_0 t_1 - \Theta_s t_2) - \frac{3}{2} (\bar{U}_1 \lambda a_0 t_1 / 2 + \lambda b_1 t_2) + \\
 &\quad - \frac{K \lambda_{i0}}{2} (\Theta_0 t_3 - \Theta_s t_4) - K \lambda_{i0} \lambda t_2 + \bar{v} \left[ \frac{C_X t_2}{a} - \lambda (\Theta_0 t_1 - \Theta_s t_2) \right] + \\
 &\quad \left. - \frac{\bar{w} \bar{V}_1}{2} (\Theta_0 t_1 - \Theta_s t_2) + \bar{q} \left[ \lambda t_2 + \frac{(\Theta_0 t_3 - \Theta_s t_4)}{2} / 2 \right] + \frac{\bar{r} C_X \bar{V}_1 t_2}{a} \right\} \quad (9.123)
 \end{aligned}$$

W celu obliczenia średniej wartości współczynnika  $m_{op}$  momentu oporowego wirnika nośnego dodatkowo przyjęto, że  $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 + \bar{e} \approx \bar{x}_2$ . Mnożąc (9.118) przez liczbę  $n$  łopat wirnika nośnego i dzieląc przez  $2\pi\rho A_{wN}\sigma\Omega^2 R^3$ , całkując od  $\bar{e}_a$  do  $B-\bar{e}$  i od 0 do  $2\pi$  oraz stosując uproszczenia jak przy obliczeniu ciągu (9.122), otrzymany:

$$\begin{aligned}
m_{op} = & \frac{na}{2} \left\{ \frac{C_X t_4}{a} + \frac{C_X t_2}{2a} (\bar{U}_1^2 - \bar{V}_1^2) - \lambda^2 t_2 + \right. \\
& - (\Theta_0 t_3 - \Theta_s t_4) \left( \lambda + \frac{K \lambda_{i0} \bar{V}_1}{2} \right) \left. \right] - \lambda (\bar{U}_1 a_1 + \bar{V}_1 b_1) t_2 + \\
& - \bar{U}_1 K \lambda_{i0} t_3 + \frac{\bar{u} C_X \bar{U}_1 t_2}{a} + \bar{v} \left[ \frac{C_X \bar{V}_1 t_2}{a} - \frac{K \lambda_{i0}}{2} (\Theta_0 t_3 - \Theta_s t_4) \right] + \\
& - \bar{w} (2 \lambda t_2 + \Theta_0 t_3 - \Theta_s t_4) + \frac{\bar{p}}{2} [\bar{U}_1 (\Theta_0 t_3 - \Theta_s t_4)] + \\
& + \frac{\bar{q}}{2} [\bar{V}_1 (\Theta_0 t_3 - \Theta_s t_4)] + \bar{r} \left[ 2 \frac{C_X t_4}{a} - \lambda (\Theta_0 t_3 - \Theta_s t_4) \right] \left. \right\} \quad (9.124)
\end{aligned}$$

## 9.7. Pochodne aerodynamiczne wirnika nośnego, śmigła ogonowego i kadłuba

Zgodnie z wyrażeniem (9.100) kąt  $\beta$  wahań w przegubie poziomym łopaty w locie ustalonym ma postać:

$$\beta = a_o - a_1 \cos \psi - b_1 \sin \psi$$

Po zaburzeniu prędkości lotu śmigłowca, ulegną zmianie także współczynniki wahań:  $a_o$ ,  $a_1$  i  $b_1$ , a ograniczając się do przyrostów liniowych wyrażenia (9.99) przybierze ono postać:

$$\begin{aligned}
\beta = & a_o + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{u}} \bar{u} + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{v}} \bar{v} + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{w}} \bar{w} + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{p}} \bar{p} + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{q}} \bar{q} + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{r}} \bar{r} + \\
& - \cos \psi \left( a_1 + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{u}} \bar{u} + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{v}} \bar{v} + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{w}} \bar{w} + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{p}} \bar{p} + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{q}} \bar{q} + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{r}} \bar{r} \right) + \\
& - \sin \psi \left( b_1 + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{u}} \bar{u} + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{v}} \bar{v} + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{w}} \bar{w} + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{p}} \bar{p} + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{q}} \bar{q} + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{r}} \bar{r} \right) \quad (9.125)
\end{aligned}$$

Wstawiając powyższe wyrażenie oraz jego pierwszą i drugą pochodną względem azymutu  $\psi$  do równania (9.99), pomijając zazwyczaj mało znaczące człony można przez czynniki  $\varepsilon$  i  $\xi$  oraz człony zawierające funkcje wielokrotności azymutu  $\psi$ , stosując związki (9.101) i przyrównując do siebie człony niezależne od  $\psi$  oraz zawierające czynniki:  $\cos \psi$  i  $\sin \psi$ , otrzymamy trzy równania o postaci:

$$a_o + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{u}} \bar{u} + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{v}} \bar{v} + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{w}} \bar{w} + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{p}} \bar{p} + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{q}} \bar{q} + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{r}} \bar{r} +$$

$$+ (\text{człony w wyrażeniu (5.99) nie zawierające azymutu}) = 0 \quad (9.126)$$

$$\frac{\gamma}{2} t_3 \left( a_o + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{u}} \bar{u} + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{v}} \bar{v} + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{w}} \bar{w} + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{p}} \bar{p} + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{r}} \bar{r} \right) +$$

$$+ \frac{\gamma}{4} t_2 \bar{U}_1 V_1 \left( a_1 + \frac{\partial a_1}{\partial \bar{u}} \bar{u} + \frac{\partial a_1}{\partial \bar{v}} \bar{v} + \frac{\partial a_1}{\partial \bar{w}} \bar{w} + \frac{\partial a_1}{\partial \bar{p}} \bar{p} + \frac{\partial a_1}{\partial \bar{r}} \bar{r} \right) +$$

$$- \frac{\gamma}{8} \left[ 4t_4 + t_2 (\bar{U}_1^2 - \bar{V}_1^2) \right] \left( b_1 + \frac{\partial b_1}{\partial \bar{u}} \bar{u} + \frac{\partial b_1}{\partial \bar{v}} \bar{v} + \frac{\partial b_1}{\partial \bar{w}} \bar{w} + \frac{\partial b_1}{\partial \bar{p}} \bar{p} + \frac{\partial b_1}{\partial \bar{r}} \bar{r} \right) +$$

$$+ (\text{człony wyrażenia (5.99) zawierające cosinus azymutu}) = 0 \quad (9.127)$$

$$\frac{\gamma}{2} t_3 \bar{V}_1 \left( a_o + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{u}} \bar{u} + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{v}} \bar{v} + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{w}} \bar{w} + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{p}} \bar{p} + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{q}} \bar{q} + \frac{\partial a_o}{\partial \bar{r}} \bar{r} \right) +$$

$$+ \frac{\gamma}{8} \left[ 4t_4 + t_2 (\bar{V}_1^2 - \bar{U}_1^2) \right] \left( a_1 + \frac{\partial a_1}{\partial \bar{u}} \bar{u} + \frac{\partial a_1}{\partial \bar{v}} \bar{v} + \frac{\partial a_1}{\partial \bar{w}} \bar{w} + \frac{\partial a_1}{\partial \bar{p}} \bar{p} + \frac{\partial a_1}{\partial \bar{q}} \bar{q} + \frac{\partial a_1}{\partial \bar{r}} \bar{r} \right) +$$

$$- \frac{\gamma}{4} t_2 \bar{U}_1 \bar{V}_1 \left( b_1 + \frac{\partial b_1}{\partial \bar{u}} \bar{u} + \frac{\partial b_1}{\partial \bar{v}} \bar{v} + \frac{\partial b_1}{\partial \bar{w}} \bar{w} + \frac{\partial b_1}{\partial \bar{p}} \bar{p} + \frac{\partial b_1}{\partial \bar{q}} \bar{q} + \frac{\partial b_1}{\partial \bar{r}} \bar{r} \right) +$$

$$+ (\text{człony wyrażenia (5.99) zawierające sinus azymutu}) = 0. \quad (9.128)$$

Przyrównując do zera wszystkie przyrosty prędkości poza jednym, z trzech równań (9.126)÷(9.128) można wyznaczyć pochodne trzech współczynników wahań względem tego przyrostu.

W charakterze przykładu wyznaczono pochodne współczynników wahań  $a_o$ ,  $a_1$  i  $b_1$  względem przyrostu prędkości  $\bar{u}$ .

W wyrażeniu (9.99) czynniki mnożone przez  $\bar{u}$  i nie zawierające wyższych harmonicznych azymutu  $\psi$  mają postać:

$$\frac{\gamma}{2} \left[ \bar{U}_1 (\Theta_0 t_3 - \Theta_s t_2) - \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}} t_3 \right] + \frac{\gamma}{2} K \frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \bar{u}} t_4 \cos \psi - \left[ \frac{\gamma}{2} \lambda t_2 + \gamma (\Theta_0 t_3 - \Theta_s t_4) \right] \sin \psi \quad (9.129)$$

Zgodnie z rozważaniami zawartymi w części pierwszej monografii w powyższym wyrażeniu wielkość  $\lambda$  oznacza występujący w (9.99) dwumian  $\bar{W}_1 - \lambda_{i0}$ .

Zarówno  $\lambda$ , jak i  $\lambda_{i0}$  są funkcjami zaburzeń  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  postępowego ruchu śmigłowca i mogą być przedstawione w postaci szeregów:



$$\begin{aligned}\lambda_{zab} &= \lambda + \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}} \bar{u} + \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}} \bar{v} + \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{w}} \bar{w} \\ (\lambda_{i0})_{zab} &= \lambda_{i0} + \frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \bar{u}} \bar{u} + \frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \bar{v}} \bar{v} + \frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \bar{w}} \bar{w}\end{aligned}\quad (9.130)$$

Uwzględniając ten fakt w (9.99), pojawiają się wyrazy zawierające pochodne  $\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}}$  i  $\frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \bar{u}}$  w (9.129).

Wstawiamy pierwszy składnik w nawiasie kwadratowym wyrażenia (9.129) w równanie (9.128), w którym poza członem w nawiasie pozostanie tylko  $\frac{\partial a_0}{\partial \bar{u}}$ , jako jedyny czynnik mnożony przez  $\bar{u}$ . Podobnie wstawiając następnie tę wielkość w wyrażenie (9.127), uwzględniając wyraz zawierający  $\cos \psi$  w (9.129) i pozostawiając jedynie czynniki mnożone przez  $\bar{u}$  oraz postępując analogicznie z równością (9.128), w której należy uwzględnić składnik wyrażenia (9.129) mnożony przez  $\sin \psi$ , otrzymamy pochodne współczynników wahań względem prędkości  $\bar{u}$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_0}{\partial \bar{u}} &= \frac{\gamma}{2} \left[ (\Theta_0 t_2 - \Theta_s t_3) \bar{U}_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}} \right] \\ \frac{\partial a_1}{\partial \bar{u}} &= \frac{2(\Theta_0 t_3 - \Theta_s t_4) + t_2 \lambda}{t_4 - \frac{t_2(\bar{U}_1^2 - \bar{V}_1^2)}{4}} + \frac{\bar{V}_1}{2} \cdot \frac{t_2 \bar{U}_1 \frac{\partial b_1}{\partial \bar{u}} - \gamma t_3 \left[ (\Theta_0 t_2 - \Theta_s t_3) \bar{U}_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}} \right]}{t_4 - \frac{t_2(\bar{U}_1^2 - \bar{V}_1^2)}{4}} \\ \frac{\partial b_1}{\partial \bar{u}} &= \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{t_3(\Theta_0 t_2 - \Theta_s t_3) \bar{U}_1 + t_3 \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}} + K t_4 \frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \bar{u}}}{t_4 + \frac{t_2(\bar{U}_1^2 - \bar{V}_1^2)}{4}} + \frac{\bar{U}_1 \bar{V}_1}{2} \cdot \frac{t_2 \frac{\partial a_1}{\partial \bar{u}}}{t_4 + \frac{t_2(\bar{U}_1^2 - \bar{V}_1^2)}{4}}\end{aligned}\quad (9.131)$$

W ustalonym locie do przodu prędkość ślizgu  $\bar{V}_1$  jest zwykle mała i wówczas drugie człony po prawej stronie znaku równości mogą być pominięte.

Analogicznie obliczone pochodne współczynników wahań:  $a_0$ ,  $a_1$  i  $b_1$  względem pozostałych przyrostów prędkości:  $\bar{v}$  i  $\bar{w}$  oraz  $\bar{p}$ ,  $\bar{q}$  i  $\bar{r}$ , przy pominięciu członów zawierających prędkość ślizgu  $\bar{V}_1$ , mają postać:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial a_o}{\partial \bar{v}} &= \frac{\gamma}{2} t_3 \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}} + K \lambda_{i0} \right) \\
 \frac{\partial a_1}{\partial \bar{v}} &= 0 \\
 \frac{\partial b_1}{\partial \bar{v}} &= \frac{t_3^2 \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}} + K \cdot \lambda_{io} \right) \frac{\bar{U}_1}{2} + 2(\Theta_0 t_3 - \Theta_s t_4) + K t_4 \frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \bar{v}} + t_2 \lambda}{t_4 + \frac{t_2 \bar{U}_1^2}{4}}
 \end{aligned} \tag{9.132}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial a_0}{\partial \bar{w}} &= \frac{\gamma}{2} t_3 \left( 1 + \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{w}} \right) \\
 \frac{\partial a_1}{\partial \bar{w}} &= \frac{\bar{U}_1 t_2}{t_4 - \frac{t_2 \bar{U}_1^2}{4}} \\
 \frac{\partial b_1}{\partial \bar{w}} &= \frac{\gamma t_3^2 \left( 1 + \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{w}} \right) \frac{\bar{U}_1}{2} + t_4 \frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \bar{w}}}{t_4 + \frac{t_2 \bar{U}_1^2}{4}}
 \end{aligned} \tag{9.133}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial a_0}{\partial \bar{p}} &= -\frac{\gamma}{4} \bar{U}_1 t_3 \\
 \frac{\partial a_1}{\partial \bar{p}} &= -\frac{t_4}{t_4 - t_2 \bar{U}_1^2} \\
 \frac{\partial b_1}{\partial \bar{p}} &= \frac{\frac{16}{\gamma} - \gamma t_3^2 \bar{U}_1^2}{4 t_4 + t_2 \cdot \bar{U}_1^2}
 \end{aligned} \tag{9.134}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial a_o}{\partial \bar{q}} &= 0 \\
 \frac{\partial a_1}{\partial \bar{q}} &= \frac{16}{\gamma (4 t_4 + t_2 \bar{U}_1^2)} \\
 \frac{\partial b_1}{\partial \bar{q}} &= -\frac{t_4}{t_4 + \frac{t_2 \bar{U}_1^2}{2}}
 \end{aligned} \tag{9.135}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a_0}{\partial \bar{r}} &= \frac{\gamma}{2} [2(\Theta_0 t_4 - \Theta_s t_5) + \lambda t_3] \\
\frac{\partial a_1}{\partial \bar{r}} &= \frac{2(\Theta_0 t_3 - \Theta_s t_4) \bar{U}_1}{t_4 - \frac{t_2 \bar{U}_1^2}{4}} \\
\frac{\partial b_1}{\partial \bar{r}} &= \frac{\gamma t_3 \frac{[(\Theta_0 t_4 - \Theta_s t_5) + \lambda t_3]}{2} + K \lambda_{i0} t_4}{t_4 + \frac{t_2 \bar{U}_1^2}{4}}
\end{aligned} \tag{9.136}$$

### 9.7.1. Pochodne współczynnika przepływu wirnika nośnego

Współczynnik przepływu  $\lambda$ , określający prędkość zaburzonego przepływu powietrza wzdłuż osi bez przekręceń wirnika nośnego, na podstawie rys. 9.1a i b, może być przedstawiony w następującej, zlinearyzowanej względem kątów  $A_1$  i  $B_1$  postaci (9.107).

Bezwymiarowa prędkość indukowana  $\lambda_i$  (9.78) w ogólnym przypadku jest funkcją współrzędnej  $\bar{x}_2$  i azymutu  $\gamma$ . Biorąc pod uwagę jej wartość  $\lambda_{i0}$  (9.79) średnią dla całego wirnika, otrzymamy:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}} = -B_1 - \frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \bar{u}} \tag{9.137}$$

oraz

$$\frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \bar{u}} = \frac{\sigma}{2\bar{V}_0} \frac{\partial t_c}{\partial \bar{u}} - \frac{\sigma t_c}{2\bar{V}_0^3} \left[ (\bar{U}_1 + \bar{u}) - (\bar{W}_1 + \bar{w} - \lambda_{i0}) \frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \bar{u}} \right] \tag{9.138}$$

gdzie  $\bar{V}_0$  dana jest zależnością (9.87). Pomijając wartość  $\bar{u}$  jako małą niższego rzędu w stosunku do  $\bar{U}_1$  oraz ograniczając rozważania do lotu poziomego ( $\bar{W}_1 = \bar{w} \approx 0$ ) wyrażenie (9.138) można przekształcić do postaci:

$$\frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \bar{u}} = \frac{\lambda_{i0}}{t_c} \frac{\partial t_c}{\partial \bar{u}} - 4 \frac{\lambda_{i0}^3}{\sigma^2 t_c^2} \bar{U}_1 - \frac{\lambda_{i0}^4}{\sigma^2 t_c^2} \frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \bar{u}} \tag{9.139}$$

Wprowadzając wielkość średniej bezwymiarowej prędkości indukowanej w zawisie, która na podstawie (9.79) ma wartość:

$$(\lambda_{i0})_{zaw} = \sqrt{\frac{t_c \sigma}{2}} \quad (9.140)$$

oraz stosując oznaczenia:

$$\hat{U}_1 = \frac{\bar{U}_1}{(\lambda_{i0})_{zaw}} \quad \text{oraz} \quad \hat{\lambda}_i = \frac{\lambda_{i0}}{(\lambda_{i0})_{zaw}} \quad (9.141)$$

wyrażenie (9.139) można napisać w postaci:

$$\frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \bar{u}} = \frac{\lambda_{i0}}{t_c} \frac{\partial t_c}{\partial \bar{u}} - \hat{U}_1 \lambda_i^3 - \lambda_i^4 \frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \bar{u}} \quad (9.142)$$

Pochodną  $\frac{\partial t_c}{\partial \bar{u}}$  można obliczyć z wyrażenia (9.120):

$$\frac{\partial t_c}{\partial \bar{u}} = \frac{a}{2} \left[ (\Theta_0 t_1 - \Theta_s t_2) \bar{U}_1 - t_2 \frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \bar{u}} \right] \quad (9.143)$$

Wstawiając tę równość w wyrażenie (9.142), uwzględniając (9.137) i porządkując, otrzymamy:

$$\frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \bar{u}} = \frac{(\Theta_0 t_1 - \Theta_s t_2) \bar{U}_1 - \frac{2t_c}{a \lambda_{i0}} \hat{U}_1 \lambda_i^3 - B_1 t_2}{t_2 + \frac{2t_c}{a \lambda_{i0}} \cdot (1 + \hat{\lambda}_i^4)} \quad (9.144)$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$\chi = \frac{2t_c}{a \lambda_{i0}} \quad (9.145)$$

i wstawiając je w (9.143) otrzymamy ostatecznie:

$$\frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \bar{u}} = \frac{(\Theta_0 t_1 - \Theta_s t_2) \bar{U}_1 - B_1 t_2 - \chi \hat{U}_1 \hat{\lambda}_i^3}{t_2 + \chi (1 + \hat{\lambda}_i^4)} \quad (9.146)$$

Różniczkując (9.147) względem  $\bar{v}$  i wstawiając zamiast  $\lambda_i$  jej wartość średnią  $\lambda_{i0}$  (9.107), otrzymamy:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}} = A_1 - \frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \bar{v}} \quad (9.147)$$

oraz, analogicznie do (9.144):

$$\frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \bar{v}} = \frac{\sigma}{2\bar{V}_0} \frac{\partial t_c}{\partial \bar{v}} - \frac{\sigma t_c}{2\bar{V}_0^3} \left[ (\bar{V}_1 + \bar{v}) - (\bar{W}_1 + \bar{w} - \lambda_{i0}) \frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \bar{v}} \right] \quad (9.148)$$

a ograniczając rozważania do przypadku lotu poziomego ( $\bar{v}_1 = \bar{v} = \bar{W}_1 = \bar{w} \approx 0$ ) i uwzględniając (9.142), wyrażenie (9.148) można przekształcić do postaci:

$$\frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \bar{v}} = \frac{\lambda_{i0}}{t_c} \frac{\partial t_c}{\partial \bar{v}} - \hat{\lambda}_{i0} \frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \bar{v}} \quad (9.149)$$

Biorąc pod uwagę (9.120), mamy:

$$\frac{\partial t_c}{\partial \bar{v}} = \frac{a}{2} t_2 \left( K \lambda_{i0} / 2 - \frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \bar{v}} \right) \quad (9.150)$$

Wstawiając tę równość w (9.149) oraz uwzględniając (9.145) i (9.137) otrzymujemy:

$$\frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \bar{v}} = \frac{t_2 \left( \frac{K \lambda_{i0}}{2} + A_1 \right)}{t_2 + \chi (1 + \hat{\lambda}_i^4)} \quad (9.151)$$

Postępując analogicznie jak przy obliczaniu pochodnych  $\frac{\partial \lambda}{\partial u}$  i  $\frac{\partial \lambda}{\partial v}$ , na podstawie (9.107) mamy:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial w} = 1 - \frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \bar{w}} \quad (9.152)$$

a uwzględniając (9.79), otrzymamy:

$$\frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \bar{w}} = \frac{\sigma}{2\bar{V}_1} \frac{\partial t_c}{\partial \bar{w}} - \frac{\sigma t_c}{2\bar{V}_0^3} (\bar{W}_1 + \bar{w} - \lambda_{i0}) \left( 1 - \frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \bar{w}} \right) \quad (9.153)$$

W przypadku lotu poziomego ( $\bar{W}_1 = \bar{w} \approx 0$ ), uwzględniając (9.141), powyższe wyrażenie można przedstawić w postaci:

$$\frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \bar{w}} = \frac{\lambda_{i0}}{t_c} \cdot \frac{\partial t_c}{\partial \bar{w}} + \hat{\lambda}_{i0}^4 \left( 1 - \frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \bar{w}} \right) \quad (9.154)$$

Na podstawie (9.120) mamy:

$$\frac{\partial t_c}{\partial \bar{w}} = \frac{a}{2} t_2 \left( 1 - \frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \bar{w}} \right) \quad (9.155)$$

Wstawiając tę równość w wyrażenie (9.154) oraz uwzględniając (9.145) i (9.152) otrzymamy:

$$\frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \bar{w}} = \frac{t_2 + \chi \hat{\lambda}_{i0}^4}{t_2 + \chi (1 + \hat{\lambda}_{i0}^4)} \quad (9.156)$$

### 9.7.2. Pochodne współczynników aerodynamicznych wirnika nośnego

Wymienione w tytule pochodne będą obliczane w trzech etapach. Najpierw jako pochodne współczynników  $t_c$ ,  $h_c$  i  $s_c$  opisanych w podrozdziałach 9.2 i 9.3, następnie jako pochodne bezwymiarowych sił w związanym z wirnikiem nośnym układzie współrzędnych, opisanym w podrozdziale 9.2, i wreszcie jako pochodne bezwymiarowych sił i momentów aerodynamicznych w równaniach ruchu śmigłowca (7.38).

Współczynniki  $t_c$ ,  $h_c$  i  $s_c$  w ogólnym przypadku ruchu śmigłowca są funkcjami zaburzeń  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  prędkości liniowej i  $\bar{p}$ ,  $\bar{q}$ ,  $\bar{r}$  prędkości kątowej śmigłowca oraz współczynników  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $b_1$  wahań łopaty i prędkości indukowanej  $\lambda_{i0}$ , przy czym współczynniki wahań same są funkcjami zaburzeń obu prędkości (patrz rozdziały 9.2 i 9.3), a prędkość indukowana jest funkcją zaburzeń  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  (patrz podrozdziały 9.2 i 9.3). Pochodna względem  $\bar{u}$  współczynnika ciągu  $t_c$  ma zatem ogólną postać:

$$\frac{\partial t_c}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial t_c}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial t_c}{\partial a_0} \frac{\partial a_0}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial t_c}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial t_c}{\partial b_1} \frac{\partial b_1}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial t_c}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}}, \quad (9.157)$$

gdzie, na podstawie (9.120):

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_c}{\partial \bar{u}} &= \frac{a}{2} (\Theta_0 t_1 - \Theta_s t_2) \bar{U}_1 \\ \frac{\partial t_c}{\partial a_0} &= \frac{\partial t_c}{\partial a_1} = \frac{\partial t_c}{\partial b_1} = 0 \\ \frac{\partial t_c}{\partial \lambda} &= \frac{a}{2} t_2 \end{aligned} \quad (9.158)$$

a pochodna  $\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}}$  jest dana wyrażeniami (9.146) i (9.147).

Wyrażenia (9.158) różnią się od (9.143) o człon zawierający współczynnik przepływu  $\lambda$  uwzględniany oddzielnie w (9.157).

Analogicznie wyznacza się pochodne współczynnika ciągu  $t_c$  względem pozostałych zmiennych stanu:  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$ ,  $\bar{p}$ ,  $q$ ,  $\bar{r}$  oraz pochodne współczynników sił: wzdlużnej  $h_c$  (9.122) i bocznej  $s_c$  (9.123). Pochodne współczynników wahań,

które w wyrażeniu (9.157) nie musiały być obliczane ze względu na (9.158), w innych przypadkach wyznacza się metodą opisaną w punkcie 9.5.4, wyrażenia (9.102)÷(9.104).

Znając pochodne  $\frac{\partial t_c}{\partial u}, \dots, \frac{\partial s_c}{\partial r}$  i pochodne współczynników wahań, można obliczyć pochodne sił wirnika nośnego opisane w podrozdziałach 9.2 i 9.3. Te ostatnie są określone w układzie współrzędnych  $O_w x_w y_w z_w$  związanym z wirnikiem i aby mogły być wykorzystane w równaniach ruchu śmigłowca muszą być wyrażone w układzie  $Oxyz$  zdefiniowanym w punktach 9.5.1. oraz 9.5.3. Oś obu układów są do siebie równoległe, ale ich początki są odległe o wektor  $\mathbf{r}_c$  (9.60), a więc gdy środek masy śmigłowca porusza się z prędkością  $\mathbf{V}_c$  (9.59) to środek piasty wirnika nośnego porusza się z prędkością  $\mathbf{V}_w$  (9.58), (9.61). Pochodne sił aerodynamicznych względem liniowych prędkości śmigłowca w obu układach są takie same, natomiast pochodne względem prędkości kątowych w ogólnym przypadku są różne.

Jeżeli gwiazdką u góry oznaczymy pochodne w układzie współrzędnych  $Oxyz$  związanym ze śmigłowcem, to na podstawie (9.62) będzie np.:

$$\begin{cases} (X_p)^* = (X_p)_w + z_c (X_v)_w \\ (X_q)^* = (X_q)_w - z_c (X_u)_w \\ (X_r)^* = (X_r)_w \end{cases} \quad (9.159)$$

Analogicznie oblicza się pochodne pozostałych sił ( $Y_w$  i  $Z_w$ ). Odpowiednim zmianom ulegną też pochodne momentów ( $L_w$ ,  $M_w$  i  $N_w$ ) względem prędkości kątowej śmigłowca. W formie bezwymiarowej podlegające modyfikacji pochodne są dane trzema ostatnimi równaniami w układach (9.21), (9.37) i (9.40).

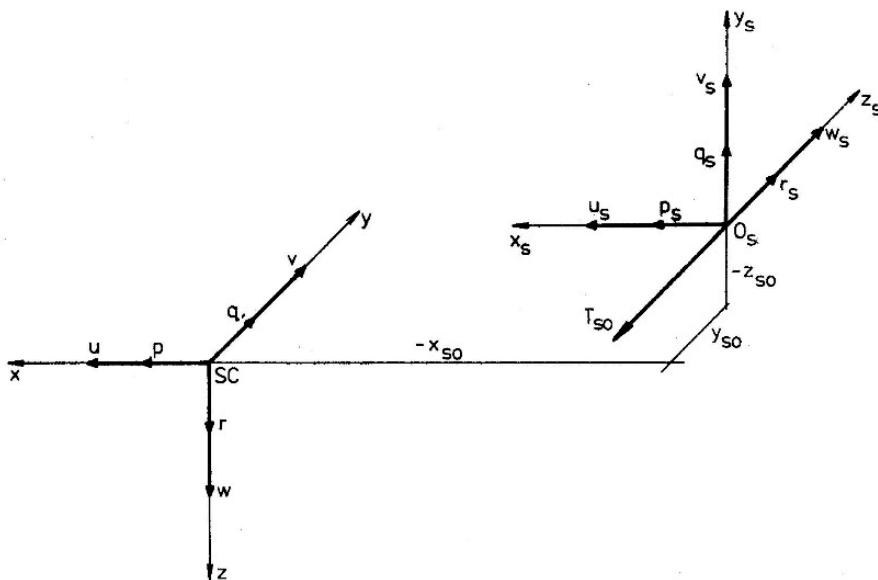
### 9.7.3. Pochodne współczynników aerodynamicznych śmigła ogonowego

Zgodnie z rozważaniami zawartymi w podrozdziale 9.4 wpływ śmigła ogonowego uwidacznia się głównie w postaci ciągu  $\mathbf{T}_{so}$  skierowanego wzdłuż osi  $Oy$  śmigłowca. Pomijając interferencję wirnika nośnego na opływ śmigła ogonowego, pochodną współczynnika  $t_{so}$  ciągu śmigła ogonowego można obliczać analogicznie jak pochodne współczynnika  $t_c$  ciągu wirnika nośnego, np. (9.157), stosując ewentualne uproszczenia wynikające z różnic konstrukcyjnych. W tym celu wprowadzimy związany ze śmigłem ogonowym układ współrzędnych  $O_s x_s y_s z_s$  o początku w środku piasty śmigła ogonowego i o osiach równoległych do osi układów  $Oxyz$ , lub  $O_w x_w y_w z_w$  (podrozdział 9.4), ale inaczej oznaczonych (rys. 8.1). Niech oś  $y_g$  jest

równoległa do osi  $z$ , ale przeciwnie skierowana, a oś  $z_g$  równoległa do osi  $y$  i skierowana zgodnie z nią. Między współrzędnymi obu układów istnieją relacje (rys. 9.7):

$$\begin{cases} x = x_s - x_{s0} \\ y = z_s + y_{s0} \\ z = -y_s - z_{s0} \end{cases} \quad (9.160)$$

gdzie:  $-x_{s0}$ ,  $y_{s0}$  i  $-z_{s0}$  są współrzędnymi środka  $O_s$  w układzie  $Oxyz$ .



**Rys. 9.7.** Układy współrzędnych śmigła ogonowego

Prędkości liniowe i kątowe w obu układach są związane następująco:

$$\begin{cases} u = u_s \\ v = w_s \\ w = -v_s \\ p = p_s \\ q = r_s \\ r = q_s \end{cases} \quad (9.161)$$

Jeżeli śmigłowiec porusza się z prędkością  $V_c$  (9.59) i obraca z prędkością kątową  $\omega$  (9.55), to środek  $O_s$  piasty śmigła ogonowego porusza się z prędkością:



$$\mathbf{V}_{so} = (U + u + qz_{so} - ry_{so})\mathbf{i} + (V + v - pz_{so} + rx_{so})\mathbf{j} + (W + w + py_{so} - qx_{so})\mathbf{k} \quad (9.162)$$

gdzie:  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  są wersorami osi układu współrzędnych  $Oxyz$ .

Oznaczając gwiazdką u góry pochodne w układzie  $Oxyz$  współczynnika  $t_{so}$  ciągu śmigła ogonowego i pomijając współrzędną  $y_{so}$  jako małą w porównaniu z pozostałymi, na podstawie (6.144) i (6.145) otrzymamy:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial t_{so}}{\partial u} \right)^* &= \frac{\partial t_{so}}{\partial \bar{u}_s} \\ \left( \frac{\partial t_{so}}{\partial v} \right)^* &= \frac{\partial t_{so}}{\partial \bar{v}_s} \\ \left( \frac{\partial t_{so}}{\partial w} \right)^* &= -\frac{\partial t_{so}}{\partial \bar{v}_s} \\ \left( \frac{\partial t_{so}}{\partial p} \right)^* &= \partial \frac{t_{so}}{\partial \bar{p}_s} + \bar{z}_{so} \frac{\partial t_{so}}{\partial \bar{w}_s} \\ \left( \frac{\partial t_{so}}{\partial q} \right)^* &= \frac{\partial t_{so}}{\partial \bar{v}} - \bar{x}_{so} \frac{\partial t_{so}}{\partial \bar{v}_{so}} - \bar{z}_{so} \frac{\partial t_{so}}{\partial \bar{u}_s} \\ \left( \frac{\partial t_{so}}{\partial r} \right)^* &= -\frac{\partial t_{so}}{\partial q_s} - \bar{x}_{so} \frac{\partial t_{so}}{\partial \bar{w}_s} \end{aligned} \quad (9.163)$$

gdzie, analogicznie do współczynnika ciągu  $t_c$  wirnika nośnego:

$$t_{so} = \frac{T_{so}}{\rho \sigma_{so} A_{so} (\Omega_{so} R_{so})^2} \quad (9.164)$$

#### 9.7.4. Pochodne współczynników aerodynamicznych kadłuba

Spośród pochodnych aerodynamicznych sił powstających na kadłubie, istotne znaczenie mają jedynie: pochodne  $x_u$  i  $y_v$ , a spośród pochodnych momentów:

$m_u, m_w, m_{\dot{w}}, m_q$ .

Działająca na kadłub wzdłuż osi podłużnej siła aerodynamiczna  $X_K$  jest w przybliżeniu równa oporowi i może być zapisana w postaci:

$$X_K \cong -\frac{1}{2} \rho S_K V_0^2 C_{XK} \quad (9.165)$$

gdzie  $S_K$  jest powierzchnią odniesienia kadłuba,  $C_{XK}$  – jego współczynnikiem aerodynamicznej siły wzdłużnej, w przybliżeniu równym współczynnikowi oporu, a

$$V_0 = \sqrt{(U_1 + u)^2 + (V_1 + v)^2 + (W_1 + w)^2} \quad (9.166)$$

jest wypadkową prędkości lotu.

Na zakresie prędkości, z jaką latają śmigłowce, można pominąć wpływ ściśłości na  $C_{XK}$ , a więc:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_K}{\partial u} / &= -\frac{1}{2} \rho S_K C_{XK} \frac{\partial}{\partial u} (U_1^2 + 2U_1 u + u^2) = \\ &= -\rho S_K (U_1 + u) C_{XK} \approx -\rho S_K U_1 C_{XK} \end{aligned} \quad (9.167)$$

a w postaci bezwymiarowej:

$$(x_u)_K = -\frac{S_K}{A_{WN} \sigma} \bar{U}_1 C_{XK} \quad (9.168)$$

Siłę boczną kadłuba można przedstawić w formie:

$$Y_K \cong -\frac{1}{2} \rho S_K V_0^2 C_{YK}, \quad (9.169)$$

gdzie  $C_{YK}$  jest współczynnikiem aerodynamicznej siły bocznej kadłuba.

Postępując analogicznie, jak przy wyznaczaniu pochodnej  $(X_u)_K$  otrzymamy:

$$(y_v)_K = -\frac{S_K}{A_{WN} \sigma} \bar{V}_1 C_{YK} \quad (9.170)$$

Moment  $M_K$  pochylający kadłuba w ogólnym przypadku jest sumą niezależnego od siły nośnej na stateczniku poziomym momentu  $M_{0K}$  oraz momentu  $M_H$  pochodzącego głównie od statecznika poziomego i zależnego od powstałej na nim siły nośnej.

W przypadku lotu śmigłowca z prędkością  $V_0 \approx U_1 \gg 0$ , pierwszy z nich może być zapisany w postaci:

$$M_{0K} = \frac{1}{2} \rho S_K l_K V_0^2 \frac{\partial C_{m_{0k}}}{\partial \alpha_K} (\alpha_{0K} - k\varepsilon) \quad (9.171)$$

gdzie:

$l_K$  – długość odniesienia (np. długość kadłuba);

$S_K$  – powierzchnia odniesienia kadłuba (np. powierzchnia przekroju poprzecznego);

$C_{m_{0K}}$  – współczynnik momentu pochylającego kadłuba  $M_{0K}$ ;

$\alpha_K = \alpha_{0K} - k\varepsilon$  – efektywny kąt natarcia kadłuba;

$\alpha_{0K}$  – kąt ustawienia kadłuba w stosunku do kierunku strug w nieskończoności;

$\varepsilon = \arctan \frac{v_i}{V_0} \approx \frac{v_i}{V_0}$  – kąt odchylenia strug w obszarze wirnika nośnego;

$v_i$  – prędkość indukowana przez wirnik nośny w jego płaszczyźnie;

$1 \leq k \leq 2$  – współczynnik określający stosunek prędkości indukowanej w jakimś obszarze, np. statecznika poziomego, do prędkości  $v_i$ .

Na podstawie (9.171) mamy więc:

$$\frac{\partial M_{0K}}{\partial u} = \rho V_0 S_K l_K \frac{\partial C_{m_{0K}}}{\partial \alpha_K} \left( \alpha_K - \frac{1}{2} V_0 k \frac{\partial \varepsilon}{\partial u} \right) \quad (9.172)$$

Pamiętając, że  $\varepsilon \cong \frac{v_i}{V_0}$ , pochodną  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial u}$  można obliczyć z zależności:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial u} \approx \frac{1}{V_0} \left( \frac{\partial v_i}{\partial u} - \frac{v_i}{V_0} \right) \approx \frac{1}{V_0} \left( \frac{\partial \lambda_i}{\partial u} - \frac{\lambda_i}{\bar{V}_0} \right) \quad (9.173)$$

więc zależność (9.172) można przedstawić w następującej bezwymiarowej postaci:

$$(m_u)_{0K} = \kappa_K \bar{V}_0 \frac{\partial C_{m_{0K}}}{\partial \alpha_K} \cdot \left[ \alpha_K - \frac{k}{2} \left( \frac{\partial \lambda_i}{\partial \bar{u}} - \frac{\lambda_i}{\bar{V}_0} \right) \right] \quad (9.174)$$

Gdzie  $\kappa_K = \frac{S_K l_K}{A_{WN} \sigma R}$  jest „cechą objętościową” kadłuba.

Moment  $M_{H'}$  przy założeniu  $V_0 \approx \bar{U}_1 \gg 0$ , może być przedstawiony w formie:

$$M_H = -\frac{1}{2} \rho V_0^2 S_H l_H C_{ZH} \quad (9.175)$$

gdzie:

$S_H$  i  $l_H$  oznaczają odpowiednio: powierzchnię statecznika poziomego i odległość jego środka aerodynamicznego od środka ciężkości śmigłowca;

$C_{ZH} = a_H \alpha_H = a_H (\alpha_{0K} + \alpha_{ZH} - k\varepsilon)$  – współczynnik siły nośnej statecznika poziomo-

meo oraz  $a_H = \frac{\partial C_{ZH}}{\partial \alpha_H}$

$\alpha_H$  – kąt natarcia statecznika poziomego;

$\alpha_{ZH} = k_1 + k_2 \Theta_0$  – kąt ustawienia statecznika poziomego względem kadłuba, zwykle liniowo zależny od skoku ogólnego  $\Theta_0$  wirnika ( $k_1$  i  $k_2$  są stałymi).

Różniczkując (9.125) względem przyrostu prędkości  $u$  otrzymamy:

$$\frac{\partial M_H}{\partial u} = -\rho V_0 S_H l_H \left( C_{ZH} + \frac{1}{2} V_0 k \frac{\partial C_{ZH}}{\partial u} \right) \quad (9.176)$$

Pochodna (9.176) w postaci bezwymiarowej przyjmuje formę:

$$(m_u)_H = -\kappa_H \bar{V}_0 \left[ C_{ZH} - a_H \frac{k}{2} \left( \frac{\partial \lambda_i}{\partial u} - \frac{\lambda_i}{V_0} \right) \right] \quad (9.177)$$

gdzie:

$$\kappa_H = \frac{S_H l_H}{A_{WN} \sigma R} \quad (9.178)$$

jest „cechą objętościową” statecznika poziomego.

W przypadku lotu z małą prędkością i zawisu, moment  $M_K$  pochylający kadłuba można obliczyć np. z zależności:

$$M_K = \frac{\rho C_{XK} S_K h (\bar{U}_1^2 + \lambda^2) \bar{u} \Omega^2 R^2}{2\lambda} \quad (9.179)$$

gdzie:

$C_{XK} \approx 0.5$ ;

$S_K$  – pole rzutu kadłuba i statecznika poziomego na płaszczyznę prostopadłą do wału wirnika nośnego;

$h$  – mierzona wzdłuż osi wału wirnika odległość piasty wirnika od środka ciężkości śmigłowca.

Pochodna  $\partial M_K / \partial u$  w formie bezwymiarowej ma więc następującą postać:

$$(m_u)_K = \frac{S_K h}{A_{WN} \sigma R} \frac{\bar{U}_1^2 + \lambda^2}{4\lambda} \quad (9.180)$$

Pochodną  $\frac{\partial M_K}{\partial w}$  momentu pochylającego kadłuba względem prędkości pionowej oblicza się podobnie jak pochodną  $\frac{\partial M_K}{\partial u}$ , to znaczy jako sumę niezależnej od siły nośnej na stateczniku poziomym pochodnej  $\frac{\partial M_{0K}}{\partial w}$  i pochodzącej głównie od statecznika poziomego pochodnej  $\partial M_H / \partial w$ , zależnej od działającej na statecznik siły nośnej.

Przyrost prędkości  $w$  powoduje zmianę kąta natarcia kadłuba o wielkość

$$\Delta \alpha_K = \frac{w}{V_0} \left( 1 - k \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right) \quad (9.181)$$

a więc zmianę momentu pochylającego

$$\Delta M_{0K} = \frac{1}{2} \rho S_K l_K V_0^2 \cdot \frac{\partial C_{m_{0K}}}{\partial \alpha_K} \cdot \frac{w}{V_0} \cdot \left( 1 - k \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right) \quad (9.182)$$

ale, na podstawie (9.173):

$$k \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} = k V_0 \frac{\partial v_i}{\partial w} = k \frac{\partial \lambda_i}{\partial \bar{w}} \quad (9.183)$$

więc, przy założeniu  $V_0 \approx U_1 \gg 0$  będzie:

$$(m_w)_{0K} = \frac{1}{2} \bar{U}_1 \kappa_H \frac{\partial C_{m_{0K}}}{\partial \alpha_K} \left( 1 - k \frac{\partial \lambda_i}{\partial \bar{w}} \right) \quad (9.184)$$

przy czym, według [2.8], dla kadłuba  $k \approx 1$ .

Zmiana kąta natarcia statecznika poziomego o wartość (5.181) wywołuje zmianę momentu pochylającego śmigłowca o wartość:

$$\Delta M_w = -\frac{1}{2} S_w l_w V_0^2 a_w \frac{w}{V_0} \cdot \left( 1 - k \cdot \frac{\partial \lambda_i}{\partial \bar{w}} \right) \quad (9.185)$$

więc

$$(m_w) = -\bar{U}_H a_H \left( -k \frac{\partial}{\partial \bar{U}} \right) \quad (9.186)$$

przy czym dla statecznika  $k \approx 2$ .

W przypadku lotu z małą prędkością i zawisu, pochodną  $m_w$  pochodzącą od kądowna i statecznika poziomego można wyznaczyć np. z zależności [2.8]:

$$(m_w)_K \cong \frac{1}{2} \kappa_H \lambda \quad (9.187)$$

Przyrost prędkości kątowej pochylenia  $q$  wywoła głównie zmianę kąta natarcia na stateczniku poziomym:

$$\Delta \alpha_H = \frac{l_H q}{V_0} \quad (9.188)$$

a więc zmianę momentu pochyłającego śmigłowiec:

$$\Delta M_H = -\frac{1}{2} \rho S_H l_H^2 V_0 a_H q \quad (9.189)$$

Pochodna  $(m_q)_H$  momentu pochyłającego względem prędkości kątowej pochylenia będzie więc miała postać:

$$(m_q)_H = -\frac{1}{2} \bar{U}_1 \kappa_H \bar{l}_H a_H \quad (9.190)$$

Wśród pochodnych momentu pochyłającego występuje pochodna  $m_H$  względem przyspieszenia – patrz równanie (9.173), określająca wpływ opóźnienia o czas  $l_H/V_0$  dojścia odchylonych przez wirnik nośny strug do statecznika poziomego. Uwzględniając to opóźnienie, kąt odchylenia strug w okolicach statecznika ma wartość:

$$k\varepsilon = k \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \left( \alpha - \frac{\partial \alpha}{\partial t} \frac{l_H}{V_0} \right) \quad (9.191)$$

$$\text{gdzie: } \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\dot{w}}{V_0}$$

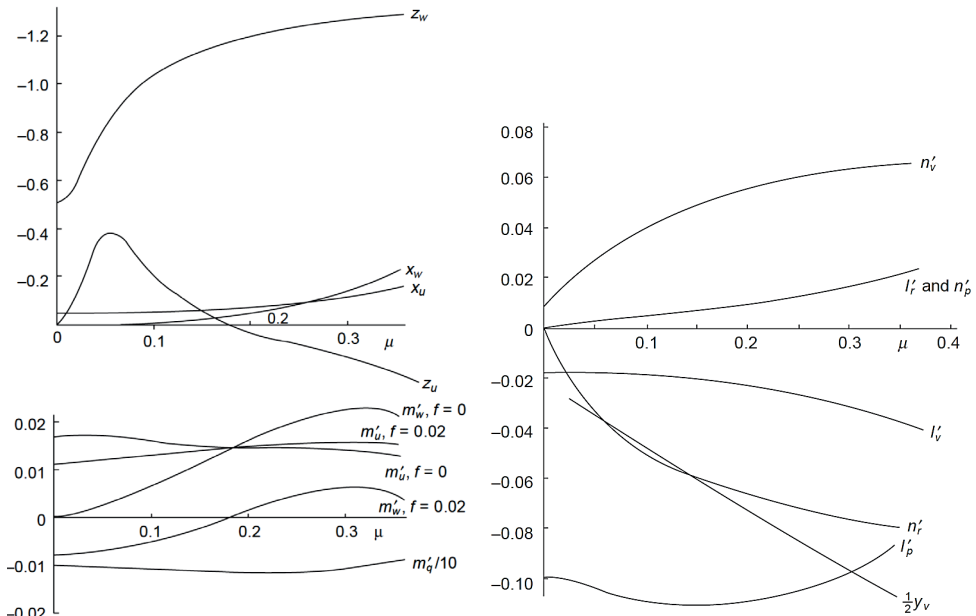
Kąt natarcia statecznika poziomego

$$\alpha_H = \alpha - k\varepsilon = k \cdot \frac{l_H}{V_o} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \alpha \left( 1 - k \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right), \quad (9.192)$$

gdzie  $k \approx 2,0$ .

Uwzględniając (9.183), bezwymiarowa pochodna momentu pochyłającego względem prędkości zmian natarcia ma postać:

$$m_{\dot{w}} = -\frac{1}{2} \kappa_H \bar{l}_H a_H \frac{\partial \lambda_i}{\partial \bar{w}} k \quad (9.193)$$



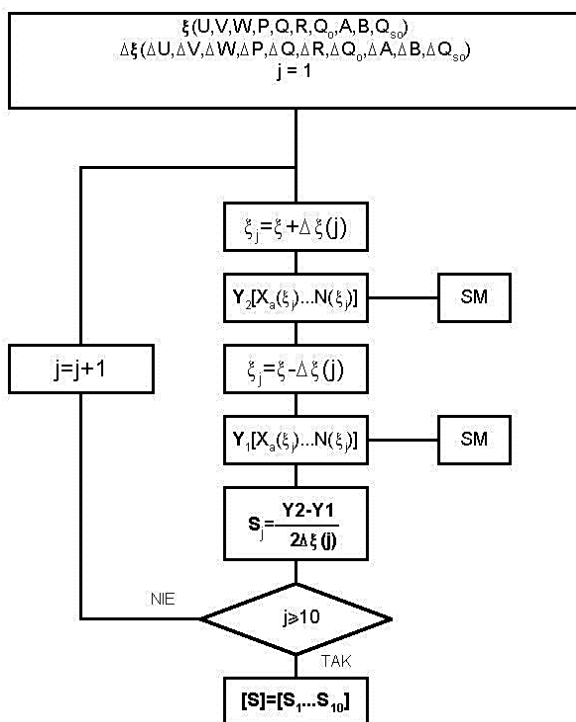
Rys. 9.8. Typowy przebieg pochodnych aerodynamicznych

## 9.8. Obliczanie pochodnych aerodynamicznych metodą przyrostów skończonych

Opisane dotychczas metody obliczania pochodnych aerodynamicznych polegają na różniczkowaniu wyrażeń analitycznych zlinearyzowanych względem zmiennych różniczkowania. W rezultacie, w stosunkowo prosty sposób otrzymuje się wielkości niezależne od tych zmiennych, łatwe w dalszym analitycznym przetwarzaniu, ale niezbyt dokładne, zwłaszcza w przypadkach gdy rzeczywista funkcja jest silnie nieliniowa.

Zastosowanie do obliczeń szybkich maszyn cyfrowych stwarza możliwość wyznaczenia pochodnych aerodynamicznych w oparciu o bliższe rzeczywistości charakterystyki aerodynamiczne, a także geometryczne wirnika nośnego, śmigła ogonowego i kadłuba oraz uwzględnienia sprzężeń między stopniami swobody śmigłowca.

Podstawowym elementem programu obliczeń pochodnych aerodynamicznych jest procedura (nazwijmy ją SM), na wejściu której są wczytywane stałe wielkości geometryczne, kinematyczne i masowe śmigłowca, funkcje charakterystyk aerodynamicznych (względem kątów natarcia i ślizgu, liczby Macha z wysokości lotu itp.) oraz zmienne: składowe prędkości liniowej  $U$ ,  $V$ ,  $W$  i kątowej  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  śmigłowca, skok ogólny  $\theta_0$  i parametry  $A$ ,  $B$  charakteryzujące położenie tarczy sterującej wirnika nośnego, oraz skok  $\theta_{so}$  śmigła ogonowego. Na wyjściu procedury SM otrzymuje się wektor sił aerodynamicznych  $X_a$ ,  $Y_a$ ,  $Z_a$  oraz momentów aerodynamicznych  $L$ ,  $M$ ,  $N$  działających na śmigłowca. Obliczenia są wykonywane metodą iteracyjną w oparciu o nieliniowy opis matematyczny ruchu śmigłowca i jego elementów, np. wahań łopat wirnika nośnego w przegubach. Szczegóły dotyczące tej procedury można znaleźć w [2.56].

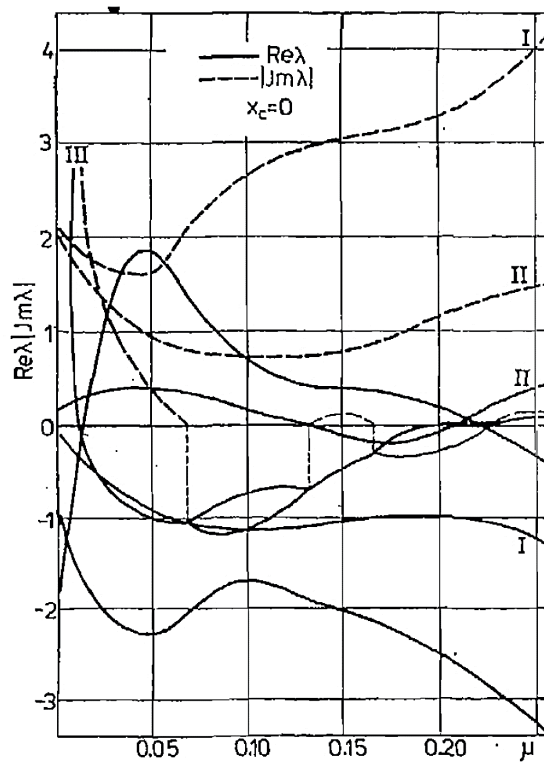


**Rys. 9.9.** Schemat blokowy programu przeznaczonego do numerycznego wyznaczania pochodnych aerodynamicznych



Same pochodne są obliczane według algorytmu schematycznie przedstawionego na rys. 9.9. Na wstępie określa się dziesięć składowych wektora  $\xi$  oraz dziesięć składowych przyrostów składowych wektora  $\xi$  (wektor  $\Delta\xi$ ).

Zazwyczaj przyrosty są rzędu 1% maksymalnej wartości odpowiedniej składowej. Następnie, stosując procedurę SM, oblicza się kolejno składowe obciążenia aerodynamiczne  $X_a, Y_a, Z_a, L, M, N$  dla dodatnich  $(Y)_2$  i ujemnych  $(Y)_1$  przyrostów składowych wektora stanu, po czym oblicza się pochodne  $S$  jako ilorazy różnic obciążeń aerodynamicznych i podwojonej wartości przyrostu. Cykl obliczeń powtarza się tyle razy, względem ilu parametrów obliczamy pochodne. Np. w przypadku obliczania tylko pochodnych stateczności z trzymanymi sterami, cztery ostatnie składowe wektora  $\Delta\xi$ , określające wychylenia organów sterowania, są równe zeru i cykl obliczeń jest powtarzany sześć razy. W przypadku ogólnym cykl obliczeń powtarza się dziesięć razy.



**Rys. 9.10.** Przebieg wartości własnych funkcji posuwu wirnika nośnego. Pochodne aerodynamiczne liczone były metodą przyrostów skończonych

W oparciu o opisaną powyżej procedurę obliczania pochodnych aerodynamicznych obliczono pochodne aerodynamiczne śmigłowca klasy PZL 3W Sokół. Dla tak

obliczonych pochodnych aerodynamicznych obliczono wartości własne macierzy stanu (7.45). Przykładowe wyniki tych obliczeń przedstawiono na rys. 9.10. Na tym rysunku zestawiono pięć wartości własnych  $l_i$  w funkcji bezwymiarowej prędkości lotu, (posuwu wirnika nośnego),  $\mu$ . Trzy pary zespolonych o wartościach, (o częściach rzeczywistych oznaczonych liniami ciągłymi i częściami urojonych oznaczonych liniami przerywanymi). Pary zespolonych sprzężonych wartości własnych oznaczono cyframi rzymskimi I, II i III. W dwu przedziałach parametru  $\mu$  para zespolone sprzężonych wartości własnych  $\lambda_{III}$  (oznaczona rzymską cyfrą III), przechodzi w dwie rzeczywiste wartości własne.

Śmigłowiec byłby stateczny, jeżeli linie ciągłe nie przebiegałyby nad osią odciętych. W przypadku przedstawionym na rys. 9.10, śmigłowiec jest dynamicznie niestateczny w całym przedziale  $\mu$ , a zwłaszcza w zawisie ( $\mu = 0$ ).

Znając wartości własne  $l_i$  można określić własności fizyczne ruchu śmigłowca: tłumienie, a w przypadku ruchów oscylacyjnych okres, a także postacie ruchu, analizując wektory własne macierzy stanu  $\mathbf{R}$  (7.45).

# 10

## PARAMETRY LOTU USTALONEGO ŚMIGŁOWCA

### 10.1. Wstęp

Wielkości charakteryzujące ustalony lot śmigłowca w przypadku ogólnym oblicza się z nieliniowych równań ruchu, np. (5.7) i (5.9), w których pomija się prędkości kątowe i wszystkie pochodne względem czasu. Wyznaczenie występujących po prawej stronie tych równań obciążeń aerodynamicznych, będących także funkcjami poszukiwanych parametrów lotu ustalonego, prowadzi do powiększenia liczby równań (np. do 14), które ze względu na ich nieliniowy charakter mogą być rozwiązane tylko numerycznie, metodą kolejnych przybliżeń. Wartości startowe iteracji oblicza się w oparciu o równania zlinearyzowane i uproszczone przez rozdzielenie ruchów na wzajemnie niezależne ruchy podłużne i poprzeczne. Niżej zostaną opisane najpierw przypadki uproszczone, a następnie będą podane algorytmy iteracji.

### 10.2. Podłużna równowaga śmigłowca

Niech, analogicznie jak w punkcie 6.2.1, wypadkowa siła aerodynamiczna wirnika nośnego ma trzy ortogonalne składowe: prostopadły do płaszczyzny końców łopat ciąg  $T_D$  oraz skierowaną do tyłu  $H_D$  i skierowaną w prawo  $S_D$ .

Uwzględniając główne siły działające w umownej płaszczyźnie symetrii śmigłowca (rys. 6.20) otrzymano następujące ich rzuty na oś: pionową i poziomą:

$$\begin{cases} T_D \cos(\alpha_D + \gamma) - H_D \sin(\alpha_D + \gamma) - P_x \sin \gamma - G = 0 \\ T_D \sin(\alpha + \gamma) + H_D \cos(\alpha_D + \gamma) + P_x \cos \gamma = 0 \end{cases} \quad (10.1)$$

gdzie:

$\alpha_D$  – kąt natarcia wirnika (między prędkością lotu  $V_o$  i śladem płaszczyzny końców łopat),

$\gamma$  – kąt toru lotu,

$P_X$  – opór kadłuba wraz z osłoną przekładni głównej, podwoziem i statecznikiem poziomym.

W obu powyższych równaniach pominięto wpływ przechylenia ciągu  $T_D$  od płaszczyzny pionowej, a w równaniu (10.1) także wpływ siły bocznej  $S_D$  wirnika i siły nośnej  $P_{ZH}$  statecznika poziomego. Przyjmując, że kąty  $\alpha_D$  i  $\gamma$  oraz ich suma są małe i pomijając składnik  $H_D(\alpha_D + \gamma)$ , równania (10.1) przybiorą postać:

$$\begin{cases} T_D \approx T = G + P_X \gamma \\ T(\alpha_D + \gamma) + H_D = -P_X \end{cases} \quad (10.2)$$

Wyrażając opór kadłuba w postaci:

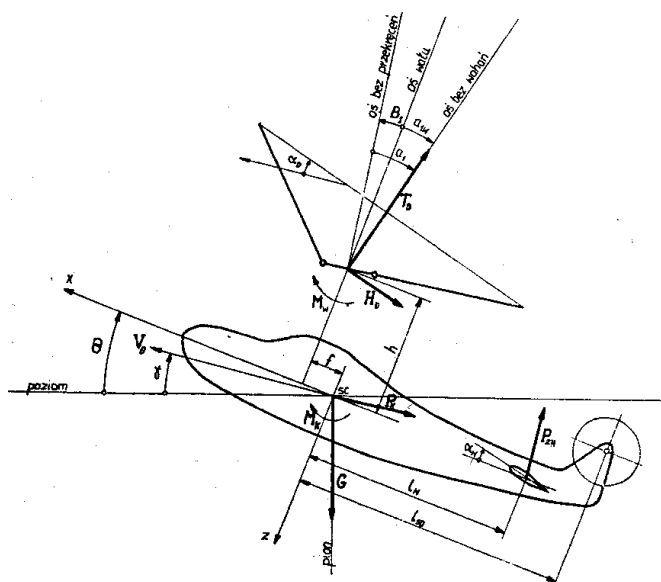
$$P_X = \frac{\rho V_o^2}{2} A_{WN} \sigma d_o \quad (10.3)$$

gdzie  $d_o = C_{xK} S_K / A \sigma$  jest współczynnikiem oporu kadłuba odniesienia do powierzchni  $A \sigma$  łopat wirnika, a  $V_o$  wypadkową prędkości lotu ustalonego dla przypadku  $u = v = w = 0$ , i dzieląc równania (10.1) i (10.2) przez  $\rho A \sigma V_o^2$ , otrzymano:

$$\begin{cases} t_c = \frac{mg}{\rho A_{WN} \sigma V_T^2} + \frac{d_o \gamma}{2} \\ t_c(\alpha_D + \gamma) + h_c = -\frac{V_o^2 d_o}{2} \end{cases} \quad (10.4)$$

skąd można wyznaczyć kąt natarcia wirnika:

$$\alpha_D = -\frac{\left( \frac{\bar{V}_o^2 d_o}{2} 2 + h_c \right)}{t_c} - \gamma \quad (10.5)$$



Rys. 10.1. Układ sił i momentów działających na śmigłowiec w płaszczyźnie symetrii

Współczynnik ciągu  $t_c$  można wyznaczyć z równania (10.4) lub (10.5), pomijając drugi człon po prawej stronie znaku równości określający pionową składową oporu kadłuba.

Siła wzdłużna  $H_D$  pochodzi głównie od oporu profilowego wirnika w locie poziomym, a więc jej współczynniki  $h_c$  można w przypadku lotu ustalonego wyznaczyć z wyrażenia (9.122), biorąc pod uwagę tylko człon po prawej stronie, który dla

przypadku stałej cięciwy łopaty wzdłuż rozpiętości  $\left(t_2 = \frac{1}{2}\right)$  ma wartość

$$h_c = \bar{U}_1 C_x / 4 \quad (10.6)$$

Znając  $\alpha_D$  (10.5), dla każdego kąta toru lotu  $\gamma$  można wyznaczyć współczynnik przepływu wzdłuż osi bez wahań:

$$\lambda_D = \bar{V}_0 \sin \alpha_D - \lambda_i \approx \bar{V}_0 \alpha_D - \lambda_i \quad (10.7)$$

Bezwymiarową prędkość indukowaną  $\lambda_i$  oblicza się jako średnią dla całego wirnika z wyrażenia (9.125):

$$\lambda_i = \lambda_{io} = \left(\lambda_{io}\right)_{zaw}^2 / \sqrt{\bar{V}_0^2 + \lambda_i^2}, \quad (10.8)$$

gdzie  $(\lambda_{io})$  jest średnią bezwymiarową prędkością indukowaną w zawisie (9.126).

Rozwiązując (10.8) względem  $\lambda_i$  otrzymuje się:

$$\lambda_i = \sqrt{\left( \sqrt{\bar{V}_o^4 + 4 \cdot (\lambda_{io})_{zaw}^4} - \bar{V}_o^2 \right) / 2} \quad (10.9)$$

Znając  $t_c$  i  $\lambda_D$  można wyznaczyć kąt  $\theta_o$  skoku ogólnego wirnika nośnego, a następnie współczynniki wahań:  $a_o$  (9.151b) i  $a_1$  (9.152c) łopaty, a także współczynnik  $m_{op}$  (9.165) momentu oporowego wirnika, wstawiając w cytowanych czterech wyrażeniach  $\lambda_D$  zamiast  $\bar{W}_1 - \lambda_{io}$  oraz  $\lambda$ .

Cykl obliczeń  $\lambda_D$  i  $\theta_o$  może być powtórzony, gdyż dla wyznaczonych w pierwszym przybliżeniu wartości  $\lambda_D$  i  $\theta_o$  można obliczyć drugie przybliżenie współczynników  $t_c$  (9.161) i  $h_c$  (6.163), przez uwzględnienie większej liczby wyrazów, jednakże z przykładów liczbowych wynika, że drugie przybliżenie zazwyczaj mało się różni od pierwszego.

W celu obliczenia kąta  $B_1$  pochylenia tarczy wirnika nośnego rozważamy równowagę momentów pochyłających śmigłowiec.

Odpowiednie równanie względem osi  $y$  ma postać

$$M = T_D f \cos(a_1 - B_1) + T_D h \sin(a_1 - B_1) - H_D f \sin(a_1 - B_1) + H_D h \cos(a_1 - B_1) + M_w + M_{oK} + M_H = 0 \quad (10.10)$$

gdzie:

$M_w$  – moment pochyłający wirnika, określony przez trzeci wyraz po prawej stronie znaku równości w (9.67); pierwsze dwa człony po prawej stronie (9.67) pochodzą od sił aerodynamicznych wirnika i w (10.10) są uwzględnione w postaci składowych  $T_D$  i  $H_D$ ;

$M_{oK}$  – moment pochyłający śmigłowiec pochodzący od kadłuba (9.207);

$M_H = -P_{ZH} I_H$  – moment pochyłający śmigłowiec pochodzący od statecznika poziomego (9.211).

Linearyzując (10.10) względem kąta  $a_1 - B_1$  oraz pomijając wyraz  $H_D f \sin(a_1 - B_1)$  jako mały w porównaniu z pozostałymi, wyznaczamy, na podstawie rys. 6.10, występujący w (9.207) kąt natarcia kadłuba:

$$\alpha_{oK} = \Theta - \gamma = \alpha_D - a_{1w} = \alpha_D - a_1 + B_1, \quad (10.11)$$

i wprowadzając oznaczenie:

$$M_{0K} = \rho A \sigma \Omega^2 R^3 C_{mOK} \quad (10.12)$$

po uwzględnieniu (9.7), (9.26) i (9.159) oraz podzieleniu wyrażenia (10.10) przez  $\rho A \sigma \Omega^2 R^3$  otrzymamy:

$$t_c \bar{f} + t_c \bar{h} (a_1 - B_1) + h_c \bar{h} + C_{ms} (a_1 - B_1) + C_{mOK} - \bar{V}_o^2 \kappa_H a_H (\alpha_D - \alpha_1 + B_1 + \alpha_{ZH} - k \cdot \varepsilon) = 0 \quad (10.13)$$

$$B_1 = a_1 + \frac{t_c \bar{f} + h_c \bar{h} + C_{mOK} - \bar{V}_o^2 \kappa_H a_H (\alpha_D + \alpha_{ZH} - k \cdot \varepsilon) / 2}{t_c \bar{h} + C_{ms} + \bar{V}_o^2 \kappa_H \alpha_H / 2} \quad (10.14)$$

Kąt  $\Theta$  pochylenia kadłuba można wyznaczyć z wyrażenia (10.10), które po podzieleniu przez  $\rho A \sigma \Omega^2 R^2$ , dla małych kątów przybierze postać:

$$\alpha_D + \varphi = \frac{h_c}{t_c} - \frac{\bar{V}_o^2 d_o}{2t_c} \quad (10.15)$$

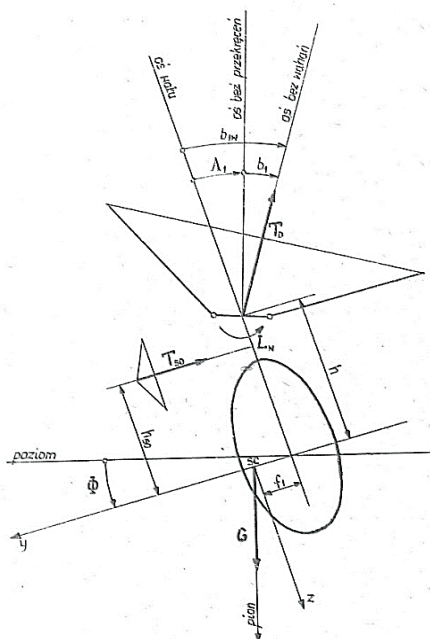
a po uwzględnieniu (10.11):

$$\Theta = B_1 - a_1 - \frac{h_c}{t_c} - \frac{\bar{V}_o d_o}{t_c} \quad (10.16)$$

Z analizy postaci (10.16), po uwzględnieniu (10.15) wynika, że w zakresie słuszności założeń poczynionych przy wyprowadzeniu obu tych wyrażeń, kąt  $\Theta$  pochylenia kadłuba śmigłowca jest funkcją kwadratu prędkości  $\bar{V}_o$  lotu, natomiast, inaczej niż w samolotach, nie zależy bezpośrednio od kąta  $\gamma$  toru lotu, a więc np. sztuczny horyzont, reagujący na kąt  $\Theta$ , prawie nie dostarcza informacji o wielkości kąta toru lotu śmigłowca.

### 10.3. Boczna równowaga śmigłowca

W celu wyznaczenia kątów: pochylenia  $A$  tarczy sterującej wirnika nośnego i przechylenia  $\Phi$  kadłuba rozważmy główne siły działające na śmigłowiec w płaszczyźnie osi  $Oyz$  (rys. 10.2).



**Rys. 10.2.** Rzuty sił na płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny symetrii śmigłowca

Pomijając siły boczne, otrzymamy następujące równanie rzutów sił na oś poziomą:

$$T_D \sin(\Phi - b_{lw}) - T_{so} \cos \Phi = 0 \quad (10.17)$$

które dla małych kątów i zachodzącej zazwyczaj równości  $\Omega_{so} R_{so} = V_K$ , po uwzględnieniu (9.29) i podzieleniu przez  $\rho A \sigma V_K^2$  przybiera postać:

$$t_c (\Phi - A_1 - b_1) - \kappa_{so} t_{so} = 0 \quad (10.18)$$

gdzie:

$$\kappa_{so} = \frac{A_{so} \sigma_{so}}{A \sigma} \quad (10.19)$$

jest „cechą objętościową” śmigła ogonowego.

Równanie momentów przechylających śmigłowiec (względem osi  $x$ ) ma postać:

$$L = T_D f_1 \cos b_{lw} - T_D h \sin b_{lw} - T_{so} h_{so} - L_w = 0 \quad (10.20)$$



a po uwzględnieniu (6.29) i trzeciego wyrazu po prawej stronie znaku równości w (6.39) oraz podzieleniu przez  $\rho A \sigma \Omega^2 R^2$ , dla małych kątów i zachodzącej zazwyczaj równości  $\rho A \sigma \Omega^2 R^2$  otrzymamy:

$$t_c \bar{f}_1 - t_c \bar{h} (A_1 + b_1) - t_{so} \bar{h}_{so} \kappa_{so} + C_{ms} (A_2 + b_1). \quad (10.21)$$

Rozwiązując (10.21) względem  $A_1$  otrzymamy:

$$A_1 = \frac{t_c \bar{f}_1 - t_{so} \bar{h}_{so} \kappa_{so}}{t_c \cdot \bar{h} - C_{ms}} - b_1 \quad (10.22)$$

a wstawiając tę wartość do (10.18) otrzymamy następujące wyrażenie na kąt przechylenia kadłuba śmigłowca:

$$\Phi = A_1 + b_1 + \kappa_{so} \frac{t_{so}}{t_c} \quad (10.23)$$

Ciąg śmigła ogonowego  $T_{so}$  oblicza się z zależności

$$T_{so} = M_{op} / l_{so} \quad (10.24)$$

a w formie bezwymiarowej:

$$t_{so} = m_{op} / \bar{l}_{so} \kappa_{so} \quad (10.25)$$

gdzie współczynnik  $m_{op}$  momentu oporowego wirnika nośnego jest dany równością (6.165) uproszczoną dla przypadku prostoliniowego lotu ustalonego.

Kąt  $\Theta_{so}$  skoku ogólnego śmigła ogonowego wyznacza się z wyrażenia (9.161) uproszczonego dla przypadku prostoliniowego lotu ustalonego i  $\bar{V}_1 = 0$ . Zakładając, że łopaty śmigła ogonowego nie są skrzycone ( $\Theta_s = 0$ ) oraz pamiętając, że dla stałej cięciwy łopat wzdłuż ich długości całki  $t_n$  (9.18) przybierają w przybliżeniu wartości:

$$t_n = \frac{1}{n} \quad (10.26)$$

wyrażenie (9.161) dla przypadku śmigła ogonowego ma postać:

$$t_{so} = \frac{a}{2} \left[ \frac{\Theta_{so}}{3} \left( 1 + \frac{3\bar{U}_1^2}{2} \right) + \frac{\lambda_{so}}{2} \right] \quad (10.27)$$

stąd:

$$\Theta_{so} = \frac{3}{2 \left( 1 + \frac{3\bar{U}_1^2}{2} \right)} \left( \frac{4t_{so}}{a_{so}} - \lambda_{so} \right) \quad (10.28)$$

gdzie  $a_{so}$  jest pochodną współczynnika siły nośnej profilu łopaty śmigła ogonowego względem kąta natarcia, a  $\lambda_{so}$  jest bezwymiarową prędkością indukowaną śmigła ogonowego, obliczaną analogicznie jak bezwymiarowa prędkość indukowana wirnika:

$$\lambda_{so} = \sqrt{\frac{\left( \sqrt{\bar{V}_o^4 + t_{so}^2} \delta_{so}^2 - \bar{V}_o^2 \right)}{2}} \quad (10.29)$$

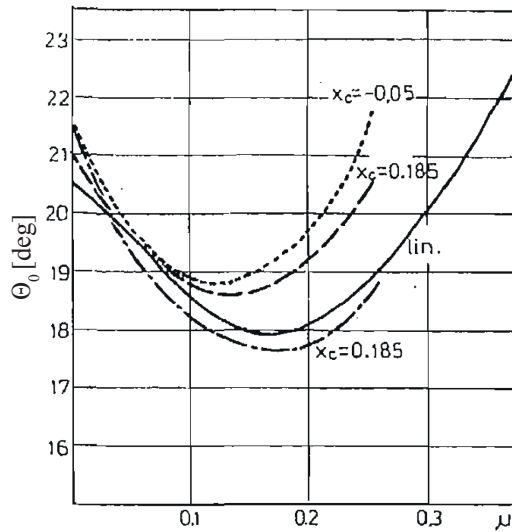
## 10.4. Obliczanie parametrów ustalonego lotu śmigłowca metodą kolejnych przybliżeń

Powszechnie stosowana metoda obliczeń parametrów ustalonego lotu śmigłowca opisana została w tym rozdziale oraz np. w [2.8]. Polega ona na myślowym rozdzieleniu ruchów symetrycznych i antysymetrycznych śmigłowca, zlinearyzowaniu równań ruchu, przyrównaniu do zera składowych prędkości kątowej śmigłowca i wszystkich pochodnych względem czasu oraz wyznaczeniu: z układu równań ruchu symetrycznego wielkości  $B_1$ ,  $Q_0$ ,  $\Theta$  i z układu równań ruchu niesymetrycznego wielkości  $A_1$ ,  $\Theta_{so}$ ,  $\Phi$ . Otrzymane tą drogą parametry lotu ustalonego śmigłowca są wystarczająco dokładne dla większości zagadnień praktycznych, jednakże np. w przypadku analizy stateczności dynamicznej, gdy przedmiotem rozważań jest przebieg w czasie zaburzeń wielkości ustalonych, wymagana jest większa dokładność.

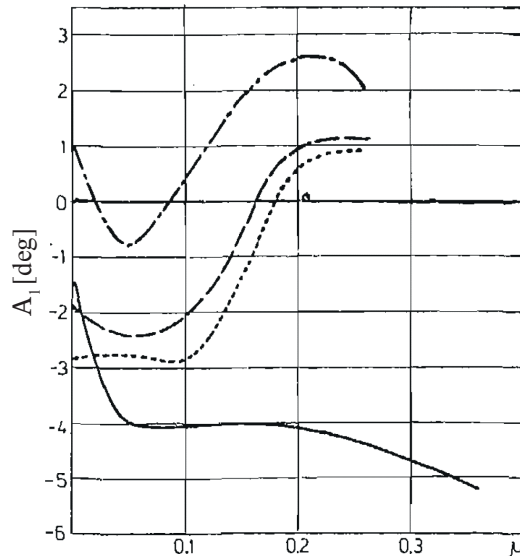
Można ją osiągnąć, wyznaczając parametry lotu ustalonego metodą kolejnych przybliżeń z nieliniowych równań ruchu śmigłowca, po przyrównaniu do zera wszystkich składowych prędkości kątowej kadłuba i pochodnych względem czasu. Wielkości obliczone metodą tradycyjną są wykorzystywane jako wartości startowe procesu iteracyjnego.

### 10.4.1. Porównanie obliczeń warunków równowagi metodami przybliżoną i dokładną

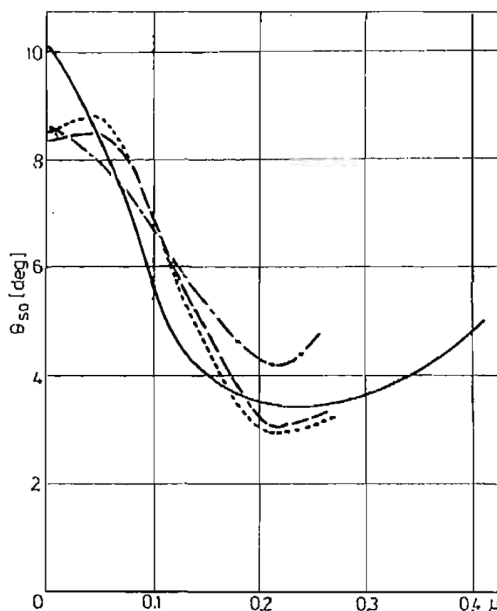
Na rysunkach 10.3, 10.4 i 10.5 przedstawiono przykładowo wielkości  $Q_0$ ,  $A_1$  i  $Q_{so}$  jako funkcje bezwymiarowej prędkości  $\mu$ , obliczone dla trzech położeń środka ciężkości: na osi wału wirnika nośnego, 0,185 m przed osią i 0,05 m za osią (promień wirnika  $R_{WN} = 7,85$  m) metodą pierwszego przybliżenia (lin) oraz powyżej opisaną metodą.



**Rys. 10.3.** Parametry lotu ustalonego śmigłowca. Przebieg kąta skoku ogólnego  $\Theta_0$ . Linia ciągłą oznaczono obliczenia przybliżoną metodą opartą o zlinearyzowany model śmigłowca, liniami przerywanymi obliczenia przeprowadzone metodą uwzględniającą nieliniowy model śmigłowca



**Rys. 10.4.** Parametry lotu ustalonego śmigłowca. Przebieg kąta skoku cyklicznego  $A_1$ . Linia ciągłą oznaczono obliczenia przybliżoną metodą opartą o zlinearyzowany model śmigłowca, liniami przerywanymi obliczenia przeprowadzone metodą uwzględniającą nieliniowy model śmigłowca



**Rys. 10.5.** Parametry lotu ustalonego śmigłowca. Przebieg kąta skoku śmigła ogonowego  $\Theta_{so}$ . Linią ciągłą oznaczono obliczenia przybliżoną metodą opartą o zlinearyzowany model śmigłowca, liniami przerywanymi obliczenia przeprowadzone metodą uwzględniającą nieliniowy model śmigłowca

Z rysunków wynika, że charakter zmienności parametrów lotu ustalonego jest w obu metodach podobny, wartości bezwzględne są jednak różne. Ponadto metoda oparta na rozdzieleniu ruchów, w odniesieniu do prezentowanych parametrów jest niewrażliwa na położenie środka ciężkości śmigłowca, co jest konsekwencją założonego braku sprzężeń między postaciami ruchu.

Można podkreślić, że wyznaczone w dwóch poprzednich punktach pierwsze przybliżenie parametrów ustalonego lotu śmigłowca są wystarczająco dokładne dla większości zagadnień praktycznych. W przypadku analizy stateczności dynamicznej, gdy przedmiotem badań jest przebieg w czasie wielkości zaburzonych, parametry lotu ustalonego powinny być znane ze znacznie większą dokładnością, co można osiągnąć, ze względu na nieliniowy charakter równań ruchu, tylko metodą kolejnych przybliżeń. Algorytm obliczeń jest oparty na procedurze SM, która służy do wyznaczania sił i momentów działających na śmigłowiec przy zadanych położeniach organów sterowania.

## STEROWNOŚĆ ŚMIGŁOWCA

### 11.1. Wstęp

Sterowność jest na ogół rozumiana jako zdolność do zmiany ruchu zgodnie z wolą sterującego. W przypadku obiektów latających analiza sterowności polega na badaniu ruchu obiektu pod wpływem wychylenia organów sterowania w różnych kombinacjach możliwych do zrealizowania przez pilota i dopuszczalnych ze względu na bezpieczeństwo lotu, a ocena sterowności polega na porównaniu zmian wybranych parametrów ruchu i wychyleń odpowiednich organów sterowania.

Niekiedy sterowność jest odnoszona nie do wychyleń organów sterowania, a np. do sił wywieranych przez pilota na drążek sterowy lub pedały, niezbędnych do wywołania określonej zmiany parametru lotu. Ze względu na powszechne stosowanie w układach sterowanych urządzeń wymagających, których dobór wykracza poza zakres niniejszego opracowania, rozważania ograniczymy do zakresu określonego w poprzednim akapicie.

Dobrze sterowalny obiekt powinien spełniać następujące kryteria:

1. możliwie małe opóźnienie między wychyleniem organu sterowania a uzyskaną zmianą ruchu obiektu,
2. odpowiedni, najlepiej liniowy, stosunek wychylenia organu sterowania do uzyskanej zmiany ruchu obiektu,
3. szybkie wytłumienie własnych ruchów obiektu wynikających z zakłócenia stanu ustalonego.

Badania sterowności, zarówno analityczne, jak i doświadczalne, polegają więc na porównaniu „odpowiedzi” obiektu na zaburzenia wywołane określonym wychyleniem organu sterowania, np. skokowym lub sinusoidalnym.

W przypadku obiektów niestatecznych dynamicznie, a do takich należą z reguły śmigłowce, przynajmniej w fazie zawisu i lotu poziomego z małą prędkością, jeżeli nie są wyposażone w automatyczne urządzenia ustataczniające, nie jest spełnione kryterium 3, a więc utrudniona jest ocena sterowności wg kryteriów 1 i 2, gdyż

narastające w czasie ruchy własne szybko dominują nad ruchami wymuszonymi wychyleniem organów sterowania.

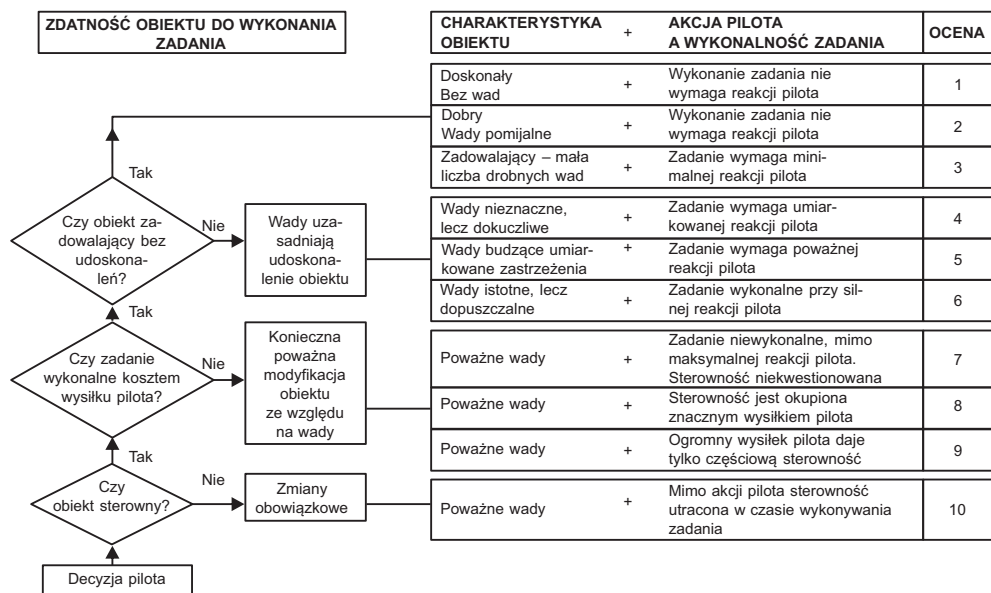
W takich przypadkach ocenę sterowności opiera się zwykle na:

- ocenie subiektywnej dokonywanej przez pilotów,
- obliczeniach przypadków uproszczonych.

## 11.2. Subiektywna ocena sterowności

### 11.2.1. Skala Coopera–Harpera

Subiektywna ocena sterowności opiera się na wrażeniach pilotów z lotów wykonywanych na obiektach rzeczywistych lub na symulatorach. Obecnie oceny pilotów są zazwyczaj podawane w 10-punktowej skali przedstawionej w tabeli 9.1, zaproponowanej przez Coopera [2.11], a powszechnie znanej jako skala Coopera–Harpera [2.33].



Rys. 11.1. Skala Coopera–Harpera

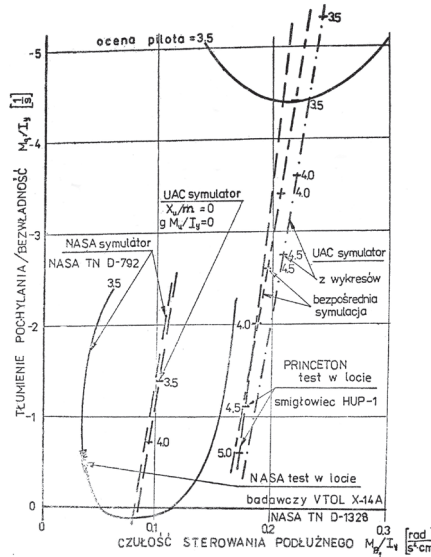
Ze względu na łatwość i bezpieczeństwo wykonania lotu, skala jest dodatkowo umownie podzielona na następujące podgrupy:

- ocena 10: obiekt niesterowany, groźba katastrofy,
- oceny 7÷9: obiekt sterowany, ale nieakceptowalny,
- oceny 4÷6: obiekt sterowany i akceptowalny, ale niezadowalający,
- oceny 1÷3: obiekt sterowany i zadowalający.

W oparciu o ten podział wyróżnia się dwie główne oceny: 3,5 oraz 6,5<sup>6</sup>. Pierwsza jest granicą obiektów zadowalających, a druga akceptowalnych.

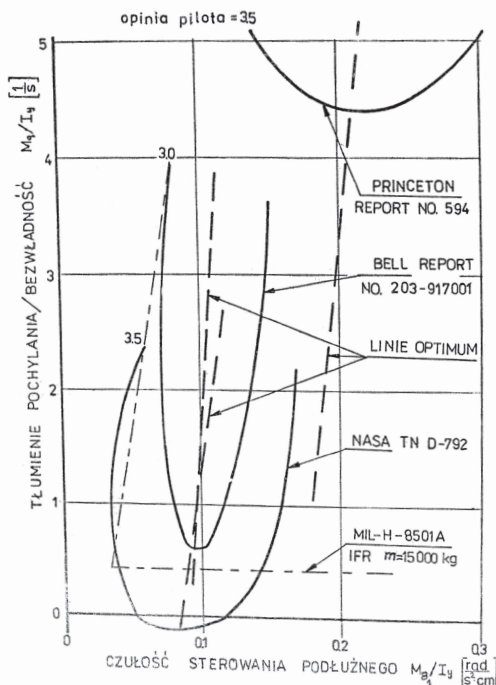
### 11.2.2. Subiektywne kryteria sterowności

Skala ocen pilotów jest stosowana zarówno do określenia sterowności obiektów już istniejących lub, z wykorzystaniem symulatorów badawczych – o nastawialnych parametrach, do określenia sterowności obiektów w stadium projektowania, jak też do ustalenia ogólnych kryteriów sterowności. W tym celu przeprowadzone zostały badania (np. [2.21]) obejmujące różne fazy lotu, typowe manewry itp. wykonane przez grupy pilotów na specjalnie przystosowanych obiektach o dających się zmieniać charakterystykach dynamicznych i na symulatorach badawczych, po czym opracowano oceny pilotów i zaproponowano kryteria sterowności, które mimo że oparte na wrażeniach subiektywnych, ze względu na ich statystyczny charakter, są uznawane np. za podstawę dopuszczenia sprzętu do eksploatacji w różnych warunkach: z widocznością Ziemi, w lotach „na przyrządy” itp. Wyniki takich badań wykonanych w różnych ośrodkach mogą się różnić, czasami dość znacznie i dlatego nie ma dotychczas kryteriów jednolitych, a istniejące, w świetle nowych badań i dyskusji, są permanentnie modernizowane, np. [2.21].



**Rys. 11.2.** Uśrednione krzywe dla kanału pochylenia uzyskane z ocen pilotów otrzymane na podstawie badań w różnych ośrodkach oraz wymagania amerykańskich przepisów MIL dla lotów bez widoczności Ziemi

<sup>6</sup> Mimo że skala zawiera liczby naturalne, miejsce po przecinku wynika z ewentualnego uśrednienia ocen kilku pilotów.



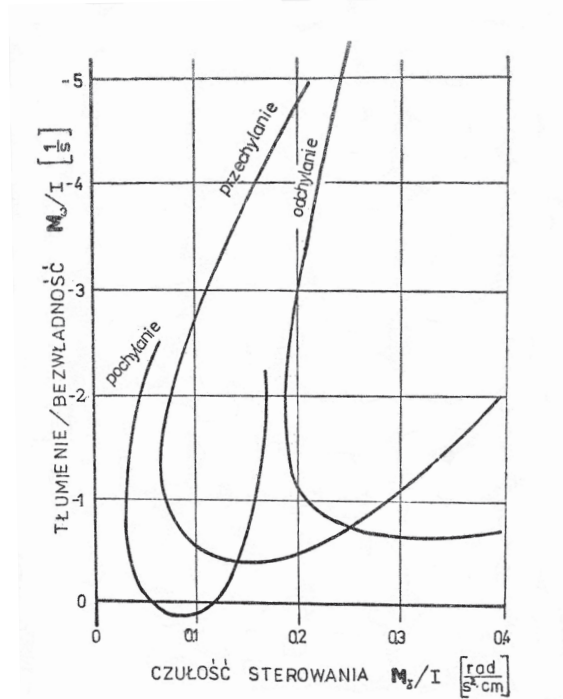
**Rys. 11.3.** Porównanie linii granicznych ocen pilotów (3,5 sw skali Coopera – Harpera) dla wszystkich kanałów sterowania

Na rys. 11.2 [2.21] podano przykłady uśrednionych krzywych ocen pilotów dla kanału pochylenia w zawisie, otrzymanych z badań w różnych ośrodkach [2.21, 2.65, 2.89, 2.90] oraz wymagania amerykańskich przepisów wojskowych [2.60] dla lotów bez widoczności Ziemi. Na rysunku są widoczne znaczne rozbieżności w ocenie wymagań własności lotnych, wynikające prawdopodobnie z różnic mas i momentów bezwładności badanych śmigłowców, z wpływu rzeczywistej lub symulowanej turbulencji atmosferycznej, z niejednorodnych wymagań odnośnie do precyzji wykonania zadań przez pilotów itp.

Na rys. 11.3 pokazano przykład porównania linii granicznych ocen pilotów (3,5) dla wszystkich kanałów sterowania [2.21]. Na osi rzędnych symbol  $M_y/I_y$  oznacza:  $M_q/I_y$ ,  $L_p/I_x$  i  $N_r/I_z$  a na osi odciętych symbol  $M_x/I_x$  oznacza:  $M_b/I_y$ ,  $L_l/I_x$  i  $N_{Q_{so}}/I_z$  odpowiednio dla pochylenia, przechylenia i odchylenia.

Wreszcie na rys. 11.4 przedstawiono przykład [2.40] porównania wyników symulacji przeprowadzonych w NASA i w UAC, z próbami w locie wykonanymi w NASA i Princeton na śmigłowcach o zmiennych charakterystykach dynamicznych.





**Rys. 11.4.** Porównanie wyników symulacji przeprowadzonych w NASA i w UAC z próbami w locie wykonanymi w NASA i Princeton na śmigłowcach o zmiennych charakterystykach dynamicznych

### 11.3. Obiektywne kryteria sterowności

W oparciu o dane statystyczne pochodzące od wielu pilotów wykonujących zadania na różnych śmigłowcach i w rozmaitych warunkach metrologicznych, a także na symulatorach badawczych z różnym stopniem imitacji turbulencji atmosfery, instytucje decydujące o dopuszczeniu sprzętu latającego do użytkowania podejmują próby wprowadzenia kryteriów obiektywnych. Jako przykład takich kryteriów zostaną zacytowane normy stanowiące podstawę wymagań Administracji Lotnictwa Federalnego USA przy dopuszczeniu do użytkowania obiektów pionowego startu i lądowania (VTOL) w warunkach lotów bez widoczności Ziemi (IFR) [2.65].

#### 1) W zakresie wyważenia:

W całym zakresie prędkości przewidzianych dla warunków lotu bez widoczności Ziemi istnieje możliwość wyzerowania sił na organach sterowania. Urządzenie wyważające (trymer) powinno działać w sposób płynny, bez nagłych zmian sił na organach sterowania lub ich pozycji. Luz na organach sterowania nie powinien pogarszać charakterystyk sterowności, a mierzony w kabinie pilota nie powinien przekraczać  $\pm 2\%$  maksymalnych wychyleń tych organów.

2) W zakresie charakterystyk statycznych:

- a) w przypadku lotu z prędkością inną niż prędkość, przy której obiekt był wyważony, sterowanie podłużne powinno wymagać przyłożenia do organu sterowania siły o gradiencie nie mniejszym niż 5N na każde 10 km/h zmiany prędkości lotu. Przy powolnym zwolnieniu nacisku na organy sterowania prędkość powinna wrócić do wartości różniącej się nie więcej niż o  $\pm 5\%$  lub o 8 km/h od prędkości, przy której obiekt był wyważony;
- b) siły na organach sterowania odchylaniem i przechylaniem powinny być stateczne względem kąta ślizgu (wzrastać ze wzrostem kąta) w granicach tego kąta do  $\pm 15^\circ$ ;
- c) obiekt powinien być stateczny kierunkowo z puszczonego sterem;
- d) obiekt powinien być stateczny przy przechylaniu.

3) W zakresie charakterystyk dynamicznych:

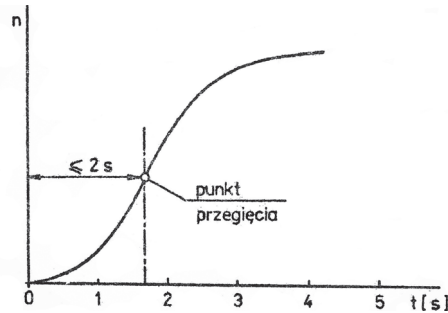
- a) drgania o okresie krótszym niż 5 s powinny być tłumione do połowy amplitudy w czasie nie dłuższym niż jeden okres;
- b) drgania o okresie krótszym niż 10 s powinny być tłumione do połowy amplitudy w czasie nie dłuższym niż dwa okresy,
- c) drgania o okresie krótszym niż 20 s powinny być tłumione;
- d) amplituda drgań o okresie dłuższym niż 20 s nie powinna ulegać podwojeniu w czasie krótszym niż jeden okres;
- e) charakterystyki dynamiczne powinny być mierzone przy wychylaniu przez pilota odpowiedniego organu sterowania przynajmniej o 2,5 cm.

W przypadku gdy obiekt nie spełnia powyższych wymagań, może być wyposażony w urządzenia typu pilota automatycznego, które z kolei muszą odpowiadać odrębnym warunkom.

Sterowność dynamiczną śmigłowca można też zanalizować rachunkowo, obliczając „odpowiedź” na wychylanie organów sterowania lub na podmuch. Bramwell [2.8] za najbardziej reprezentatywną uważa analizę następujących wielkości:

- a) przyspieszenia normalnego w funkcji podłużnej zmiany skoku cyklicznego,
- b) przyspieszenia normalnego w funkcji podmuchu pionowego,
- c) pochylenia i przechylania w funkcji odpowiedniej zmiany skoku cyklicznego.

W tym celu układ ogólnych równań ruchu, np. (5.25), zawierający różne od zera prawe strony można rozwiązać za pomocą maszyn analogowych lub cyfrowych i zanalizować reakcję śmigłowca na zaburzenia. W celu ułatwienia interpretacji wyników zazwyczaj rozwiązuje się nie pełny układ równań, np. przy analizie przypadku a) brane są pod uwagę tylko równania ruchu symetrycznego z pominięciem równania sił wzdłużnych (X) oraz pochodnych aerodynamicznych względem zmian prędkości  $u$  w pozostałych równaniach (sił w kierunku osi  $z$  i momentów pochyłających).



**Rys. 11.5.** Opracowane w NASA kryterium sterowności śmigłowca

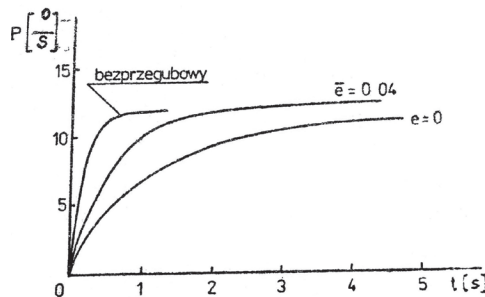
Przyspieszenie normalne, zgodnie z (1.7s) przy  $P = V = 0$  (ruch w płaszczyźnie symetrii) ma wartość

$$\frac{dW}{dt} - UQ \quad (11.1)$$

a wyrażone w jednostkach przyspieszenia ziemskiego, jak tzw. współczynnik przeciążenia

$$n = \frac{\left( U \frac{d\vartheta}{dt} - \frac{dw}{dt} \right)}{g} \quad (11.2)$$

Przykład funkcji  $n(t)$  przy nagłej zmianie podłużnego skoku cyklicznego jest przedstawiony na rys. 11.5, z którego widać, że początkowo przyspieszenie szybko narasta, później jednakże, w wyniku działania statecznika poziomego, tempo wzrostu osiąga maksimum, a następnie maleje. W oparciu o opinie pilotów, w NASA opracowano kryterium sterowności, w myśl którego krzywa na rys. 11.5 powinna mieć punkt przegięcia ( $\ddot{n} = 0$ ) w czasie nie dłuższym niż 2 s.



**Rys. 11.6.** Przebieg prędkości kątowej przechylenia dla nagłej zmiany  $A_1$  skoku cyklicznego dla śmigłowców z wirnikiem przegubowym i bezpręgubowym

Przypadek b) zmian przyspieszenia normalnego w wyniku podmuchu pionowego, jako niewynikający z akcji pilota, nie będzie tu analizowany, natomiast przypadek c) zostanie zilustrowany na przykładzie zmiany przechylenia śmigłowca w wyniku poprzecznej zmiany skoku cyklicznego. Rozważając tylko przechylenie śmigłowca, na podstawie czwartego równania układu (1.24) i (1.13d) otrzymamy:

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{t}} - l_p \frac{\bar{p}}{i_x} = \bar{l}_A A_1 \quad (11.3)$$

gdzie  $\bar{l}_A = \frac{\partial l}{\partial A_1} i_x = \frac{\bar{l}_A}{i_x}$ , jest bezwymiarową pochodną momentu przechylającego

względem poprzecznej zmiany skoku cyklicznego podzieloną przez bezwymiarowy moment bezwładności śmigłowca względem osi podłużnej.

Dla nagłej zmiany  $A_1$  skoku cyklicznego rozwiązanie równania (11.3) ma postać:

$$\bar{p} = -\frac{l_{A_1}}{l_p} \left( 1 - e^{\frac{l_p}{i_x} \bar{t}} \right) A_1 \quad (11.4)$$

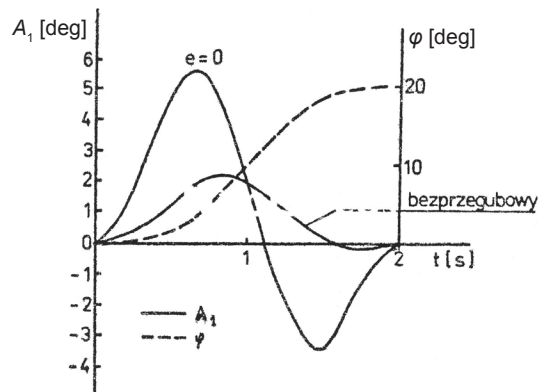
przedstawioną schematycznie na rys. 11.6 dla śmigłowców z wirnikiem przegubowym i bezprzegubowym.

Oceny sterowności można dokonać, analizując poprzeczną zmianę skoku cyklicznego niezbędną do przechylenia śmigłowca o określony kąt w określonym czasie, np. o 20° w ciągu 2 s. W tym przypadku funkcja  $\phi(t)$  może być opisana równaniem [2.75]

$$\phi_{(\text{deg})} = 1.25 \left[ \cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right)t - 9 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 8 \right] \quad (11.5)$$

zilustrowanym na rys. 9.6 linią kreskową.

Pamiętając, że  $\bar{p} = d\phi/d\bar{t}$ , z równania (11.3) można bezpośrednio obliczyć funkcję  $A(t)$ , której typowy przebieg dla przypadku zawisu jest pokazany liniami ciągłymi na rys. 11.7 dla śmigłowców z wirnikiem przegubowym i bezprzegubowym. Z rysunku wyraźnie widać zalety wirników przegubowych z punktu widzenia sterowności. Niezbędne ruchy drążka sterowanego są w przypadku wirnika bezprzegubowego znacznie mniejsze i bardziej „płynne”.



**Rys. 11.7.** Wpływ przebiegu skoku cyklicznego  $A_1$  na przebieg kąta przechylenia śmigłowca z wirnikiem przegubowym i bezprzegubowym



## LITERATURA DO CZĘŚCI II

- 2.1. Arczewski K., Pietrucha J.: *Mathematical modeling of complex mechanical systems* – Vol.1 Discrete models. Ellis Horwood, Chichester 1993.
- 2.2. Babister A.W.: *Aircraft dynamics stability and response*. Pergamon Press, Oxford–N.Y.–Frankfurt 1980.
- 2.3. Bar-Itzhack I.Y.: *Optimum Normalization of a Computed Quaternion of Rotation*. IEEE Transactions of Aerospace and Electronic Systems, Vol. 7, No. 2, 1971.
- 2.4. Basset P.M., Tchen-Fo F.: *Study of the rotor wake distorsion effects on the helicopter pitch – roll cross – couplings*. 24<sup>th</sup> European Rotorcraft Forum, Marseilles, France, 1998.
- 2.5. Berenger T. et. al.: *Experimental and numerical investigation of rotor aerodynamics in forward flight*. Journal of Aircraft, Vol. 34, No. 3, 1997.
- 2.6. Blajer W.: *Metody dynamiki układów wieloczłonowych*. Wyd. Politechniki Radomskiej, Radom 1998.
- 2.7. Bortz J.E.: *A New Mathematical Formulation for Strapdown Inertial Navigation*. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. Vol. 7, No. 1, 1971.
- 2.8. Bramwell A.R.S., Done G., Balmford D.: *Bramwell's Helicopter Dynamics*. Second Edition, AIAA Ed. Series, Reston, VA, 2001.
- 2.9. Brawierman A.S., Vajnshtub A.P.: *Dinamika wertoljta. Predielnyje režimy poljota*. Maszynostrojenije. Moskva 1988.
- 2.10. Cao J., Garrett F. Jr., Hoffman F., Stalford H.: *Analytical aerodynamic model of a high alpha research vehicle wind-tunnel model*. NASA-CR 187469, 1990.
- 2.11. Cooper G.E.: *Understanding and Interpretin Pilot Opinion*. Aero. Eng. Rev., vol. 16, 3, March 1957.

- 2.12. Dinyavari M.A.H., Friedman P.P.: *Application of time-domain unsteady aerodynamics to rotary wing aeroelasticity*. AIAA Journal, Vol. 24, No. 9, 1986.
- 2.13. Douglas-Boyd D., Barnwell R.W.: *Rotor – fuselage interactional aerodynamics – an unsteady rotor model*. Proc. 54<sup>th</sup> American Helicopter Society Annual Forum, 1998.
- 2.14. Dul F.: *Modele aerodynamiki w symulacyjnej analizie flatteru samolotu*. Prace Instytutu Lotnictwa, Nr. 136, 1994.
- 2.15. Esaulow S.Ju., Bahow O.P., Dmitpiev I.S.: *Wertolet kak objekt upravlenija*. Maszynostrojenije, Moskwa 1977.
- 2.16. Euler L.: *De motu corporum circa punctum fixum mobilium*. Commentatio Indicis Enestroemiani, Opera Posthuma, Vol. 2, 1762, s. 43-62.
- 2.17. Euler L.: *Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum*. Novi Commentari Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Vol. 20, 1775, s. 189-207.
- 2.18. Euler L.: *Nova methodus motum corporum rigidorum determinandi*. Novi Commentari Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Vol. 20, 1775, s. 208-238.
- 2.19. Euler L.: *Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile*. Novi Commentari Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Vol. 15, 1770, s. 75-106.
- 2.20. Fang A.C., Zimmerman B.G.: *Digital simulation of rotational kinematics*. NASA TN D – 5302, Oct. 1969.
- 2.21. Faye A.E. Jr.: *Attitude control requirements for hovering determined through the use of a piloted flight simulator*. NASA TN D-792, April 1961.
- 2.22. Gajda J.: Zastosowanie kwaternionów w algorytmach wyznaczania orientacji przestrzennej obiektów ruchomych. *Mechanika Teoretyczna i Stosowana* (Journal of Theoretical and Applied Mechanics), vol. 28, no. 3-4, 1990. <http://www.ptmts.org.pl/jtam/index.php/jtam/article/view/v28n3-4p583/1302>
- 2.23. *General requirements for helicopter flying and ground handling qualities*. Military Specification MIL-H-8501A, September 7, 1961.
- 2.24. Gessow A., Myers G.C.: *Aerodynamics of the helicopter*. College Park Press, Bethesda 1985.
- 2.25. Goetzendorf-Grabowski T.: Dobór metody całkowania różniczkowych równań ruchu zapisanych z zastosowaniem algebry kwaternionów. *Mechanika w Lotnictwie*, ML-VII, Ed. J. Maryniak, PTMTiS, Warszawa 1996.
- 2.26. Goraj Z.: *Comparison between analytical and vectorial methods of the synthesis of equation of motion*. Proc. Inst. Mech. Engrs., Vol. 197C, 1988.
- 2.27. Gosiewski Z., Ortyl A.: *Algorytmy inercyjnego bezkardanowego systemu orientacji i położenia obiektu o ruchu przestrzennym*. Biblioteka Naukowa Instytutu Lotnictwa, Warszawa 1999.



- 2.28. Goszczyński J., Maryniak J.: *Modelowanie matematyczne przestrzennych manewrów sterowanych obiektów latających z zastosowaniem związków kinematycznych opisanych parametrami Eulera*. Prace Instytutu Lotnictwa, Nr. 151, 1997.
- 2.29. Greenwood D.T.: *Advanced Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- 2.30. Gutowski R.: *Mechanika analityczna*. PWN, Warszawa 1971.
- 2.31. Gutowski R.: *Podstawy teorii stateczności ruchu układów dyskretnych i ciągłych*. Wyd. PW, Warszawa 1981.
- 2.32. Hames M., Grunhagen von W.: *Dynamic engine model integrated in helicopter simulation*. Proc. 23<sup>rd</sup> European Rotorcraft Forum, 16-18 September; Germany, Dresden 1997.
- 2.33. Harper R.P., Cooper G.E.: *A Revised Pilot Rating Scale for the Evaluation of Handling Qualities*. Cornell Aeronautical Laboratory Report No 153, September 1966.
- 2.34. Jankowski K., Maryniak J.: *La systeme commande a tant que systeme a liaisons non-holonomes. Cas dun helicoptere*. J. de Mechanique Theoretique at Appliee, Vol. 7, No. 2, 1988.
- 2.35. Jiang Y.F., Lin Y.P.: *Error analysis of quaternion transformation*. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 27, No. 4, 1991.
- 2.36. Johnson W.: *Comparison of three methods for calculation of helicopter blade loading and stress due stall*. NASA TND-7833, 1974.
- 2.37. Johnson W.: *Helicopter theory*. Princeton University Press, 1980.
- 2.38. Johnson W.: *Rotorcraft aerodynamics model for a comprehensive analysis*. Proc. 54<sup>th</sup> American Helicopter Society Annual Forum, 1998.
- 2.39. Kolesnikow K.S., Suhov W.H.: *Uprugij lietatielnyj apparat kak objekt awtomatičeskogo upravlienija*. Maszynostrojenije, Moskwa 1974.
- 2.40. Kowaleczko G.: *Modelowanie dynamiki lotu obiektów latających*. ITWL, Warszawa 2018.
- 2.41. Kowaleczko G.: *Nieliniowa dynamika przestrzennego ruchu śmigłowca*. WAT, Warszawa 1998.
- 2.42. Leishman J.G., Beddoes T.S.: *A semi-empirical model of dynamic stall*. Journal of Amer. Helicopter Soc., vol. 34/5, 1990.
- 2.43. Lober P.F., Egolf T.A.: *An unsteady helicopter rotor-fuselage aerodynamic interaction analysis*. Journal of American Helicopter Society, Vol. 35, No. 3, 1990.
- 2.44. Loewy R. G.: *A two dimensional approximation to the unsteady aerodynamics of rotary wings*. Journal of the Aeronautic Science, Vol. 24, No.2, 1957.
- 2.45. Łucjanek W., Narkiewicz J., Sibilski K.: *Stateczność dynamiczna śmigłowca z wirnikiem przegubowym*. Mechanika Teoretyczna i Stosowana, vol. 24, nr 1/2, 1986.

- 2.46. Łucjanek W., Sibilski K.: *Wstęp do dynamiki śmigłowca*, ITWL, Warszawa 2007.
- 2.47. Manerowski J. et al.: *Model dynamiki lotu do imitatorów nawigacyjnych*. Mechanika w Lotnictwie, PTMTiS O/Warszawa 1992.
- 2.48. Manerowski J.: *Identyfikacja modelu dynamiki ruchu sterowanych obiektów latających*. Wyd. Nauk. ASKON, Warszawa 1999.
- 2.49. Mansur M.H.: *Development and validation of a blade element mathematical model for AH-64A Apache helicopter*. NASA-TM-108863, 1995.
- 2.50. Maroński R., Łucjanek W.: *Optymalizacja trajektorii samolotu w locie na zadaną odległość*. Archiwum Budowy Maszyn, Vol. XXVI, Nr. 2, 1979.
- 2.51. McFarland R.E.: *A standard kinematic model for flight simulation at NASA-Ames*. NASA CR-2497, Jan. 1975.
- 2.52. McFriedland B.: *Analysis of strapdown navigation using quaternions*. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 14, No. 5, 1989.
- 2.53. Mill M.: *Wiertolety rasczot i projektirovanije*. Maszynostrojenije, Moskwa 1966.
- 2.54. Mitchell E.E.L., Rogers A.E.: *Quaternion parameters in the simulation of a Spinning rigid body*. Simulation, Vol. 4, No. 6, 1965, pp. 390-396.
- 2.55. Mortensen R.E.: *Strapdown guidance error analysis*. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 10, No. 5, 1974.
- 2.56. Narkiewicz J., Sibilski K., Łucjanek W.: *Stateczność dynamiczna i sterowność: śmigłowca jednowirnikowego. Programy obliczeniowe*. Sprawozdanie Nr ZMS-2/81 ITLiMS PW, 1981.
- 2.57. Narkiewicz J.: *Aeromechaniczna i aeroelastyczna stateczność wiroplątów*. Prace Naukowe P.W., Mechanika, z. 158, 1994.
- 2.58. Narkiewicz J.: *Sterowanie dodatkowe wiroplątów przy wykorzystaniu koncepcji układów inteligentnych*. Prace Naukowe P.W., Mechanika z. 169, 1998.
- 2.59. Ogata K.: *Metody przestrzeni stanów w teorii sterowania*. WNT, Warszawa 1974.
- 2.60. Padfield G.: *Helicopter flight dynamics. The theory and application of flying qualities and simulation modelling*. Blackwell Science, Oxford UK 1995.
- 2.61. Pamadi B.N.: *Performance, stability, dynamics, and control of airplanes*. II ed. AIAA, Reston, VA, 2003.
- 2.62. Pars L.A.: *A treatise on analytical dynamics*. Heinemann, London 1970.
- 2.63. Payne P.R.: *Helicopter dynamics and aerodynamics*. Pergamon Press, New York, 1959.
- 2.64. Phillips W.F., Hailey C.E., Gebert G.A.: *A Review of attitude kinematics for aircraft flight simulation*. AIAA No. 2000-4302 CP, 2000.
- 2.65. Reschak R.J.: *Suggested VTOL Handling Qualities Criteria For Civil IFR Qualification*. Journal of the American Helicopter Society, Vol. 16, No. 4, 1 October 1971.

- 2.66. Robinson A.C.: *On the use of quaternions in the simulation of rigid body motion*. Proceedings of Simulation Council Conference & WADC TR 58-17, Wright Air Development Center, Dec., 1958.
- 2.67. Rodrigues O.: *Des lois geometriques qui regissent les déplacements d'un systeme Solide dans l'espace, et de la variation des coordonnees provenant de ses déplacements considerees independamment des causes qui peuvent les produire*. Journal des Mathematiques Pures et Appliquees, Vol. 5, 1840, s. 380-440.
- 2.68. Salguero D.: *Trajectory analysis and optimization software*. SAND99-0811, Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM, 1999.
- 2.69. Sibilski K., Łucjanek W.: *Stateczność dynamiczna śmigłowca z podwieszonym ładunkiem*. Archiwum Budowy Maszyn, Vol. 20, Nr 3-4, 1983.
- 2.70. Sibilski K.: *Modelowanie granicznych stanów lotu*. Oficyna Wyd. WAT, 1998.
- 2.71. Sibilski K.: *Modelowanie i symulacja dynamiki ruchu obiektów latających*. Oficyna wydawnicza MH, Warszawa 2004.
- 2.72. Stępniewski W.Z.: *Rotary wings aerodynamics*. NASA CR 3082, 1979.
- 2.73. Storm O.: *Programm zur berechnung der Krafte, Momente und Bewegungsverlaufe von Hubschaubern mit Gelenkig Angeschlossenen Rotorblattern*. Forschungsbericht 71-67, DFVLR, Stuttgart 1971.
- 2.74. Strganac T.W., Mook T.D.: *Numerical model of unsteady subsonic aeroelastic behavior*. AIAA Journal, Vol. 28, No. 5, 1990.
- 2.75. Sztoff W.: *Modelowanie i filozofia*. PWN, Warszawa 1971.
- 2.76. Szucs E.: *Modelowanie matematyczne w fizyce i technice*. WNT, Warszawa 1977.
- 2.77. Szumański K.: *Teoria i badania śmigłowców w ujęciu symulacyjnym*. Wydawnictwa Naukowe Instytutu Lotnictwa, seria Biblioteka Naukowa Instytutu Lotnictwa, Warszawa 1997.
- 2.78. Tang D.M., Dowell E.H.: *Comparison of theory and experiment for non-linear flutter and stall response of a helicopter blade*. Journal of Sound and Vibration, No. 165 (2), 1993.
- 2.79. Tarzanin F.J.: *Prediction of control loads due stall*. 27<sup>th</sup> Annual National V/STOL Forum of the Amer. Helicopter Soc, 1971.
- 2.80. Theodorsen T.: *General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter*. NACA Rep. No. 496, 1935.
- 2.81. Turnour S., Celi R.: *Modelling of flexible rotor blades for helicopter flight dynamics application*. Journal of American Helicopter Society, Vol. 41, No. 1, 1996.
- 2.82. Wehage R.A., Haug E.J.: *Generalized coordinate partitioning for dimension reduction in analysis of constrained dynamic systems*. ASME Trans. J. Mech. Des. 104 247-55, 1982.

- 2.83. Wilcox J.C.: *A new algorithm for strapdown inertial navigators*. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 3, No. 5, 1967.
- 2.84. Wilson J.C., Mineck R.E.: *Wind-tunnel investigation of helicopter rotor wake effects on three helicopter fuselage models*. NASA TM X-3185, 1975.
- 2.85. Zipfel P.H.: *Modeling and simulation of aerospace vehicle dynamics*. AIAA Ed. Series, Reston, VA, 2000.